О РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЯХ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ

Е. Я. Хруслов

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим в трехмерном пространстве область D, состоящую из двух полупространств D_+ и D_-, разделенных плоским слоем P и соединяющихся между собой каналами, проходящими в этом слое (рис. 1).

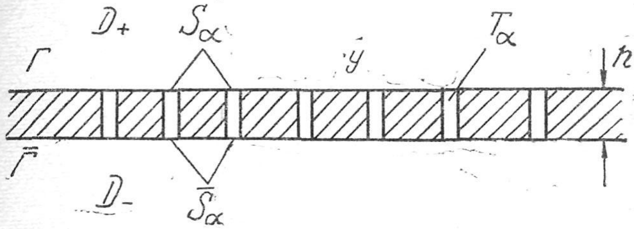

Рис. 1.

Слой P лежит между плоскостями Γ и $\bar{\Gamma}$, находящимися на расстоянии h друг от друга и являющимися соответственно границами областей D_+ и D_-. Каналы в слое образованы следующим образом. На плоскости Γ выбирается некоторое множество S, состоящее из конечного числа частей S_α, ограниченных кусочно-гладкими кривыми ($S = \bigcup\limits_\alpha S_\alpha$), а затем из слоя P удаляется множество точек $T = \bigcup\limits_\alpha T_\alpha$, лежащих на нормалях к Γ, проходящих через точки множества S. Будем обозначать буквами с чертой сверху проекции множеств или точек плоскости Γ на плоскость $\bar{\Gamma}$. Из построений видно, что $D = D_+ \cup D_- \cup T \cup S \cup \bar{S}$.

Рассмотрим в области D функцию Грина краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца, т. е. функцию $G(x, y;\ k)$, удовлетворяющую условиям:

$$\Delta G(x, y;\ k) + k^2 G(x, y;\ k) = -\delta(x, y) \quad x \in D,\ y \in D_+,\ (\operatorname{Im} k > 0), \tag{1}$$

$$\frac{\partial G(x, y;\ k)}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial D, \tag{2}$$

$$G(x, y;\ k) \to 0 \quad x \to \infty, \tag{3}$$

где ∂D — граница области D. Поскольку ∂D имеет угловые точки, то краевое условие (2) следует понимать в обобщенном смысле [1]:

$$\lim_{\Sigma \to \partial D} \int\limits_\Sigma \frac{\partial G(x, y;\ k)}{\partial n} \zeta(x)\, dS_x = 0, \tag{2'}$$

где $\zeta(x)$ — произвольная функция из пространства $W_2^1(D)$, Σ — гладкая поверхность, охватывающая ∂D.

Будем изучать асимптотическое поведение функции $G(x, y; k)$ п фиксированном $y \in D_+$, когда число каналов в слое P стремится к бес нечности, а диаметры их стремятся к нулю. Для этого рассмотрим пос довательность множеств $S^{(n)} = \bigcup\limits_{\alpha} S_{\alpha}^{(n)}$ и соответствующие им последо тельности областей $D^{(n)}$ и функций Грина $G^{(n)}(x, y; k)$ краевых задач (1)- (2) — (3) в областях $D^{(n)}$ при фиксированном $y \in D_+$. При этом буд предполагать, что $S^{(n)}\,(\overline{S}^{(n)})$ всегда находятся в конечной части плоскос $\Gamma\,(\overline{\Gamma})$, так что $S^{(n)} \subset E\,(\overline{S}^{(n)} \subset \overline{E})$, где $E\,(\overline{E})$ — фиксированная область $\Gamma\,($ ограниченная гладким контуром.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть при $n \to \infty$ выполняются такие условия:*

1) $d_{\alpha}^{(n)} \to 0$;

2) $r_{\alpha\beta}^{(n)} \geqslant A \max\limits_{\alpha} d_{\alpha}^{(n)} \quad (A > 0)$;

3) $\lim\limits_{\rho \to 0} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\operatorname{mes}[S^{(n)} \cap K(x, \rho)]}{\pi\rho^2} = f(x)$,

где $d_{\alpha}^{(n)}$ — диаметры $S_{\alpha}^{(n)}$; $r_{\alpha\beta}^{(n)}$ — расстояние между $S_{\alpha}^{(n)}$ и $S_{\beta}^{(n)}$; $K(x, \rho)$ — круг на плоскости Γ радиуса ρ с центром в точке $x \in \Gamma$, $f(x)$ — неп рывная и положительная на E функция.

Тогда равномерно по k, принадлежащем любой ограниченной облас находящейся на положительном расстоянии от оси $\operatorname{Im} k = 0$ и равноме по x, находящемуся на положительном расстоянии от слоя P, существу предел функций Грина $G^{(n)}(x, y; k)$ краевых задач (1) — (2) — (3) в ластях $D^{(n)}$, причем

$$\lim_{n \to \infty} G^{(n)}(x, y; k) = \begin{cases} G_+(x, y; k) - \displaystyle\int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi\,|x-\xi|}\,\varphi_+(\xi)\,dS_{\xi} & x \in D_+ \\ \displaystyle\int_E \frac{e^{ik|x-\overline{\xi}|}}{2\pi\,|x-\overline{\xi}|}\,\varphi_-(\overline{\xi})\,dS_{\overline{\xi}} & x \in D_-, \end{cases}$$

где $G_+(x, y; k)$ — функция Грина краевой задачи Неймана для уравне Гельмгольца в области D_+; $\varphi_+(\xi) = \psi_+(\xi) + \psi_-(\xi)$, $\varphi_-(\overline{\xi}) = \psi_+(\xi) - \psi_-$ а функции $\psi_+(\xi)$ и $\psi_-(\xi)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{kh}{2}}{kf(x)}\,\psi_+(x) + \int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi\,|x-\xi|}\,\psi_+(\xi)\,dS_{\xi} = G_+(x, y; k),$$

$$(x \in E)$$

$$-\frac{2\operatorname{ctg}\dfrac{kh}{2}}{kf(x)}\,\psi_-(x) + \int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi\,|x-\xi|}\,\psi_-(\xi)\,dS_{\xi} = G_+(x, y; k).$$

Следующая лемма относится к исследованию поведения решений ур нений (5) и (6) при малых $f(x)$ и $\operatorname{Im} k$.

Положим $f(x) = \theta f_0(x)$, где $f_0(x)$ — фиксированная положитель функция на E, и обозначим через $\psi_0(x)$ решение уравнения

$$\int_E \frac{e^{ik_1|x-\xi|}}{\pi\,|x-\xi|}\,\psi_0(\xi)\,dS_{\xi} = G_+(x, y; k_1) \quad x \in E,$$

где $k_1 = \operatorname{Re} k$.

Существование единственного решения уравнения (7) доказано в боте [2].

Лемма 1. *Пусть* $k = k_1 + ik_2$ *и* $k_2 = O(\theta)$. *Тогда при* $\theta \to 0$, *равномерно по* x, *находящемуся на положительном расстоянии от* E, *существуют пределы*

$$\lim_{\theta \to 0} \int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} \psi_+(\xi)\, dS_\xi = \begin{cases} 0 & k_1 \neq \pm \dfrac{2\pi m}{h} \\ \displaystyle\int_E \frac{e^{ik_1|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} \psi_0(\xi)\, dS_\xi & k_1 = \pm \dfrac{2\pi m}{h} \quad (m = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

$$\lim_{\theta \to 0} \int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} \psi_-(\xi)\, dS_\xi = \begin{cases} 0 & k_1 \neq \pm \dfrac{\pi(2m-1)}{h} \\ \displaystyle\int_E \frac{e^{ik_1|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} \psi_0(\xi)\, dS_\xi & k_1 = \pm \dfrac{\pi(2m-1)}{h}, \end{cases}$$

причем первый из этих пределов достигается равномерно по $\operatorname{Re} k = k_1$, *принадлежащему любому ограниченному замкнутому множеству, не содержащему точек* $\pm \frac{2\pi m}{h} (m = 1, 2, \ldots)$, *а второй равномерно по аналогичному множеству, не содержащему точек* $\pm \frac{\pi(2m-1)}{h}$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Простым следствием теоремы 1 и леммы 1 является теорема 2, которая показывает, что в краевой задаче (1) — (2) — (3) наблюдаются резонансы при значениях $k = \pm \frac{\pi m}{h}$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Для того, чтобы ее сформулировать, введем такие обозначения: $G_E(x, y; k)$ — функция Грина краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в области с границей $\Gamma \setminus E$ (экран с отверстием); $G_E(x-h, y-h; k)$ получается сдвигом на h в направлении от y к Γ функции $G_E(x, y; k)$, т. е. $x - h = \{x_1, x_2, x_3 - h\}$, где $\{x_1, x_2, x_3\}$ — декартовы координаты точки x с осью x_3, перпендикулярной Γ и направленной в сторону D_+.

Теорема 2. *Пусть* F — *произвольное ограниченное замкнутое множество* $\operatorname{Im} k = 0$, *не содержащее точек* $\pm \frac{\pi m}{h}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, *а* $\tilde{D}_+$ *и* $\tilde{D}_-$ — *произвольные подобласти* D_+ *и* D_-, *находящиеся на положительном расстоянии от слоя* P. *Каковы бы ни были* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *и* $N > 0$, *найдется такое множество* $S = S_1 (\operatorname{mes} S_1 < \delta)$ *и такое* $\operatorname{Im} k = \bar{k}_2 < \delta$, *что для функции Грина* $G(x, y; k)$ *краевой задачи* (1) — (2) — (3) *с* $\operatorname{Im} k = k_2$ *и расположением каналов, соответствующим* S_1, *будут выполняться неравенства:*

1) *при* $k_1 = \operatorname{Re} k \in F$

$$|G(x, y; k) - G_+(x, y; k_1)| < \varepsilon, \text{ если } x \in \tilde{D}_+,$$
$$|G(x, y; k)| < \varepsilon, \text{ если } x \in \tilde{D}_-;$$

2) *при* $k_1 = \operatorname{Re} k = \pm \frac{\pi m}{h}$ $(m = 1, 2, \ldots N)$

$$|G(x, y; k) - G_E(x, y; k_1)| < \varepsilon, \text{ если } x \in \tilde{D}_+,$$
$$|G(x, y; k) - (-1)^m G_E(x-h, y-h; k_1)| < \varepsilon, \text{ если } x \in \tilde{D}_-.$$

Доказательство. Как известно [3], функцию $G_E(x, y; k_1)$ можно представить в виде

$$G_E(x, y; k_1) = \begin{cases} G_+(x, y; k) - \displaystyle\int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} \psi_0(\xi)\, dS_\xi & x \in D_+ \\ \displaystyle\int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} \psi_0(\xi)\, dS_\xi & x \in R_3 \setminus D_+, \end{cases}$$

где функция $\psi_0(\xi)$ удовлетворяет уравнению (7). Поэтому в силу лем найдутся такие θ и $\operatorname{Im} k = \bar{k}_2$, при которых для функции, стоящей в пр части формулы (4), будут выполняться неравенства теоремы 2. Прим теперь при фиксированных $f(x) = \theta f_0(x)$ и $\operatorname{Im} k = \bar{k}_2$ теорему 1, полу утверждение теоремы 2.

Обозначим через q поток энергии, проходящей через каналы в за (1) — (2) — (3), т. е.

$$q = \operatorname{Im} \int_{\bar{E}} G(\bar{x}, y; k) \overline{\frac{\partial G(\bar{x}, y; k)}{\partial n}} dS_{\bar{x}}.$$

Из теоремы 2 следует, что даже при очень малом суммарном попере сечении каналов ($\operatorname{mes} S < \delta$) существует такое расположение их и та $\operatorname{Im} k = k_2$, что при $k_1 = \operatorname{Re} k = \pm \frac{\pi m}{h}$ поток q близок к потоку

$$q_E = \operatorname{Im} \int_{E} G_E(x, y; k_1) \overline{\frac{\partial G_E(x, y; k_1)}{\partial n}} dS_x,$$

проходящему через отверстие E в экране Γ, если источник помес в точке $y \in D_+$. В то же время при других значениях $k_1 = \operatorname{Re} k$ (k_1 поток q близок к нулю, т. е. график $q(k_1)$ имеет такой вид (рис. 2

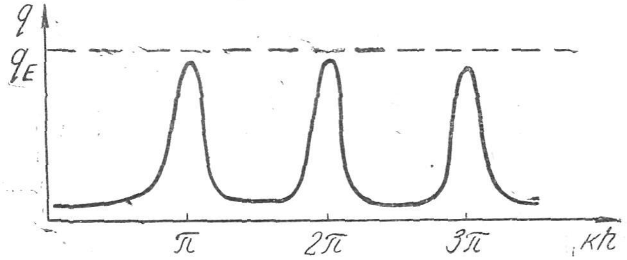

Рис. 2.

Аналогичное явление «резонанса» было, по-видимому, впервые опис в работе [4], где изучалась дифракция плоских волн на периодиче решетке, состоящей из прямоугольных брусьев.

Данную работу можно рассматривать как строгое доказатель этого факта. Однако теорема 1 имеет и самостоятельный интерес. В получены формулы, дающие асимптотическое поведение решения за (1) — (2) — (3) при тонких каналах. Следует отметить, что методом, меняемым в данной работе, можно получить аналогичные формулы случая, когда слой расположен между двумя произвольными пов ностями, а каналы образованы некоторым векторным полем, задан между этими поверхностями.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство состоит из трех частей: сначала (п. 1) находится ходящее представление для функции $G(x, y; k) = G^{(n)}(x, y; k)$ при фи рованном n и мнимых $k = i\varkappa$ ($\varkappa > 0$), затем с помощью этого предст ления доказывается теорема 1 при $k = i\varkappa$ (п. 2), и, наконец, в п. 3 дела переход к любым комплексным k ($\operatorname{Im} k > 0$).

* Это утверждение следует непосредственно из теоремы 2, если в формулах и q_E при интегрировании отступить от $\bar{\Gamma}$ и Γ на произвольное $\Delta > 0$. Однако м показать, что в сформулированном виде оно тоже верно.

3. При достаточно большом n и, следовательно, достаточно малых параметрах каналов функцию Грина $G(x, y; k)$ краевой задачи (1) — (2) — (3) в областях D_+ и D_- можно хорошо аппроксимировать функцией $Q(x, y; k)$ следующего вида:

$$Q(x, y; k) = \begin{cases} G_+(x, y; k) - \int\limits_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} \varphi_+(\xi)\, dS_\xi & x \in D_+ \\ \int\limits_{\bar S} \frac{e^{ik|x-\bar\xi|}}{2\pi|x-\bar\xi|} \varphi_-(\bar\xi)\, dS_{\bar\xi} & x \in D_-, \end{cases} \tag{8}$$

где $\varphi_+(\xi) = \psi_+(\xi) + \psi_-(\xi)$, $\varphi_-(\bar\xi) = \psi_+(\xi) - \psi_-(\xi)$, а функции $\psi_+(\xi)$ и $\psi_-(\xi)$ суть решения интегральных уравнений

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{kh}{2}}{k}\psi_+(x) + \int\limits_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\psi_+(\xi)\, dS_\xi = G_+(x, y; k) \tag{9}$$

$$(x \in S)$$

$$-\frac{2\operatorname{ctg}\frac{kh}{2}}{k}\psi_-(x) + \int\limits_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\psi_-(\xi)\, dS_\xi = G_+(x, y; k). \tag{10}$$

Для того, чтобы показать, как получаются эти формулы, приведем сначала нестрогие наводящие соображения, а потом дадим их обоснование.

Выберем в каждом канале T_α прямоугольную систему координат (u, v, t) с началом в некоторой точке $\bar x_\alpha \in \bar S_\alpha$ и осью t, направленной по оси канала в сторону D_+, и обозначим через $\omega_{\alpha j}(u, v)$ собственные функции краевой задачи Неймана для оператора $-\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$ в области S_α, а через $\lambda_{\alpha j}$ — соответствующие им собственные значения. Тогда, поскольку функция Грина $G(x, y; k)$ удовлетворяет в каналах однородному уравнению Гельмгольца $\Delta G + k^2 G = 0$, она может быть представлена там в виде следующего ряда:

$$G(x, y; k) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{\alpha j}(u, v)\left(A_{\alpha j} e^{i\gamma_{\alpha j} t} + B_{\alpha j} e^{i\gamma_{\alpha j}(h-t)}\right) \quad x(u, v, t) \in T_\alpha,$$

где $\gamma_{\alpha j} = \sqrt{k^2 - \lambda_{\alpha j}}$ $(\operatorname{Im}\gamma_{\alpha j} > 0)$.

Учитывая, что $\lambda_{\alpha 0} = 0$ и $\lambda_{\alpha j} \to +\infty$ $(j \neq 0)$, когда диаметры каналов $\to 0$, можно ожидать, что все члены этого ряда, кроме нулевого, благодаря экспоненциальным множителям, будут стремиться к нулю при $\to 0$ и $0 < t < h$. Но тогда, так как $\omega_{\alpha 0}(u, v) = \mathrm{const}$, функция Грина $G(x, y; k)$ при достаточно тонких каналах близка в канале T_α к функции

$$Q_\alpha(u, v, t) = A_\alpha e^{ikt} + B_\alpha e^{ik(h-t)}. \tag{11}$$

Это является выражением того физического факта, что в тонком канале (волноводе) может распространяться без существенного затухания только основная волна.

Рассмотрим теперь в областях D_+ и D_- функцию $Q(x, y; k)$, заданную формулами (8), где $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\bar\xi)$ — некоторые функции на S и $\bar S$. Легко видеть, что, если в эти формулы вместо $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\xi)$ подставить значения производных функции $G(x, y; k)$ по нормалям Γ и $\bar\Gamma$, направленным в сторону D_+, на множествах S и $\bar S$, при $x \in D_+$ или D_- будет иметь место равенство $G(x, y; k) = Q(x, y; k)$. Отсюда следует, что функции $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\xi)$ можно выбрать так, чтобы $Q(x, y; k)$ в областях D_+ и D_- была близка к $G(x, y; k)$. Такой выбор, очевидно, неоднозначен, Однако естественно предположить, что $Q(x, y; k)$ и $Q_\alpha(u, v, t)$ $(\alpha = 1, 2 \ldots$ (11), аппроксимирующие $G(x, y; k)$ соответственно в областях D_+ и $T = \bigcup_\alpha T_\alpha$, будут на стыках этих областей, т. е. на S и $\overline{S}$, согласо в смысле близости самих функций и их нормальных производных, скольку для $G(x, y; k)$ наблюдается просто совпадение предельных чений функций и производных изнутри и извне каналов. Имея это в подберем постоянные A_α и B_α и функции $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\xi)$ так, чтобы фун $Q(x, y; k)$ и $Q_\alpha(u, v, t)$ и их нормальные производные совпадали хот в одной точке $x_\alpha \in S_\alpha$ и соответственно $\overline{x}_\alpha \in \overline{S}_\alpha$ в каждом канале. Это водит к равенствам:

$$A_\alpha + B_\alpha e^{ikh} = \int_{\overline{S}} \frac{e^{ik|\overline{x}_\alpha - \overline{\xi}|}}{2\pi|\overline{x}_\alpha - \overline{\xi}|} \varphi_-(\overline{\xi})\, dS_{\overline{\xi}},$$

$$A_\alpha e^{ikh} + B_\alpha = G_+(x_\alpha, y; k) - \int_S \frac{e^{ik|x_\alpha - \xi|}}{2\pi|x_\alpha - \xi|} \varphi_+(\xi) dS_\xi,$$

$$A_\alpha - B_\alpha e^{ikh} = \frac{\varphi_-(\overline{x}_\alpha)}{ik},$$

$$A_\alpha e^{ikh} - B_\alpha = \frac{\varphi_+(x_\alpha)}{ik}.$$

Исключая из этих равенств A_α и B_α, получаем такие соотнош для $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(\overline{x})$:

$$\frac{1}{ik}\varphi_-(\overline{x}_\alpha) - \frac{e^{ikh}}{ik}\varphi_+(x_\alpha) = \int_{\overline{S}} \frac{e^{ik|\overline{x}_\alpha - \overline{\xi}|}}{2\pi|\overline{x}_\alpha - \overline{\xi}|} \varphi_-(\overline{\xi})\, dS_{\overline{\xi}} -$$

$$- e^{ikh}\left[G_+(x_\alpha, y; k) - \int_S \frac{e^{ik|x_\alpha - \xi|}}{2\pi|x_\alpha - \xi|} \varphi_+(\xi)\, dS_\xi\right];$$

$$\frac{e^{ikh}}{ik}\varphi_-(\overline{x}_\alpha) - \frac{1}{ik}\varphi_+(x_\alpha) = G_+(x_\alpha, y; k) - \int_S \frac{e^{ik|x_\alpha - \xi|}}{2\pi|x_\alpha - \xi|} \varphi_+(\xi)\, dS_\xi -$$

$$- e^{ikh}\int_{\overline{S}} \frac{e^{ik|\overline{x}_\alpha - \overline{\xi}|}}{2\pi|\overline{x}_\alpha - \overline{\xi}|} \varphi_-(\overline{\xi})\, dS_{\overline{\xi}}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N).$$

При этом

$$A_\alpha = \frac{e^{ikh}\varphi_+(x_\alpha) - \varphi_-(\overline{x}_\alpha)}{ik(e^{2ikh} - 1)}; \quad B_\alpha = \frac{\varphi_+(x_\alpha) - e^{ikh}\varphi_-(\overline{x}_\alpha)}{ik(e^{2ikh} - 1)}.$$

Соотношения (13) не определяют однозначно функций $\varphi_+(x)$ и φ_- Однако они будут выполняться, если потребовать, чтобы $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x$ $= \varphi_-(\overline{x})$ удовлетворяли системе интегральных уравнений:

$$\frac{1}{ik}\varphi_-(x) - \frac{e^{ikh}}{ik}\varphi_+(x) = \int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\varphi_-(\xi)\, dS_\xi +$$

$$+ e^{ikh}\int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\varphi_+(\xi)\, dS_\xi - e^{ikh}G_+(x, y; k),$$

$$\frac{e^{ikh}}{ik}\varphi_-(x) - \frac{1}{ik}\varphi_+(x) = -e^{ikh}\int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\varphi_-(\xi)\, dS_\xi -$$

$$- \int_S \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\varphi_+(\xi)\, dS_\xi + G_+(x, y; k) \quad (x \in S).$$

Значит, равенства (12) будут выполняться, если в качестве $\varphi_-(\overline{x}) = \varphi_-(x)$ и $\varphi_+(x)$ взять решения системы уравнений (15), а постоянные A_α и B_α определить по формулам (14).

Система уравнений (15), очевидно, может быть преобразована к виду (9), (10), где $\psi_+(\xi) = \frac{\varphi_+(\xi) + \varphi_-(\xi)}{2}$, $\psi_-(\xi) = \frac{\varphi_+(\xi) - \varphi_-(\xi)}{2}$.

Перейдем теперь к исследованию уравнений (9), (10). Прежде всего заметим, что оператор A, определяемый формулой

$$A\varphi(x) = \int_S \frac{e^{-\varkappa|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\varphi(\xi)\,dS_\xi$$

действующий из пространства функций $L_2(S)$ в то же пространство, вполне непрерывный и положительный, откуда в силу неравенств $\frac{2}{k}\operatorname{tg}\frac{kh}{2} > 0$ и $-\frac{2}{k}\operatorname{ctg}\frac{kh}{2} > 0$, справедливых при $k = i\varkappa$ $(\varkappa > 0)$, следует, что уравнения (9) и (10) при $k = i\varkappa$ разрешимы *. Далее, так как в правых частях этих уравнений стоит ограниченная функция $G_+(x, y; k)$, не зависящая от n, то *при любом фиксированном* $k = i\varkappa$ $(\varkappa > 0)$ решения ψ_+ и ψ_- этих уравнений также ограничены равномерно по n. Учитывая это, легко получаем при $x'' \to x'$

$$\left|\int_S \frac{e^{ik|x''-\xi|}}{\pi|x''-\xi|}\psi_\pm(\xi)\,dS_\xi - \int_S \frac{e^{ik|x'-\xi|}}{\pi|x'-\xi|}\psi_\pm(\xi)\,dS_\xi\right| < C|x''-x'|\,|\ln|x''-x'||, \quad (16)$$

откуда в силу уравнений (9) и (10) и гладкости $G_+(x, y; k)$ $(y \in D_+)$ следует, что при фиксированном $k = i\varkappa$ и $x'', x' \in S$, $(x'' \to x')$

$$|\psi_\pm(x'') - \psi_\pm(x')| < B|x''-x'|\,|\ln|x''-x'||, \quad (17)$$

причем в этих неравенствах постоянные C и B не зависят от n.

Теперь уже можно показать, что функция $Q(x, y; k)$, заданная в областях D_+ и D_- формулами (8), (9), (10), а в каналах $T = \bigcup_\alpha T_\alpha$ формулами (11), (14), при достаточно малых диаметрах каналов является хорошим приближением функции Грина $G(x, y; k)$ краевой задачи (1) — (2) — (3). Будем искать $G(x, y; k)$ в виде

$$G(x, y; k) = Q(x, y; k) + w(x, y; k). \quad (18)$$

Тогда, как это видно из формул (1), (2), (3), (9) и (11), функция $w(x) = w(x, y; k)$ $(k = i\varkappa)$ должна в областях D_+, D_- и $T = \bigcup_\alpha T_\alpha$ удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta w - \varkappa^2 w = 0,$$

иметь на множествах $\Gamma \setminus S$, $\overline{\Gamma} \setminus \overline{S}$ и боковых поверхностях каналов нулевую нормальную производную $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$, стремиться к нулю на бесконечности. При переходе из областей D_+ и D_- в область $T = \bigcup_\alpha T_\alpha$, т. е. на множествах S и $\overline{S}$ функция $w(x)$ и ее нормальная производная $\frac{\partial w(x)}{\partial n}$ должны иметь скачки $[w(x)]$ и $\left[\frac{\partial w(x)}{\partial n}\right]$ (чтобы скомпенсировать соответствующие

* Как будет видно из леммы 2, эти уравнения разрешимы при всех k из верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} k > 0)$.

скачки у $Q(x, y; k)$), причем, как видно из формул (9), (11), (12) и
на каждом $S_\alpha (\overline{S}_\alpha)$ найдется точка $x_\alpha (\overline{x}_\alpha)$, в которой $[\omega(x_\alpha)] = [\omega(\overline{x}_\alpha)] =$
и $\left[\frac{\partial \omega (x_\alpha)}{\partial n}\right] = \left[\frac{\partial \omega (\overline{x}_\alpha)}{\partial n}\right] = 0$.

Отсюда в силу неравенств (16) и (17) следует, что $[\omega(x)] \to$
$\left[\frac{\partial \omega (x)}{\partial n}\right] \to 0$, когда диаметры каналов стремятся к нулю, т. е. при $n \to$

Отметим еще необходимые неравенства, которые вытекают из (9) и

$$|[\omega(x'')] - [\omega(x')]| < C\,|x'' - x'|\,|\ln|x'' - x'|| \quad x'',\ x' \in S,\ x'' \to x';$$
$$|[\omega(\overline{x}'')] - [\omega(\overline{x}')]| < C\,|\overline{x}'' - \overline{x}'|\,|\ln|\overline{x}'' - \overline{x}'|| \quad \overline{x}'',\ \overline{x}' \in \overline{S},\ \overline{x}'' \to \overline{x}'.$$

Указанные требования, которым должна удовлетворять функция ω используются при доказательстве существования $\omega(x)$, а также при до- зательстве следующего основного ее свойства: если множества $S = \bigcup\limits_\alpha S_\alpha$ $(\overline{S} = \bigcup\limits_\alpha \overline{S}_\alpha)$, на которых сосредоточены скачки $\omega(x)$ и ее производн удовлетворяют условию 2) теоремы 1, то при достаточно малых ди- метрах d_α множеств S_α функция $\omega(x)$ становится в метрике $W_2^1(D_+ \bigcup D_- \bigcup$ сколь угодно малой Оба эти доказательства проводятся одновреме вариационным методом точно так же, как в работе [5], и поэтому зд не приводятся.

Так как $\omega(x)$ удовлетворяет в областях D_+ и D_- однородному ур- нению Гельмгольца, то из приведенного ее свойства следует, что п $d_\alpha \to 0$ она стремится к нулю равномерно в любой подобласти D_+ или D_- отстоящей на положительном расстоянии от слоя P.

2. Рассмотрим теперь последовательность функций Грина $G^{(n)}(x, y$ краевых задач (1) — (2) — (3) при $k = i\varkappa$ $(\varkappa > 0)$. Для доказательства т- ремы 1 в этом случае удобно воспользоваться представлением (18)

$$G^{(n)}(x, y; k) = Q^{(n)}(x, y; k) + \omega^{(n)}(x, y; k),$$

где $Q^{(n)}(x, y; k)$ в областях D_+ и D_- определяются формулами (8), (9), (1

Так как при $x \in D_+$ или D_- $\lim\limits_{n\to\infty} \omega^{(n)}(x, y; k) = 0$, то достаточно по- зать, что $Q^{(n)}(x, y; k)$ при $n \to \infty$ сходится к функции $Q(x, y; k)$, опр- деляемой в D_+ и D_- формулами (4), (5), (6).

Как было отмечено в п. 1 решения $\psi_+^{(n)}(x)$ и $\psi_-^{(n)}(x)$ уравнений и (10) при любом фиксированном $\varkappa > 0$ ограничены равномерно по Поэтому последовательности $\{\psi_+^{(n)}\}$, $\{\psi_-^{(n)}\}$ слабо компактны в пространс функций $L_\infty(E)$, т. е. найдется такая подпоследовательность $\{n_k\}$, что д любой функции $g(x) \in L_1(E)$ существует предел

$$\lim_{n = n_k \to \infty} \int\limits_E g(x)\,\psi_\pm^{(n)}(x)\,dS_x = \int\limits_E g(x)\,\psi_\pm(x)\,dS_x.$$

Делая по этой последовательности предельный переход в формулах (получаем

$$\lim_{n = n_k \to \infty} Q^{(n)}(x, y; k) = Q(x, y; k),$$

где $Q(x, y; k)$ определяется формулами (4), причем $\varphi_+(x) = \psi_+(x) + \psi_-($ $\varphi_-(x) = \psi_+(x) - \psi_-(x)$, а $\psi_+(x)$, $\psi_-(x)$ — слабые пределы функций $\psi_+^{(n)}($ $\psi_-^{(n)}(x)$. Покажем, что $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$ должны удовлетворять уравнениям и (6). Доказательство приведем только для $\psi_+(x)$. Будем считать, ч $\psi_+^{(n)}(x)$ продолжена нулем на множество $E \setminus S^{(n)}$.

Умножая уравнение (9) на произвольную функцию $g(x) \in L_1(E)$ и интегрируя по области E, получим равенство

$$\frac{2}{k}\,\mathrm{tg}\,\frac{kh}{2}\int\limits_E g(x)\,\psi_+^{(n)}(x)\,dS_x + \int\limits_E g(x)\,\chi^{(n)}(x)\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi\,|x-\xi|}\,\psi_+^{(n)}(\xi)\,dS_\xi\,dS_x =$$
$$= \int\limits_E G_+(x, y; k)\,\chi^{(n)}(x)\,g(x)\,dS_x,$$

где $\chi^{(n)}(x)$ — характеристическая функция множества $S^{(n)}$. Из условия 2) теоремы 1 следует, что при $n \to \infty$ последовательность функций $\chi^{(n)}(x)$ слабо сходится к функции $f(x)$. Поэтому, делая в полученном равенстве предельный переход по подпоследовательности $\{n_k\}$, будем иметь

$$\frac{2}{k}\,\mathrm{tg}\,\frac{kh}{2}\int\limits_E g(x)\,\psi_+(x)\,dS_x + \int\limits_E g(x)\,f(x)\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi\,|x-\xi|}\,\psi_+(\xi)\,dS_\xi\,dS_x =$$
$$= \int\limits_E G_+(x, y; k)\,f(x)\,g(x)\,dS_x,$$

а так как $g(x)$ — произвольная функция из $L_1(E)$, то отсюда следует, что $\psi_+(x)$ удовлетворяет уравнению (5). В силу единственности решений уравнений (5) и (6) при $k = i\varkappa$ $(\varkappa > 0)$ пределы $Q^{(n)}(x, y; k)$ по любой подпоследовательности $\{n_k\}$ совпадают между собой, а поэтому вообще существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} Q^{(n)}(x, y; k)$, который определяется формулами (4), (5), (6). Таким образом, в случае чисто мнимых k теорема 1 доказана.

3. Будем предполагать известными существование функции Грина $G^{(n)}(x, y; k)$ краевой задачи (1) — (2) — (3) при комплексном k $(\mathrm{Im}\,k > 0)$ и такие ее свойства: при $x \neq y$ $G^{(n)}(x, y; k)$ есть аналитическая функция параметра k в верхней полуплоскости k и удовлетворяет там тождеству Гильберта

$$G^{(n)}(x, y; k) = G^{(n)}(x, y; \varkappa) + (k^2 + \varkappa^2)\int\limits_{D^{(n)}} G^{(n)}_{\mathrm{D}}(x, \xi; \varkappa)\,G^{(n)}(\xi, y; k)\,d\Omega_\xi,$$

где через $G^{(n)}(x, \xi; \varkappa)$ обозначена функция Грина той же краевой задачи при $k = i\varkappa$ $(\varkappa > 0)$ *.

Учитывая симметричность и положительную определенность ядра $G^{(n)}(x, \xi; \varkappa)$, из тождества Гильберта нетрудно получить неравенство

$$\Big\{\int\limits_{D^{(n)}} |G^{(n)}(x, y; k)|^2\,d\Omega_x\Big\}^{\frac{1}{2}} \leqslant B\Big\{\int\limits_{D^{(n)}} (G^{(n)}(x, y; \varkappa))^2\,d\Omega_x\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

где $B = \dfrac{|k^2 + \varkappa^2|}{|\mathrm{Im}\,(k^2 + \varkappa^2)|}$ при $\mathrm{Re}\,k^2 > -\varkappa^2$ и $B = 1$ при $\mathrm{Re}\,k^2 \leqslant -\varkappa^2$.

Далее, из рассуждений, приведенных в п. 1, вытекает, что при $x \in D_+$ или D_-

$$\int\limits_{D^{(n)}} (G^{(n)}(x, \xi; \varkappa))^2\,d\Omega_\xi = \int\limits_{D^{(n)}} (G^{(n)}(\xi, x; \varkappa))^2\,d\Omega_\xi < C_1(\varkappa)$$

и

$$|G^{(n)}(x, y; \varkappa)| < \frac{C_2(\varkappa)}{|x-y|},$$

* Все это можно доказать, например, так же, как в [6], где тождество Гильберта рассматривается как интегральное уравнение с ядром $G(x, \xi; \varkappa)$ относительно $G(x, y; k)$. Доказав его разрешимость при комплексном k^2, затем устанавливаем, что его решение является функцией Грина задачи (1) — (2) — (3). Отсюда же следует аналитичность $G(x, y; k)$ в плоскости k^2 с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси.

причем постоянные $C_1(\varkappa)$ и $C_2(\varkappa)$ не зависят от n и от x, если x ле[illegible] в области, находящейся на положительном расстоянии от слоя P.

Отсюда, оценивая второе слагаемое в правой части тождества Г[illegible]берта по неравенству Буняковского, получаем, что равномерно п[illegible] лежащем в любой подобласти D_+ или D_-, находящейся на положитель[illegible] расстоянии от слоя P,

$$|G^{(n)}(x, y; k)| < \frac{C_2(\varkappa)}{|x-y|} + |k^2+\varkappa^2|\, BC_1^{\frac{1}{2}}(\varkappa).$$

Таким образом, последовательность аналитических в верхней по[illegible] плоскости k функций $G^{(n)}(x, y; k)$ при $x \in D_+$, D_- $(x \neq y)$ равномерно [illegible] ограничена в любой конечной замкнутой подобласти полуплоскости $\operatorname{Im} k >$[illegible] Так как при любом $k = i\varkappa$ $(\varkappa > 0)$ эта последовательность сходится к фу[illegible]ции $Q(x, y; k)$, определяемой в D_+ и D_- формулами (4), (5), (6), то отс[illegible] в силу теоремы Витали следует, что последовательность $\{G^{(n)}(x, y;$ [illegible] сходится при $x \in D_+$, D_- и $\operatorname{Im} k > 0$ к аналитической в области $\operatorname{Im} k >$[illegible] функции, причем сходимость равномерна по k, принадлежащем лю[illegible] ограниченной замкнутой подобласти полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$, и по [illegible] находящемся на положительном расстоянии от слоя P.

Остается показать, что предел последовательности и при комплекс[illegible] k $(\operatorname{Im} k > 0)$ определяется формулами (4), (5), (6). Для этого, очеви[illegible] нужно доказать, что $Q(x, y; k)$ аналитична в верхней полуплоскости [illegible] Но это будет следовать из однозначной разрешимости (5) и (6) при $\operatorname{Im} k >$[illegible] В силу фредгольмовости этих уравнений их разрешимость вытекает [illegible] леммы 2.

Лемма 2. *Если* $f(x) > 0$ *и* $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, *то уравнения*

$$\frac{2}{k}\operatorname{tg}\frac{kh}{2}\psi_+(x) + f(x)\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\psi_+(\xi)\,dS_\xi = 0, \quad (5'[illegible]$$

$$-\frac{2}{k}\operatorname{ctg}\frac{kh}{2}\psi_-(x) + f(x)\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\psi_-(\xi)\,dS_\xi = 0 \quad (6'[illegible]$$

[illegible]меют ненулевых решений.

Доказательство. Оба уравнения можно записать в виде

$$\Lambda(k)\psi(x) + f(x)\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\psi(\xi)\,dS_\xi = 0, \quad (5'\text{—}[illegible]$$

где $\Lambda(k) = \frac{2}{k}\operatorname{tg}\frac{kh}{2}$ для уравнения (5′) и $\Lambda(k) = -\frac{2}{k}\operatorname{ctg}\frac{kh}{2}$ для урав[illegible]ния (6′). Случай $\Lambda(k) = 0$ $\left(k = \pm\frac{2\pi m}{h}\right.$ или $k = \pm\frac{\pi(2m-1)}{h}$, $m = 1, 2, \ldots$[illegible] был рассмотрен в работе [2]. Поэтому будем предполагать, что $\Lambda(k) \neq$[illegible] В этом случае, как известно [7], функция $\psi(x)$ в области E непреры[illegible] и ограничена.

Рассмотрим во всем пространстве функцию

$$v(x; k) = \int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\psi(\xi)\,dS_\xi.$$

Очевидно, $v(x; k)$ вне множества E удовлетворяет уравнению

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad (1[illegible]$$

и в силу непрерывности и ограниченности $\psi(x)$ на E, $v(x) = v(x; k)$ непрерывна во всем пространстве, имеет непрерывные нормальные производные на E и

$$|\operatorname{grad} v(x)| = o(\rho^{-1}(x)), \tag{20}$$

где $\rho(x)$ — расстояние от x до E.

Кроме того, из уравнения (5′—6′) следует, что при $x \in E$

$$\psi(x) = -\frac{f(x)}{\pi\Lambda(k)} v(x),$$

а так как $\psi(x) = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right)_-\right]$, то отсюда получаем соотношение

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right)_- = \frac{4f(x)}{\Lambda(k)} v(x) \quad x \in E, \tag{21}$$

где $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+$ и $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_-$ — предельные значения нормальной производной $v(x)$ по разные стороны от E; нормаль направлена от $-$ к $+$.

Дальше рассмотрим отдельно два случая:

1) $\operatorname{Im} k = 0$, $\operatorname{Re} k \neq 0$, т. е. $k^2 > 0$;

2) $\operatorname{Im} k > 0$ или $k = 0$, т. е. либо $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$, либо $k^2 \leqslant 0$.

В первом случае $v(x; k)$ удовлетворяет таким условиям излучение на бесконечности

$$\frac{\partial v}{\partial R} - ikv = o\left(\frac{1}{R}\right), \quad v = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \to \infty,$$

где $R = |x|$.

Пусть Σ_ρ — гладкая поверхность, охватывающая E и состоящая из двух параллельных E кусков поверхности и части трубчатой поверхности радиуса ρ, охватывающей край E. Применяя к функциям $v(x; k)$ и $\overline{v(x; k)}$ в области Ω_R, заключенной между поверхностью Σ_ρ и сферой Σ_R достаточно большого радиуса R, вторую формулу Грина, будем иметь

$$0 = \int_{\Omega_R} [\bar{v}(\Delta v + k^2 v) - v(\Delta\bar{v} + k^2\bar{v})]\, d\Omega = \int_{\Sigma_R + \Sigma_\rho} \left(\bar{v}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right) dS,$$

где n — внешняя нормаль к границе Ω_R.

Отсюда, стягивая Σ_ρ к E и учитывая непрерывность $v(x; k)$ и ее нормальной производной к E, а также соотношение (20), получим

$$\int_E \left\{\bar{v}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_- - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+\right] - v\left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right)_- - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right)_+\right]\right\} dS - \int_{\Sigma_R}\left(\bar{v}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right) dS = 0. \tag{22}$$

Так как $\operatorname{Im}\Lambda(k) = 0$ при $\operatorname{Im} k = 0$, то из (21) и (22) следует, что

$$\int_{\Sigma_R}\left(\bar{v}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right) dS = 0,$$

откуда, пользуясь условиями излучения, находим

$$\int_{\Sigma_R} |v|^2\, dS \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Как известно [8], этого достаточно для того, чтобы сделать заключение о тождественном равенстве функции $v(x; k)$ нулю. Следовательно,

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right)_-\right] \equiv 0.$$

Перейдем ко второму случаю. Применим теперь в той же облас[ти] к функциям $v(x;\ k)$ и $\overline{v(x;\ k)}$ первую формулу Грина:

$$0=\int\limits_{\Omega_R}\bar{v}\,(\Delta v+k^2v)\,d\Omega=k^2\int\limits_{\Omega_R}|v|^2\,d\Omega-\int\limits_{\Omega_R}|\operatorname{grad}v|^2\,d\Omega+\int\limits_{\Sigma_R+\Sigma_\rho}\bar{v}\,\frac{\partial v}{\partial n}\,dS.$$

Стянем снова Σ_ρ к E, пользуясь указанными свойствами $v(x;\ k)$, а за[тем] устремим R к бесконечности, учитывая при этом оценки

$$|v(x;\ k)|=O\left(\frac{1}{R}\right);\qquad |\operatorname{grad}v(x;\ k)|=O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

которые вытекают непосредственно из вида $v(x;\ k)$. Тогда будем им[еть]

$$\int\limits_E\bar{v}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_--\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+\right]dS-\int|\operatorname{grad}v|^2\,d\Omega+k^2\int|v|^2\,d\Omega=0.$$

Отсюда в силу соотношения (21) следует, что

$$-\frac{4}{\Lambda(k)}\int\limits_E f\,|v|^2\,dS-\int|\operatorname{grad}v|^2\,d\Omega+k^2\int|v|^2\,d\Omega=0.$$

Если $k^2\leqslant 0$, т. е. $\operatorname{Re}k=0\,(\operatorname{Im}k\geqslant 0)$, то $\Lambda(k)>0$, и из равенства [(23)] заключаем, что $v(x;\ k)\equiv 0$. Если $\operatorname{Im}k^2\neq 0$, т. е. $\operatorname{Re}k\neq 0$ и $\operatorname{Im}k=$[…] то, отделяя в (23) мнимую часть, будем иметь

$$\frac{4\operatorname{Im}\Lambda(k)}{|\Lambda(k)|^2\operatorname{Im}k^2}\int\limits_E f\,|v|^2\,dS+\int|v|^2\,d\Omega=0.$$

Вводя обозначения $\operatorname{Im}k=k_2$, $\operatorname{Re}k=k_1$ и пользуясь известными вы[ра]жениями для $\Lambda(k)$, получаем

$$\frac{4\operatorname{Im}\Lambda(k)}{|\Lambda(k)|^2\operatorname{Im}k^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\left|\sin\dfrac{kh}{2}\right|^2}\left(\dfrac{\operatorname{sh}k_2h}{k_2}-\dfrac{\sin k_1h}{k_1}\right) & \Lambda(k)=\dfrac{2}{k}\operatorname{tg}\dfrac{kh}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{2\left|\cos\dfrac{kh}{2}\right|^2}\left(\dfrac{\operatorname{sh}k_2h}{k_2}+\dfrac{\sin k_1h}{k_1}\right) & \Lambda(k)=-\dfrac{2}{k}\operatorname{ctg}\dfrac{kh}{2}.\end{cases}$$

Так как $\dfrac{\operatorname{sh}k_2h}{k_2}\geqslant\left|\dfrac{\sin k_1h}{k_1}\right|$ и $f(x)>0$, то отсюда заключаем, что $v(x,\ k)\equiv$[0.] Следовательно,

$$\psi(x)=-\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+-\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_-\right]\equiv 0.$$

Таким образом, лемма 2, а значит, и теорема 1 доказаны.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1

Запишем оба уравнения в виде

$$\Lambda(k)\,\psi(x)+\theta f_0(x)\int\limits_E\frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\,\psi(\xi)\,dS_\xi=\theta f_0(x)\,G(x,\ y;\ k)\qquad(9\text{—}[10])$$

и рассмотрим сначала простой случай, когда $\Lambda(\operatorname{Re}k)\neq 0$, т. е, $\operatorname{Re}k\neq\pm\dfrac{2\pi m}{h}$ для уравнения (9) и $\operatorname{Re}k\neq\dfrac{\pi(2m-1)}{h}$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$ для ур[ав]нения (10). Тогда уравнение (9—10) в пространстве функций $C(E)$ имеет в[ид]

$$(I+\theta A_k)\,\psi=\theta g_k,$$

где $g_k = \frac{f_0(x)}{\Lambda(k)} G(x, y; k) \in C(E)$, I — тождественный оператор, A_k — ограниченный оператор, действующий из $C(E)$ в $C(E)$ по формуле

$$A_k\psi = \frac{f_0(x)}{\pi\Lambda(k)} \int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} \psi(\xi)\, dS_\xi.$$

Пусть F — произвольное замкнутое ограниченное множество на оси $\operatorname{Im} k=0$, не содержащее нулей функции $\Lambda(k)$. Тогда, если $\operatorname{Re} k \in F$, а $\operatorname{Im} k \to 0$, то

$$\|g_k\|_{C(E)} < C \quad \text{и} \quad \|A_k\|_{C(E)} < C,$$

а значит, при достаточно малых θ

$$\|(I+\theta A_k)^{-1}\|_{C(E)} < C,$$

где постоянные C не зависят от $k(\operatorname{Re} k \in F)$. Отсюда в силу (24) следует, что равномерно по $k(\operatorname{Re} k \in F)$

$$\psi = \theta(I+\theta A_k)^{-1} g_k \to 0 \quad \text{при } \theta \to 0,$$

и, значит, лемма при $\operatorname{Re} k \neq \pm \frac{2\pi m}{h}$ и соответственно при $\operatorname{Re} k \neq \pm \frac{\pi(2m-1)}{h} (m=1,2, \ldots)$ доказана.

Перейдем к случаю $\Lambda(\operatorname{Re} k)=0$, т. е. $\operatorname{Re} k = \pm \frac{2\pi m}{h}$ или $\operatorname{Re} k = \pm \frac{\pi(2m-1)}{h}$. Предварительно установим некоторые вспомогательные предложения.

Рассмотрим линейное многообразие $\mathfrak{M}$ комплексных непрерывных функций на E и введем на нем билинейную форму

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{E}} = \int\limits_E \int\limits_E \frac{\varphi(x)\overline{\psi(y)}}{|x-y|} dS_x\, dS_y.$$

Эта форма удовлетворяет условию положительности: $(\varphi, \varphi)_{\mathcal{E}} \geqslant 0$, причем $(\varphi, \varphi)_{\mathcal{E}} = 0$ только для $\varphi \equiv 0$ [9]. Значит, она является на $\mathfrak{M}$ скалярным произведением и порождает норму $\|\varphi\|_{\mathcal{E}} = \sqrt{(\varphi, \varphi)_{\mathcal{E}}}$. Пополняя $\mathfrak{M}$ по этой норме, получим гильбертово пространство $\mathcal{E}$.

Поставим в соответствие каждой функции $\varphi \in \mathfrak{M}$ функцию

$$u_\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_E \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|} dS_\xi,$$

заданную во всем пространстве. Очевидно, $u_\varphi(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$ и удовлетворяет вне E уравнению Лапласа. Нетрудно проверить также, что $u_\varphi(x)$ имеет конечную норму Дирихле $\|u_\varphi\|_1$, причем

$$\|u_\varphi\|_1 = \left\{ \int |\operatorname{grad} u_\varphi(x)|^2 d\Omega_x \right\}^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_{\mathcal{E}}. \tag{25}$$

Замыкание множества функций $\{u_\varphi : \varphi \in \mathfrak{M}\}$ по норме Дирихле приводит к полному пространству D_E. Можно показать, что D_E есть подпространство пространства Дирихле D [9], т. е. пространства функций, имеющих интегрируемый квадрат модуля градиента и стремящихся к нулю на бесконечности, причем, если в D ввести скалярное произведение

$$(u, v)_1 = \int (\operatorname{grad} u, \overline{\operatorname{grad} v})\, d\Omega,$$

имеет место разложение

$$D = D_E \oplus \mathring{D}_E,$$

где $\overset{\circ}{D}_E$ — замыкание по норме Дирихле множества функций, финитн[ых] в окрестности E.

Установленное соответствие $\varphi \to u_\varphi$ между $\mathcal{E}$ и D_E порождает в си[лу] (25) изометрический оператор U.

Для функций из пространства D имеет место неравенство [10]

$$\int\limits_{|\omega|=1} |u(R\omega)|^2 d\omega \leqslant \frac{1}{R} \|u\|_1^2,$$

где ω — точка на единичной сфере, т. е. $x = R\omega$. Отсюда легко пол[у]чаем, что

$$\int\limits_G (|u|^2 + |\operatorname{grad} u|^2)\, d\Omega < C \|u\|_1^2, \quad (2[6])$$

где G — произвольная ограниченная область в R_3, а постоянная C завис[ит] только от размера G.

Из этого неравенства и теорем вложения [1] вытекает, что операт[ор] вложения V, ставящий в соответствие каждой функции $u(x) \in D$ ее сл[ед] $u(x)$ на поверхности E, вполне непрерывен как оператор, действующ[ий] из D в $L_2(E)$.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{E}$ линейный оператор

$$A = 4f_0 VU,$$

где f_0 — оператор умножения на функцию $f_0(x)$, входящую в уравнен[ие] (9—10). Так как $f_0(x)$ непрерывна, то из сказанного вытекает, что A впол[не] непрерывен как оператор из $\mathcal{E}$ в $L_2(E)$. Пусть $\varphi \in L_2(E)$. Тогда, пользуя[сь] неравенством Буняковского, получаем

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}}^2 = \int\limits_E \int\limits_E \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(y)}}{|x-y|} dS_x\, dS_y \leqslant \left\{ \int\limits_E \int\limits_E \frac{|\varphi(x)|^2}{|x-y|} dS_x\, dS_y \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_E \int\limits_E \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|} dS_x\, dS_y \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C \|\varphi\|_{L_2(E)}^2,$$

откуда следует, что A вполне непрерывен и как оператор из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$.

Покажем, что A — положительно определенный оператор в $\mathcal{E}$. Д[ля] этого заметим, что на плотном в $\mathcal{E}$ множестве $\mathfrak{M}$ он определяется формуло[й]

$$A\varphi(x) = \frac{f_0(x)}{\pi} \int\limits_E \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|} dS_\xi,$$

и, значит, при $\varphi \in \mathfrak{M}$

$$(A\varphi, \varphi)_{\mathcal{E}} = \int\limits_E \int\limits_E \left\{ \frac{f_0(x)}{\pi} \int\limits_E \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|} dS_\xi \right\} \frac{\overline{\varphi(y)}}{|x-y|} dS_x\, dS_y.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$(A\varphi, \varphi)_{\mathcal{E}} = \int\limits_E \left| \sqrt{\frac{f_0(x)}{\pi}} \int\limits_E \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|} dS_\xi \right|^2 dS_x \geqslant 0,$$

причем, отсюда видно, что $(A\varphi, \varphi)_{\mathcal{E}} = 0$ только для $\varphi \equiv 0$.

Из всего сказанного вытекает, что собственные значения μ_n опера[-]тора A положительны, а соответствующая им ортонормированная систем[а] собственных функций $\{e_n(x)\}$ полна в $\mathcal{E}$.

Обозначим через $K_{R'}$ и K_R концентрические шары радиусов R' и $R\,(R' < R)$, содержащие внутри поверхность E, а через D_R — множество функций из пространства D, тождественно равных нулю вне шара K_R. Очевидно, D_R — подпространство D. Рассмотрим функцию

$$v_\varphi(x;\,k) = \frac{r(x)}{4\pi}\int \frac{e^{ik|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}\,\varphi(\xi)\,dS_\xi,$$

где $\varphi(\xi)\in\mathfrak{M}$, $r(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, равная 1 в $K_{R'}$ и нулю вне K_R. Нетрудно проверить, что $v_\varphi(x;\,k)\in D_R$. Таким образом, на множестве $\mathfrak{M}$ определен оператор $R_k:\varphi\to v_\varphi(x;\,k)$. Покажем, что R_k можно доопределить до вполне непрерывного оператора из $\mathscr{E}$ в D_R.

Для этого прежде всего заметим, что $v_\varphi(x;\,k)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2)\,v_\varphi(x;\,k) = -k^2 r(x)\,u_\varphi(x) + F_\varphi(x;\,k),$$

где $u_\varphi(x) = U\varphi$;

$$F_\varphi(x;\,k) = \Delta r(x)\,w_\varphi(x;\,k) + 2\,(\operatorname{grad} r(x),\ \operatorname{grad} w_\varphi(x;\,k));$$

$$w_\varphi(x;\,k) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}\,\varphi(\xi)\,dS_\xi.$$

Так как $v_\varphi(x;\,k)\equiv 0$ при $x\,\overline{\in}\,K_R$, то отсюда следует, что

$$v_\varphi(x;\,k) = -\frac{k^2}{4\pi}\int\limits_{K_R}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\,r(\xi)\,u_\varphi(\xi)\,d\Omega_\xi + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_R\setminus K_{R'}}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\,F_\varphi(\xi;\,k)\,d\Omega_\xi \quad (\operatorname{Im} k \geqslant 0) \tag{27}$$

и, значит,

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial x_j} = -\frac{k^2}{4\pi}\int\limits_{K_R}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\,r(\xi)\,u_\varphi(\xi)\,d\Omega_\xi + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_R\setminus K_{R'}}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\,F_\varphi(\xi;\,k)\,d\Omega_\xi. \tag{27'}$$

Обозначим через $e^{(m)}(x,\xi;\,k)$ производную m-го порядка от функции $\dfrac{e^{ik|x-\xi|}-1}{4\pi\,|x-\xi|}$ по x_j при $\xi\in E$ и $x\in K_R\setminus K_{R'}$. Очевидно, $e^{(m)}(x,\xi;\,k)$ можно продолжить как функцию от ξ в шар $K_{R'}$ так, чтобы она принадлежала по ξ пространству D, по норме в D непрерывно зависела от k и была ограничена равномерно по $x\in K_R\setminus K_{R'}$. Продолженную так функцию спроектируем на подпространство D_E. Очевидно, проекция обладает теми же свойствами, и ее граничные значения на E равны $e^{(m)}(x,\xi;\,k)$. Отсюда следует, что существует такой вектор $\psi^{(m)}(x,k)\in\mathscr{E}$, что при $\xi\in E$

$$e^{(m)}(x,\xi;\,k) = VU\psi^{(m)}(x,k),$$

причем по норме в пространстве $\mathscr{E}$ $\psi^{(m)}(x,k)$ непрерывно зависит от k и ограничена равномерно по $x\in K_R\setminus K_{R'}$. Более того, как показано в работе [2], функция $\psi^{(m)}(x,k)=\psi^{(m)}(\eta;\,x,k)$ — гладкая функция по η во всех внутренних точках поверхности E и $\psi^{(m)}(\eta;\,x,k)\in L_1(E)$.

Поэтому при $\xi\in E$

$$e^{(m)}(x,\xi;\,k) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_E\frac{\psi^{(m)}(\eta;\,x,k)}{|\xi-\eta|}\,dS_\eta,$$

откуда, обозначая через $w_\varphi^{(m)}(x; k)$ производную m-го порядка по x_i от функции $w_\varphi(x; k)$ $(m = 0,1)$ получаем

$$w_\varphi^{(m)}(x; k) = \frac{1}{4\pi}(\psi^{(m)}(x, k), \varphi)_{\mathcal{E}}.$$

Значит, существует такой вектор $\hat{\psi}(x, k) \in \mathcal{E}$, что

$$F_\varphi(x; k) = (\hat{\psi}(x, k), \varphi)_{\mathcal{E}},$$

причем по норме в $\mathcal{E}$ $\hat{\psi}(x, k)$ непрерывно зависит от k и ограничен равномерно по $x \in K_R \diagdown K_{R'}$.

Отсюда следует, что оператор, отображающий функцию $\varphi \in \mathfrak{M}$ в функцию $F_\varphi(x; k)$, может быть расширен до ограниченного оператора из $\mathcal{E}$ в $L_2(K_R)$, причем по норме он непрерывно зависит от k.

В силу неравенства (26) и изометричности оператора U то же имеет место и для оператора, отображающего $\varphi \in \mathfrak{M}$ в функцию $k^2 r(x) u_\varphi(x) \in L_2(K_R)$.

Обратимся теперь к уравнению (27). Поскольку ядро $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}$ имеет слабую особенность, то оператор, порождаемый им и действующий из $L_2(K_R)$ в $L_2(K_R)$,— вполне непрерывный. Легко видеть также, что он непрерывно зависит от k.

Из приведенных рассуждений в силу формул (27), (27′) следует, что оператор $R_k(\varphi \to v_\varphi(x; k))$ может быть расширен до вполне непрерывного оператора из $\mathcal{E}$ в D_R, причем по норме он непрерывно зависит от k.

Введем еще оператор

$$B_k = U^{-1}P_E R_k,$$

где P_E — проектор на подпространство D_E. Из свойств операторов U и R_k вытекает, что B_k — вполне непрерывный оператор из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$, причем

$$\| B_k - B_{k_1} \| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to k_1.$$

Так как $r(x) \equiv 1$ при $x \in K_{R'}$, а P_E не изменяет граничных значений функций на E, то из определения операторов R_k и A следует, что при $x \in E$ для любой $\varphi \in \mathfrak{M}$ имеет место равенство

$$\frac{f_0(x)}{\pi}\int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}\varphi(\xi)\,dS_\xi = AB_k\varphi. \tag{28}$$

Покажем, что уравнение

$$(I + B_k)\psi = 0 \quad (\operatorname{Im} k \geqslant 0) \tag{29}$$

не имеет ненулевых решений в $\mathcal{E}$, т. е. -1 *не является собственным* значением оператора B_k при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$.

Пусть $\psi_n \in \mathfrak{M}$ и $\| \psi - \psi_n \|_{\mathcal{E}} \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим функции

$$v_n(x) = \frac{1}{4\pi}\int_E \frac{e^{\bar{i}k|x-\xi|}}{|x-\xi|}\psi_n(\xi)\,dS_\xi.$$

Очевидно, $v\ (x)$ вне поверхности E удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца и условиям излучения $(\operatorname{Im} k = 0)$ или экспоненциального убывания $(\operatorname{Im} k > 0)$ на бесконечности, а при $x \in K_{R'}$

$$v_n(x) = U\psi_n + R_k\psi_n.$$

Отсюда следует, что при $n \to \infty$ $v_n(x)$ сходятся к функции $v(x)$, удовлетворяющей всюду вне E однородному уравнению Гельмгольца и тем же условиям на бесконечности, причем при $x \in K_{R'}$

$$v(x) = U\psi + R_k\psi.$$

При этом сходимость имеет место в метрике $W_2'(G)$, где G — любая ограниченная область, а если x находится на конечном расстоянии от E, то $v_n(x)$ сходится к $v(x)$ вместе с производными равномерно по x.

Из уравнения (29) получаем

$$VU\psi + VP_E R_k\psi = 0$$

или

$$VU\psi + VR_k\psi = 0,$$

т. е. $v(x) = 0$ при $x \in E$. Как показано в работе [2], этих свойств $v(x)$ достаточно, чтобы заключить, что $v(x) \equiv 0$. Таким образом, $v_n(x)$ и ее производные $\frac{\partial v_n(x)}{\partial x_i}$ стремятся к нулю равномерно по x, находящемся на положительном расстоянии от E, а в любой ограниченной области Gv_n стремится к нулю в метрике $W_2'(G)$.

Применяя вторую формулу Грина к функциям $v_n(x)$ и $\overline{v_n(x)}$ в области $K_{R'} \setminus E$, получим

$$\int_E \int_E \frac{\psi_n(x)\overline{\psi_n(y)}}{|x-y|} dS_x dS_y = \int_{K_{R'}} \{|\operatorname{grad} v_n|^2 - k^2 |v_n|^2\} d\Omega + \int_{S_{R'}} v_n \frac{\partial \overline{v_n}}{\partial n} dS,$$

где $S_{R'}$ — сфера, ограничивающая шар $K_{R'}$.

Учитывая сходимость $v_n(x)$ к нулю при $n \to \infty$, из этого равенства заключаем, что $\|\psi_n\|_{\mathcal{E}} \to 0$ при $n \to \infty$, и следовательно, $\psi \equiv 0$. Таким образом, уравнение (29) не имеет ненулевых решений.

Рассмотрим еще функцию $G(x, y; k)$, входящую в правую часть уравнения (9—10). Используя гладкость $G(x, y; k)$ по x и непрерывную зависимость ее от параметра k, точно так же, как это было сделано выше для функции $e^{(m)}(x, \xi; k)$, можно показать, что при $x \in E$ имеет место представление

$$f_0(x)\, G(x, y; k) = Ag_k(x),$$

где $g_k \in \mathcal{E}$ и непрерывно зависит от k по норме в $\mathcal{E}$.

Перейдем теперь непосредственно к уравнению (9—10). Покажем, что при $\theta \to 0$ и $\operatorname{Im} k = o(\theta)$, а $\operatorname{Re} k = k_1$ $(\Lambda(k_1) = 0)$ решение $\varphi(x)$ этого уравнения стремится в метрике $\mathcal{E}$ к решению $\psi_0(x)$ уравнения (7). Для этого умножим уравнение (7) на функцию $f_0(x)$ и преобразуем его к виду

$$\frac{f_0(x)}{\pi} \int_E \frac{1}{|x-\xi|} \psi_0(\xi)\, dS_\xi + \frac{f_0(x)}{\pi} \int_E \frac{e^{ik_1|x-\xi|} - 1}{|x-\xi|} \psi_0(\xi)\, dS_\xi = f_0(x)\, G(x, y; k).$$

Пользуясь введенными операторами и формулой (28), запишем это уравнение в пространстве $\mathcal{E}$

$$A\psi_0 + ABk_1\psi_0 = Ag_{k_1}.$$

Откуда, так как $A\varphi = 0$ только для $\varphi \equiv 0$, получаем

$$\psi_0 + B_{k_1}\psi_0 = g_{k_1}. \tag{7'}$$

Поскольку оператор B_{k_1} вполне непрерывный, а однородное уравнение (29) не имеет ненулевых решений, то уравнение (7′) имеет единственное решение $\psi_0 \in \mathcal{E}$, причем, как показано в работе [2], $\psi_0 = \psi_0(x) \in L_1(E)$ и является гладкой функцией во всех внутренних точках E. Следовательно, $\psi_0 = \psi_0(x)$ и есть единственное решение уравнения (7).

Точно таким же образом преобразуем уравнение (9—10). Тогда получим

$$\varepsilon\psi + A\psi + AB_{k_1}\psi + A(B_k - B_{k_1})\psi = Ag_{k_1} + A(g_k - g_{k_1}), \tag{30}$$

где $\varepsilon = \frac{\Lambda(k)}{\theta}$. Пользуясь явным выражением для $\Lambda(k)$, заключаем, что $\Lambda(k) \sim \frac{h}{k_1}k_2$ при $k_2 = \operatorname{Im} k \to 0$ $(\Lambda(k_1) = 0)$, и, значит, в силу условия $k_2 = o(\theta)$ $\varepsilon \to 0$ при $\theta \to 0$. При этом $\varepsilon \to 0$, находясь в правой полуплоскости*.

Так как оператор A — положительно определенный, то существует оператор $(\varepsilon I + A)^{-1}$, а поэтому уравнение (30) можно записать в таком виде:

$$\psi + B_{k_1}\psi - \varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1} B_{k_1}\psi + (\varepsilon I + A)^{-1} A(B_k - B_{k_1})\psi =$$
$$= g_{k_1} - \varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1} g_{k_1} + (\varepsilon I + A)^{-1} A(g_k - g_{k_1}). \tag{30''}$$

Ввиду того, что A — самосопряженный и положительно определенный оператор, а $\operatorname{Re}\varepsilon > 0$, нормы операторов $(\varepsilon I + A)^{-1}A$ и $\varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1}$ ограничены равномерно по ε.

Отсюда в силу непрерывной зависимости оператора B_k и вектора g_k — от параметра k следует, что

$$\lim_{k \to k_1} \|(\varepsilon I + A)^{-1} A(B_k - B_{k_1})\|_{\mathcal{E}} = 0, \quad \text{и} \quad \lim_{k \to k_1} \|(\varepsilon I + A)^{-1} A(g_k - g_{k_1})\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Поэтому для доказательства того, что решение ψ уравнения (30′) при $\varepsilon \to 0$ сходится к решению ψ_0 уравнения (7′), остается только показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1} B_{k_1}\|_{\mathcal{E}} = 0, \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|\varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1} g_{k_1}\|_{\mathcal{E}} = 0. \tag{31}$$

Оператор B_{k_1} — вполне непрерывный и, значит, может быть представлен в виде

$$B_{k_1} = B_{k_1}^N + B_{k_1}^0,$$

где $B_{k_1}^N$ — конечномерный оператор с N-мерной областью значений $\mathcal{E}_N$, а норма оператора $B_{k_1}^0$ может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого N. Пусть $\{g_n\}_1^N$ — ортонормированный базис в $\mathcal{E}_N$, тогда для любого $g \in \mathcal{E}$ имеем

$$\varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1} B_{k_1} g = \sum_{n=1}^{N} (B_{k_1}^N g, g_n)_{\mathcal{E}}\, \varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1} g_n + \varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1} B_{k_1}^0 g$$

и, значит,

$$\|\varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1} B_{k_1} g\|_{\mathcal{E}} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{N} \|\varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1} g_n\|_{\mathcal{E}} \|B_{k_1}^N\|_{\mathcal{E}} +$$
$$+ \|\varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1}\|_{\mathcal{E}} \|B_{k_1}^0\|_{\mathcal{E}}\Big) \|g\|_{\mathcal{E}}.$$

Поскольку $\|\varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1}\|_{\mathcal{E}} < C$, то отсюда следует, что для доказательства обоих равенств (31) нужно показать, что для любого вектора $g \in \mathcal{E}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\varepsilon(\varepsilon I + A)^{-1} g\|_{\mathcal{E}} = 0. \tag{32}$$

---

* Доказательство полностью сохраняется и для случая $\varepsilon \to 0$ так, что $|\arg\varepsilon| < \pi - \delta$, $\delta > 0$.

Пользуясь разложением единицы оператора A, получим

$$\| \varepsilon (\varepsilon I + A)^{-1} g \|^2 \leqslant | \varepsilon |^2 \sum_1^\infty \frac{|(g, e_n)_{\mathcal{E}}|^2}{|\mu_n + \varepsilon|^2}. \tag{33}$$

Собственные значения A μ_n — положительны, а $\operatorname{Re}\varepsilon > 0$.

Следовательно, $\frac{|\varepsilon|^2}{|\mu_n + \varepsilon|^2} < 1$. Поэтому, так как ряд

$$\sum_1^\infty |(g, e_n)_{\mathcal{E}}|^2 = \|g\|_{\mathcal{E}}^2$$

сходится, из (33) следует (32). Таким образом, доказано, что решение $\psi = \psi(x)$ уравнения (9—10) в метрике пространства $\mathcal{E}$ сходится к решению $\psi_0 = \psi_0(x)$ уравнения (7) при $\theta \to 0$, и $\operatorname{Im} k = o(\theta)$, $\operatorname{Re} k = k_1 (\Lambda(k_1) = 0)$. Отсюда, пользуясь введенными операторами U и R_k и учитывая непрерывную зависимость R_k от параметра k, получаем, что в метрике D

$$(U + R_k)\psi \to (U + R_{k_1})\psi_0 \text{ при } \theta \to 0 \text{ и } k = k_1 + o(\theta)\, i. \tag{34}$$

Так как при $x \in K_R$,

$$(U + R_k)\psi(x) = \frac{1}{4\pi}\int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\psi(\xi)\, dS_\xi$$

и

$$(U + R_{k_1})\psi_0(x) = \frac{1}{4\pi}\int_E \frac{e^{i|x-\xi|}}{|x-\xi|}\psi_0(\xi)\, dS_\xi,$$

то из (34) следует утверждение леммы.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. В. А. Марченко за ценное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, Л., 1950.
2. В. А. Марченко, К. В. Маслов. Коротковолновое приближение в задаче о дифракции на плоском экране Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 3, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
3. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. «Мир», 1964.
4. В. Г. Сологуб, В. П. Шестопалов, Г. Г. Половинков. Дифракция электромагнитных волн на металлических решетках с узкими щелями. ЖТФ, XXXVII, 4. 1967.
5. Г. В. Сузиков, Е. Я. Хруслов. О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 5. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
6. Э. Ч. Титчмарш. Разложение по собственным функциям, связанное с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2 Изд-во иностр. лит., 1961.
7. С. Г. Михлин. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, М., 1959.
8. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. «Наука», М., 1966.
9. В. Д. Купрадзе. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
10. P. D. Lax, C. S. Morawetz and R. S. Philips. Exponential Decay of Solutions of the Wave Egration in the Exterior of a Star — Shaped Obstacle. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XVI, 477—486, (1963).

Поступила 20 июня 1967 г.