Вып. 6 1968

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

***В. Г. Михайленко***

1. Рассмотрим в трехмерном пространстве $R_3$ самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathfrak{M} = \sum_{i,\,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right) - c^2(x). \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что оператор (1.1) эллиптический, т. е. для любого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq 0$ квадратичная форма

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k \geqslant \alpha\,\|\xi\|^2, \tag{1.2}$$

где $\alpha > 0$. Будем предполагать, что функции $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$ и $c^2(x)$ ограничены во всем пространстве $R_3$; $\dfrac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_j}$ и $c^2(x)$ удовлетворяют условию Гельдера с некоторым показателем $\lambda > 0$; кроме того, вне некоторой ограниченной области $c^2(x) \geqslant g > 0$.

Из условия (1.2) следует, что

$$A(x) = \det\|a_{ik}(x)\| \geqslant \alpha_1 > 0.$$

Как известно [2], при сделанных предположениях относительно коэффициентов оператора (1.1) существует единственное главное фундаментальное решение $F(x, y)$ уравнения

$$\mathfrak{M}u(x) = 0.$$

Напомним, что главным фундаментальным решением уравнения $\mathfrak{M}u(x) = 0$ называется функция $F(x, y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $F(x, y)$ определена во всем пространстве $R_3$;
2) $F(x, y)$ непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка при $x \neq y$;
3) $\mathfrak{M}F(x, y) = 0$ при $x \neq y$;
4) при некотором $\lambda > 0$ $F(x, y)$ удовлетворяет оценкам вида

$$F(x, y) - H(x, y) = O(r^{\lambda-1}(x, y)); \quad \frac{\partial}{\partial x_i}[F(x, y) - H(x, y)] = O(r^{\lambda-2}(x, y)),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}[F(x, y) - H(x, y)] = O(r^{\lambda-3}(x, y)) \tag{1.3}$$

равномерно в каждой замкнутой области. Здесь $H(x, y)$ — функция о[…]бенностей:

$$H(x, y) = \frac{1}{\sqrt{A(y)}} \left[ \sum_{i, k=1}^{3} A_{ik}(y)(x_i - y_i)(x_k - y_k) \right]^{-\frac{1}{2}},$$

где $\| A_{ik}(x) \|$ — матрица, обратная матрице $\| a_{ik}(x) \|$;

5) существуют две положительные константы $a$ и $R$ такие, что п[…] $r(x, y) > R$

$$F(x, y) = O(e^{-ar(x, y)}), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} F(x, y) = O(e^{-ar(x, y)}). \qquad (1.[…]$$

Главное фундаментальное решение $F(x, y)$ симметрично [2]:

$$F(x, y) = F(y, x)$$

и положительно [3]:

$$F(x, y) > 0.$$

Заметим, что в силу предположений, сделанных относительно опе[…]тора (1. 1), имеют место оценки

$$H(x, y) = O(r^{-1}(x, y)), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} H(x, y) = O(r^{-2}(x, y)),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} H(x, y) = O(r^{-3}(x, y)) \qquad (1.[…]$$

во всякой ограниченной замкнутой области.

Из (1. 3), (1. 4) и (1. 5) следует, что существует такая константа […] что справедливо неравенство

$$F(x, y) \leqslant \frac{B}{r(x, y)}. \qquad (1.[…]$$

Мы будем рассматривать обобщенные потенциалы, ядром которы[…] является главное фундаментальное решение $F(x, y)$ уравнения $\mathfrak{M}u(x) = […]$

Известно [4], что для потенциалов с таким ядром имеет место при[…]цип выметания, из которого, в частности, следует

**Теорема 1.** *Пусть в связной области $D$, ограниченной замкн[…]тыми поверхностями Ляпунова $\partial D$, задана неотрицательная функци[…] $\rho(x) \in C^{(0, \lambda)}(D)$.*

*Положим*

$$u(x) = \int_D F(x, y) \rho(y) dy.$$

*Тогда существует заданная на поверхностях $\partial D$ неотрицательная функ[…]ция $\sigma(x) \in C^{(0, \lambda)}(\partial D)$ такая, что функция*

$$v(x) = \int_{\partial D} F(x, y) \sigma(y) dS_y$$

*совпадает с функцией $u(x)$ на поверхностях $\partial D$:*

$$u(x) = v(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial D.$$

*При этом*

$$u(x) = v(x) \quad \text{при} \quad x \overline{\in} D \qquad (1.7[…]$$

$$u(x) \geqslant v(x) \quad \text{при} \quad x \in D \qquad (1.8[…]$$

*и*

$$\int_{\partial D} \sigma(x) dS_x \leqslant \int_D \rho(x) dx. \qquad (1.9[…]$$

Для удобства читателя мы приведем здесь доказательство этой теоремы.

Обозначим через $u_1(x)$ решение следующей задачи Дирихле:

$$\mathfrak{M} u_1(x) = 0 \qquad \text{при} \quad x \in D$$
$$u_1(x) = u(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial D.$$

При сделанных предположениях решение этой задачи существует и единственно.

Из свойств фундаментального решения $F(x, y)$ и формулы Стокса следует, что

$$\int_{\partial D} a(y)\left[F(x, y)\frac{\partial u_1(y)}{\partial\mu} - u_1(y)\frac{\partial F(x, y)}{\partial\mu}\right] dS_y = \begin{cases} u_1(x) & \text{при } x \in D \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} D. \end{cases}$$

Так как функция $u(x)$, очевидно, удовлетворяет уравнению $\mathfrak{M}u(x) = 0$ вне области $D$, то аналогичным образом получим

$$-\int_{\partial D} a(y)\left[F(x, y)\frac{\partial u(y)}{\partial\mu} - u(y)\frac{\partial F(x, y)}{\partial\mu}\right] dS_y = \begin{cases} u(x) & \text{при } x \overline{\in} D \\ 0 & \text{при } x \in D. \end{cases}$$

Здесь через $\frac{\partial}{\partial\mu}$ обозначена производная по конормали к границе $\partial D$ области $D$, направляющие косинусы которой определяются формулами

$$\cos(\mu, x_i) = \frac{1}{a(x)}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}(x)\cos(n, x_k),$$

$$a(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{k=1}^{3} a_{ik}(x)\cos(n, x_k)\right]^2},$$

где $n$ — внешняя нормаль к границе $\partial D$ области $D$. Складывая эти равенства, получим

$$\int_{\partial D} a(y)F(x, y)\left[\frac{\partial u_1(y)}{\partial\mu} - \frac{\partial u(y)}{\partial\mu}\right] dS_y = \begin{cases} u(x) & \text{при } x \overline{\in} D \\ u_1(x) & \text{при } x \in D. \end{cases} \tag{1.10}$$

Полагая

$$\sigma(x) = \left[\frac{\partial u_1(x)}{\partial\mu} - \frac{\partial u(x)}{\partial\mu}\right] a(x), \tag{1.11}$$

$$v(x) = \int_{\partial D} F(x, y)\,\sigma(y)\,dS_y,$$

будем, очевидно, иметь согласно (1.10)

$$u(x) = v(x) \quad \text{при } x \in \partial D.$$

Равенство (1.7) есть следствие формулы (1.10). Для доказательства неравенства (1.8) рассмотрим в области $D$ функцию

$$w(x) = u(x) - v(x).$$

Эта функция обращается в нуль на $\partial D$, а в области $D$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\mathfrak{M}w(x) = -\rho(x),$$

откуда согласно принципу максимума следует, что $w(x) \geqslant 0$ при $x \in D$ или $u(x) \geqslant v(x)$ при $x \in D$.

Так что неравенство (1. 8) действительно имеет место. Далее, как $w(x) \geqslant 0$ в $D$ и $w(x)=0$ при $x \in \partial D$, то, очевидно, на поверхнос $\partial D$ производная по внешней нормали от функции $w(x)$ неположит на, т. е.

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} - \frac{\partial v(x)}{\partial n} \leqslant 0 \quad \text{при } x \in \partial D. \qquad (1.$$

Из формул (1. 10) и (1. 11) следует, что

$$\sigma(x) = a(x)\left[\frac{\partial v(x)}{\partial \mu} - \frac{\partial u(x)}{\partial \mu}\right] = -a(x)\cos(n, \mu)\left[\frac{\partial u(x)}{\partial n} - \frac{\partial v(x)}{\partial n}\right], \qquad (1.$$

а из эллиптичности оператора $\mathfrak{M}$, условие (1. 2), получаем, что

$$\cos(n, \mu) = \frac{1}{a(x)} \sum_{i,\ k=1}^{3} a_{ik}(x)\cos(n, x_i)\cos(n, x_k) > 0.$$

Из этих формул, учитывая неравенство (1. 12), заключаем, что

$$\sigma(x) \geqslant 0.$$

Для окончания доказательства теоремы 1 осталось проверить сп ведливость неравенства (1. 9).

Согласно формуле Грина [2]

$$\int_D [f(x)\,\mathfrak{M}\varphi(x) - \varphi(x)\,\mathfrak{M} f(x)]\,dx = \int_{\partial D} a(x)\left[f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\mu} - \varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial\mu}\right] dS_x,$$

при $f(x) \equiv 1$, $\varphi(x) = v(x)$ имеем

$$\int_D c^2(x)\,v(x)\,dx = \int_{\partial D} a(x)\frac{\partial v(x)}{\partial\mu}\,dS_x.$$

Если же $f(x) \equiv 1$, а $\varphi(x) = u(x)$, то

$$\int_D [-\rho(x) + c^2(x)\,u(x)]\,dx = \int_{\partial D} a(x)\frac{\partial u(x)}{\partial\mu}\,dS_x.$$

Таким образом, принимая во внимание (1. 13), получаем

$$\int_{\partial D}\sigma(x)\,dS_x = \int_{\partial D} a(x)\left[\frac{\partial v(x)}{\partial\mu} - \frac{\partial u(x)}{\partial\mu}\right]dS_x = \int_D c^2(x)\,v(x)\,dx +$$

$$+\int_D \rho(x)\,dx - \int_D c^2(x)\,u(x)\,dx = \int_D \rho(x)\,dx - \int_D c^2(x)\,[u(x) - v(x)]\,dx =$$

$$= \int_D \rho(x)\,dx - \int_D c^2(x)\,w(x)\,dx \leqslant \int_D \rho(x)\,dx,$$

так как $w(x) = u(x) - v(x) \geqslant 0$ при $x \in D$.

Теорема 1 доказана.

Определение. 1. *$F$-емкостью тела $D$, ограниченного замкнутой по верхностью Ляпунова $\partial D$, называется общая величина массы, котор нужно разместить на поверхности $\partial D$, чтобы обобщенный потенци ею порожденный, был равен единице на поверхности $\partial D$.*

$F$-емкость тела $D$ будем обозначать через $c_F(D)$. Согласно опре лению

$$c_F(D) = \int_{\partial D} \mu(y)\,dS_y,$$

где $\mu(y) \geqslant 0$ таково, что

$$\int\limits_{\partial D} F(x, y)\,\mu(y)\,dS_y = 1 \quad \text{при } x \in \partial D. \tag{1.14}$$

Существование $F$-емкости у любого тела $D$, ограниченного поверхностью Ляпунова $\partial D$, можно доказать, например, так: обозначим через $u_1(x)$ и $u_2(x)$ решения задачи Дирихле

$$\mathfrak{M}\omega(x) = 0,$$
$$\omega(x) = 1 \quad \text{при } x \in \partial D$$

соответственно в области $D$ и в области $R_3 \diagdown D$ (хорошо известно [2], что при сделанных предположениях относительно оператора (1.1) эти решения существуют и единственны). Рассуждая как и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\int\limits_{\partial D} a(y)\,F(x, y)\left[\frac{\partial u_1(y)}{\partial \mu} - \frac{\partial u_2(y)}{\partial \mu}\right] dS_y = \begin{cases} u_1(x) & \text{при } x \in D \\ u_2(x) & \text{при } x \in R_3 \diagdown D. \end{cases}$$

Обозначив

$$a(y)\left[\frac{\partial u_1(y)}{\partial \mu} - \frac{\partial u_2(y)}{\partial \mu}\right] = \mu(y),$$

получаем:

$$\int\limits_{\partial D} F(x, y)\,\mu(y)\,dS_y = 1 \quad \text{при } x \in \partial D.$$

Аналогично предыдущему получаем, что

$$\mu(y) \geqslant 0.$$

Таким образом, на поверхности $\partial D$ можно распределить массу с непрерывной плотностью $\mu(y)$:

$$\mu(y) = a(y)\left[\frac{\partial u_1(y)}{\partial \mu} - \frac{\partial u_2(y)}{\partial \mu}\right] \geqslant 0,$$

чтобы выполнялось равенство (1.14). Легко видеть, что функция $\mu(y)$, обладающая свойством (1.14), единственна.

Отсюда и вытекает существование $F$-емкости.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

***Лемма 1.*** *Если на поверхности Ляпунова $\partial D$, ограничивающей тело $D$ $F$-емкости $c_F(D)$, распределена некоторая масса, порождающая вне этого тела и на его поверхности непрерывный обобщенный потенциал*

$$\Phi(x) = \int\limits_{\partial D} F(x, y)\,dm(y),$$

*то на поверхности $\partial D$ найдется такая точка $x_0 \in \partial D$, в которой значение потенциала равно $\frac{m}{c_F(D)}$, где*

$$m = \int\limits_{\partial D} dm(y),$$

*т. е.*

$$\Phi(x_0) = \frac{m}{c_F(D)}.$$

Пусть $\mu(y)\,dS_y$ — распределение массы, которое порождает обобщенный потенциал, равный единице на поверхности $\partial D$. Тогда

$$\int_{\partial D} \Phi(x)\,\mu(x)\,dS_x = \int_{\partial D} \mu(x) \int_{\partial D} F(x, y)\,dm(y)\,dS_x.$$

Так как

$$\int_{\partial D} \Phi(x)\,\mu(x)\,dS_x = \Phi(x_0) \int_{\partial D} \mu(x)\,dS_x = \Phi(x_0)\,c_F(D)$$

и

$$\int_{\partial D} \mu(x) \int_{\partial D} F(x, y)\,dm(y) = \int_{\partial D} dm(y) \int_{\partial D} F(x, y)\,\mu(x)\,dS_x = \int_{\partial D} dm(y) = m,$$

то

$$\Phi(x_0)\,c_F(D) = m,$$

что и требовалось доказать.

***Лемма 2.*** *Пусть $D$ — некоторое тело, ограниченное замкнутой поверхностью Ляпунова $\partial D$. Обозначим через $d$, $V(D)$ и $c_F(D)$ соответственно диаметр, объем и $F$-емкость этого тела. Тогда имеет место неравенство*

$$(1 - A_1 d^2)\,V(D) \leqslant A c_F(D)\,d^2,$$

*де $A$ и $A_1$ — константы, не зависящие от области $D$.*

Пусть $\mu(y)\,dS_y$ — распределение массы на поверхности $\partial D$, порождающее обобщенный потенциал, равный единице на поверхности $\partial D$. Рассмотрим функцию

$$u(x) = \int_{\partial D} F(x, y)\,\mu(y)\,dS_y.$$

Так как эта функция в области $D$ удовлетворяет уравнению $\mathfrak{M}u(x) = 0$ и обращается в единицу на поверхности $\partial D$, то функция

$$v(x) = 1 - u(x)$$

в области $D$ удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{M}v(x) = -c^2(x)$$

и граничному условию

$$v(x) = 0 \quad \text{при } x \in \partial D.$$

Поэтому функцию $v(x)$ можно представить в виде

$$v(x) = \int_D G(x, y)\,c^2(y)\,dy \quad \text{при } x \in D,$$

где $G(x, y)$ — функция Грина для задачи Дирихле, порожденной оператором $\mathfrak{M}$ в области $D$.

Как известно, функция $G(x, y)$ имеет вид

$$G(x, y) = F(x, y) - g(x, y),$$

где $g(x, y)$ — регулярное решение уравнения $\mathfrak{M}g(x) = 0$, удовлетворяющее граничному условию

$$g(x, y) = F(x, y) \quad \text{при } x \in \partial D.$$

Из принципа максимума отсюда следует, что

$$0 < G(x, y) \leqslant F(x, y) \leqslant \frac{B}{r(x, y)}.$$

Тогда

$$0 < v(x) \leqslant CB \int\limits_D \frac{dy}{r(x,\ y)} \leqslant \pi CBd^2,$$

где

$$C = \max_{x \in R_3} c^2(x).$$

Поэтому

$$u(x) = 1 - v(x) \geqslant 1 - \pi CBd^2 = 1 - A_1 d^2$$

и

$$\int\limits_D u(x)\, dx \geqslant (1 - A_1 d^2) \int\limits_D dx = (1 - A_1 d^2)\, V(D).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_D u(x)\, dx = \int\limits_D \int\limits_{\partial D} F(x,\ y)\, \mu(y)\, dS_y\, dx = \int\limits_{\partial D} \mu(y) \int\limits_D F(x,\ y)\, dx\, dS_y \leqslant$$

$$\leqslant B \int\limits_{\partial D} \mu(y) \int\limits_D \frac{dx}{r(x,\ y)}\, dS_y \leqslant Ad^2 \int\limits_{\partial D} \mu(y)\, dS_y = Ad^2 c_F(D).$$

Таким образом,

$$(1 - A_1 d^2)\, V(D) \leqslant Ad^2 c_F(D).$$

Лемма 2 доказана.

В дальнейшем нам понадобятся пространства С. Л. Соболева $W_2^l(D)$ и $\mathring{W}_2^1(D)$ $(l = 1,\ 2)$.

Определение 2. *Пространство С. Л. Соболева $W_2^l(D)$ есть замыкание пространства $C^l(D)$ по норме*

$$\| g(x) \|_{W_2^l(D)} = \Bigg[ \sum_{l_1 + l_2 + l_3 = l} \left\| \frac{\partial^l g(x)}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \partial x_3^{l_3}} \right\|_{L_2(D)}^2 + \| g(x) \|_{L_2(D)}^2 \Bigg]^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.15)$$

Определение 3. *Пространство С. Л. Соболева $\mathring{W}_2^1(D)$ есть замыкание пространства $\mathring{C}^1(D)$ ($\mathring{C}^1(D)$ — пространство непрерывно дифференцируемых финитных в области $D$ функций) по норме*

$$\| g(x) \|_{W_2^1(D)} = [\, \| \nabla g(x) \|_{L_2(D)}^2 + \| g(x) \|_{L_2(D)}^2 ]^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.16)$$

Известно [5], что $g(x) \in \mathring{W}_2^1(D)$ тогда и только тогда, когда $g(x) \in W_2^1(D)$ и $g(x) = 0$ при $x \in \partial D$.

Для $g(x) \in \mathring{W}_2^1(D)$ имеет место оценка

$$C_1 \| g(x) \|_{W_2^1(D)} \leqslant \| \nabla g(x) \|_{L_2(D)} \leqslant C_2 \| g(x) \|_{W_2^1(D)}. \qquad (1.17)$$

**2. Формулировка основного результата.** Рассмотрим область $D$ трехмерного пространства $R_3$, ограниченную замкнутой поверхностью Ляпунова $\partial D$. Обозначим через $K$ область, полученную удалением из области $D$ конечного числа связных замкнутых множеств $T_i$, т. е.

$$K = D \setminus (\bigcup_i T_i).$$

Будем предполагать, что тела $T_i$ ограничены замкнутыми повер- ностями Ляпунова $\partial T_i$. Граница $\partial K$ области $K$ состоит из совокупност поверхностей $\partial T_i$ и границы $\partial D$ области $D$, т. е.

$$\partial K = \bigcup_i \partial T_i \bigcup \partial D.$$

В областях $K^{(n)} = D \setminus (\bigcup_i T_i^{(n)})$ будем рассматривать задачи Дирих

$$\begin{aligned} \mathfrak{W} u^{(n)}(x) &= -\varphi(x) \quad \text{при } x \in K^{(n)} \\ u^{(n)}(x) &= 0 \qquad\quad \text{при } x \in \partial K^{(n)}, \end{aligned} \tag{2.}$$

где $\varphi(x) \in L_2(D)$.

Продолжая решения задач (2.1) нулем в области $T_i^{(n)}$, мы получ последовательность функций $\bar{u}^{(n)}(x)$, определенных во всей области удовлетворяющих уравнению (2.1) в областях $K^{(n)}$ и равных нулю на $T_i^{(n)}$ Обозначим функции Грина задач (2.1) через $G^{(n)}(x, y)$ и продолжим нулем при $x \in T_i^{(n)}$ или $y \in T_i^{(n)}$. Тогда

$$\bar{u}^{(n)}(x) = \int_D G^{(n)}(x, y)\, \varphi(y)\, dy \quad \text{при } x \in D. \tag{2.}$$

Формула (2.2) определит при любом $n$ некоторый ограниченный операт $G^{(n)}$ в пространстве $L_2(D)$:

$$G^{(n)}[\varphi] = \int_D G^{(n)}(x, y)\, \varphi(y)\, dy. \tag{2.}$$

Пусть при $n \to \infty$ диаметры тел $T_i^{(n)}$ равномерно стремятся к нул Нас интересует, при каких условиях последовательность интегральн операторов (2.3) сильно сходится к некоторому интегральному операто $G$ с ядром $G(x, y)$ и способ определения этого предельного операто т. е. его *ядра* $G(x, y)$.

Условимся в дальнейшем пользоваться следующими обозначениям

$d_i^{(n)}$ — диаметр тела $T_i^{(n)}$;

$r_{ij}^{(n)}$ — расстояние между телами $T_i^{(n)}$ и $T_j^{(n)}$;

$c_{F,i}^{(n)}$ — $F$-емкость тела $T_i^{(n)}$;

$\sum\limits_{(v)} a_i^{(n)}$ — сумма, распространенная при данном значении $n$ на все значения индекса $i$, при которых тела $T_i^{(n)}$ лежат строго внутри шара Например, $\sum\limits_{(v)} c_{F,i}^{(n)}$ обозначает сумму $F$-емкостей всех тел $T_i^{(n)}$, лежащ строго внутри шара $v$.

Основной результат содержится в следующей теореме.

**Теорема 2.** *Пусть при* $n \to \infty$ *выполнены условия:*

1) *диаметры* $d_i^{(n)}$ *тел* $T_i^{(n)}$ *равномерно стремятся к нулю:*

$$\lim_{n\to\infty} \{\max_i d_i^{(n)}\} = 0;$$

2) *функция*

$$\delta(\rho) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \max_{i_0} \sum_{\substack{j \neq i_0 \\ r_{ji_0}^{(n)} < \rho}} \frac{c_{F,j}^{(n)}}{r_{ji_0}^{(n)}} \right\}$$

*стремится к нулю при* $\rho \to 0$;

3) *F-емкости* $c^{(n)}_{F,\,i}$ *тел* $T_i^{(n)}$ *удовлетворяют предельному соотношению*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{(v)} c^{(n)}_{F,\,i} = \int_v f(x)\,dx$$

*для любого шара* $v\subset D$, *где* $f(x)$ — *непрерывная функция.*

*Тогда при* $n\to\infty$ *последовательность операторов* (2.3), *ядрами которых являются функции Грина* $G^{(n)}(x,\ y)$ *задач* (2.1), *сильно сходятся к интегральному оператору с ядром* $G(x,\ y)$, *удовлетворяющим уравнению*

$$\mathfrak{M}G(x,\ y) - f(x)\,G(x,\ y) = -\delta(x,\ y) \text{ при } x\in D \tag{2.4}$$

*и граничному условию*

$$G(x,\ y) = 0 \text{ при } x\in\partial D,$$

*т. е. в метрике пространства* $L_2(D)$ *последовательность решений* $u^{(n)}(x)$ *задач* (2.1), *продолженных нулем на области* $T_i^{(n)}$ *сходится к решению* $u(x)$ *задачи*

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}u(x) - f(x)\,u(x) &= -\varphi(x) \quad \text{при } x\in D,\\ u(x) &= 0 \qquad\quad\ \text{при } x\in\partial D. \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Доказательство теоремы 2, будет основано на ряде лемм.

Обозначим через $\bar u^{(n)}(x)$ решение задачи (2.1), продолженное нулем на тела $T_i^{(n)}$.

***Лемма 3.*** *Из последовательности* $\bar u^{(n)}(x)$ *можно выделить подпоследовательность* $\bar u^{(n_p)}(x)$, *сходящуюся к некоторой функции* $\bar u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *в метрике пространства* $L_2(D)$.

Рассмотрим в областях $K^{(n)}$ билинейные функционалы

$$B_n(v) = \int\limits_{K^{(n)}} \left[\sum_{i,\,k=1} a_{ik}(x)\,\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v(x)}{\partial x_k} + c^2(x)\,v^2(x)\right]dx \tag{3.1}$$

на функциях $v(x)\in W_2^1(K^{(n)})$, удовлетворяющих граничному условию

$$v(x) = \int_D F(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy \text{ при } x\in\partial K^{(n)}. \tag{3.2}$$

Согласно [6] существует единственная функция $\gamma^{(n)}(x)\in W^2_{2,\,\text{лок}}(K^{(n)})\cap W_2^1(K^{(n)})$, удовлетворяющая условию (3.2), на которой функционал (3.1) достигает своего минимума. Функция $\gamma^{(n)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{M}\gamma^{(n)}(x) = 0$$

внутри области $K^{(n)}$.

Положим

$$\bar\varphi(x) = \int_D F(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy \text{ при } x\in D.$$

Согласно [2] $\bar\varphi(x)\in W_2^2(D)$ при $\varphi(x)\in L_2(D)$ и удовлетворяет уравнению $\mathfrak{M}\bar\varphi(x) = -\varphi(x)$ при $x\in D$.

Определим функцию $\bar\gamma^{(n)}(x)$ равенствами

$$\bar\gamma^{(n)}(x) = \begin{cases} \gamma^{(n)}(x) & \text{при } x\in K^{(n)}\\ \bar\varphi(x) & \text{при } x\in T_i^{(n)}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Очевидно $\bar\gamma^{(n)}(x)\in W_2^1(D)$.

Рассмотрим функцию $\bar{\varphi}(x)-\bar{\gamma}^{(n)}(x)$. Функция $\bar{\varphi}(x)-\bar{\gamma}^{(n)}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(D$ является решением задачи (2.1) и обращается в нуль при $x\in T_i^{(n)}$, т.

$$\bar{\varphi}(x)-\bar{\gamma}^{(n)}(x)=\bar{u}^{(n)}(x). \qquad (3.$$

Очевидно, имеет место неравенство

$$B_n(\bar{\gamma}^{(n)})\leqslant B_n(\bar{\varphi})<C,$$

из которого следует, что

$$B_n(\bar{u}^{(n)})=B_n(\bar{\varphi}-\bar{\gamma}^{(n)})<4C.$$

Так как $\bar{u}^{(n)}(x)=0$ при $x\in T_i^{(n)}$, то

$$\int_D\left[\sum_{i,\,k=1}^{3}a_{ik}(x)\frac{\partial\bar{u}^{(n)}(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\bar{u}^{(n)}(x)}{\partial x_k}+c^2(x)(\bar{u}^{(n)}(x))^2\right]dx=B_n(\bar{u}^{(n)})<4C.$$

С другой стороны, из условия (1.2) следует, что

$$\int_D\left[\sum_{i,k=1}^{3}a_{ik}(x)\frac{\partial\bar{u}^{(n)}(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\bar{u}^{(n)}(x)}{\partial x_k}+c^2(x)(\bar{u}^{(n)}(x))^2\right]dx\geqslant\alpha\,\|\nabla\bar{u}^{(n)}(x)\|^2_{L_2(D)}.$$

Поэтому, принимая во внимание (1.17), получаем

$$\|\bar{u}^{(n)}\|_{W_2^1(D)}\leqslant C_1\|\nabla\bar{u}^{(n)}(x)\|_{L_2(D)}<C_2,$$

т. е. последовательность $\bar{u}^{(n)}(x)$ ограничена в пространстве $W_2^1(D)$, и, следова-тельно, компактна в пространстве $L_2(D)$. Так как $\bar{u}^{(n)}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то от-сюда следует, что можно выделить подпоследовательность $\bar{u}^{(n_p)}(x)$, схо-дящуюся к некоторой функции $\bar{u}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ слабо в метрике простран-ства $W_2^1(D)$ и сильно в метрике пространства $L_2(D)$, что и требовалось до-казать.

Согласно (3.4) функции $\bar{u}^{(n)}(x)$ зависят от $n$ только через функци $\bar{\gamma}^{(n)}(x)$, поскольку $\bar{\varphi}(x)$ от $n$ не зависит. Будем вначале предполагать, чт $\varphi(x)\in C^{(0,\lambda)}(D)$. Положим

$$\varphi_+(x)=\frac{|\varphi(x)|+\varphi(x)}{2},\quad \varphi_-(x)=\frac{|\varphi(x)|-\varphi(x)}{2},$$

так что $\varphi_+(x)\geqslant 0$, $\varphi_-(x)\geqslant 0$ и обе эти функции принадлежат пространств $C^{(0,\lambda)}(D)$. Тогда из определения функции $\bar{\gamma}^{(n)}(x)$ и теоремы 1 следует, чт в областях $K^{(n)}$ функции $\bar{\gamma}^{(n)}(x)$ можно представить в виде

$$\bar{\gamma}^{(n)}(x)=\int_{\partial K^{(n)}}F(x,y)\,\rho^{(n)}(y)\,dS_y\ \text{ при } x\in K^{(n)},$$

где

$$\rho^{(n)}(x)=\rho_+^{(n)}(x)-\rho_-^{(n)}(x),$$

а неотрицательные функции $\rho_+^{(n)}(x)$ и $\rho_-^{(n)}(x)$ являются результатом вым-тания масс с плотностями $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x)$ из области $K^{(n)}$ на поверхнос $\partial K^{(n)}$. Поэтому

$$\int_{\partial K^{(n)}}\rho_\pm^{(n)}(x)\,dS_x\leqslant\int_{K^{(n)}}\varphi_\pm(x)\,dx\leqslant\int_D|\varphi(x)|\,dx, \qquad (3.$$

Отсюда следует, что каждое распределение $\rho^{(n)}(x)\,dS_x$ порождает линейный функционал $l^{(n)}$ в пространстве непрерывных в области $D$ функций с нормой

$$\| l^{(n)} \| \leqslant \int\limits_D |\varphi(x)|\,dx < C.$$

Следовательно, можно выделить такую последовательность $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, что функционалы, соответствующие распределениям $\rho^{(n_k)}(x)\,dS_x$, слабо сходятся к некоторому функционалу, порожденному распределением $dm(x)$, сосредоточенным, очевидно, в области $D$, т. е., если $\alpha(x) \in C(D)$, то

$$\lim_{n=n_k\to\infty} \int\limits_{\partial K^{(n)}} \alpha(x)\,\rho^{(n)}(x)\,dS_x = \int\limits_D \alpha(x)\,dm(x). \tag{3.6}$$

Покажем, что предельное распределение $dm(x)$ имеет ограниченную, объемную плотность.

Обозначим

$$m_i^{(n)} = \int\limits_{\partial T_i^{(n)}} \rho^{(n)}(x)\,dS_x, \quad m^{(n)} = \int\limits_{\partial D} \rho^{(n)}(x)\,dS_x.$$

Согласно лемме 1, на каждой поверхности $\partial T_i^{(n)}$ найдется такая точка $x_i^{(n)}$, что

$$\int\limits_{\partial T_i^{(n)}} F(x_i^{(n)}, y)\,\rho^{(n)}(y)\,dS_y = \frac{m_i^{(n)}}{c_{F,\,i}^{(n)}}. \tag{3.7}$$

С другой стороны, согласно неравенству (1.8) теоремы 1 и неравенству (3.5), имеем:

$$\left| \int\limits_{\partial T_i^{(n)}} F(x_i^{(n)}, y)\,\rho^{(n)}(y)\,dS_y \right| \leqslant \int\limits_{\partial K^{(n)}} F(x_i^{(n)}, y)\,|\rho^{(n)}(y)|\,dS_y \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{K^{(n)}} F(x_i^{(n)}, y)\,|\varphi(y)|\,dy \leqslant 2 \int\limits_D F(x_i^{(n)}, y)\,|\varphi(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{x \in D} \int\limits_D F(x, y)\,|\varphi(y)|\,dy = A. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что

$$|m_i^{(n)}| \leqslant A c_{F,\,i}^{(n)}. \tag{3.9}$$

Теперь, учитывая условие 3) теоремы 2, которому удовлетворяют $F$-емкости $c_{F,\,i}^{(n)}$ тел $T_i^{(n)}$, получаем, что

$$\lim_{n=n_k\to\infty} \sum_{(v)} |m_i^{(n)}| \leqslant A \lim_{n=n_k\to\infty} \sum_{(v)} c_{F,\,i}^{(n)} = A \int\limits_v f(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что и предельное распределение $dm(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_v |dm(x)| = \lim_{n=n_k\to\infty} \sum_{(v)} |m_i^{(n)}| \leqslant A \int\limits_v f(x)\,dx.$$

Последнее неравенство означает, что предельное распределение $dm(x)$ имеет ограниченную объемную плотность, т. е.

$$\int\limits_v dm(x) = \int\limits_v \varkappa(x)\,dx. \tag{3.10}$$

***Лемма 4.*** *Из последовательности $\bar{u}^{(n)}(x)$ можно выделить подпоследовательность, сильно сходящуюся в пространстве $L_2(D)$ к функции*

$$u(x) = \int_D F(x, y)[\varphi(y) - \varkappa(y)]\, dy, \tag{3.11}$$

*где $\varkappa(y)$ определена формулой* (3.10).

Выделим из последовательности $\{n_p\}$, определенной леммой 3, подпоследовательность $\{n'_p\}$ так, чтобы имело место равенство (3.6). Тогда для подпоследовательности $\{n'_p\}$ одновременно выполняются следующие предельные равенства:

$$\lim_{n=n'_p\to\infty} \|\bar{u}^{(n)}(x) - \bar{u}(x)\|_{L_2(D)} = 0,$$

$$\lim_{n=n'_p\to\infty} \int_{\partial K^{(n)}} \alpha(x)\rho^{(n)}(x)\, dS_x = \int_D \alpha(x)\varkappa(x)\, dx,$$

где $\alpha(x)$ — произвольная функция из $C(D)$. Поэтому

$$\int_D [\bar{u}(x) - u(x)]\alpha(x)\, dx = \lim_{n=n'_p\to\infty} \int_D [\bar{u}^{(n)}(x) - u(x)]\alpha(x)\, dx =$$

$$= \int_D \alpha(x)\int_D \varkappa(y) F(x, y)\, dy dx - \lim_{n=n'_p\to\infty} \int_D \alpha(x) \int_{\partial K^{(n)}} F(x, y)\rho^{(n)}(y)\, dS_y dx +$$

$$+ \lim_{n=n'_p\to\infty} \sum_i \delta_i^{(n)}, \tag{3.12}$$

где согласно (3.3), (3.4) и (1.7)

$$|\delta_i^{(n)}| \leqslant \int_{T_i^{(n)}} |\alpha(x)| \left| \int_{\partial K^{(n)}} F(x, y)\rho^{(n)}(y)\, dS_y - \int_D F(x, y)\varphi(y)\, dy \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{T_i^{(n)}} |\alpha(x)| \int_D |F(x, y)|\, |\varphi(y)|\, dy dx,$$

так что

$$|\delta_i^{(n)}| \leqslant C \cdot V(T_i^{(n)}).$$

Согласно лемме 2 и условию 1) теоремы 2 последнее неравенство при достаточно больших $n$ можно записать в виде

$$|\delta_i^{(n)}| \leqslant \frac{AC}{1 - A_1 (d_i^{(n)})^2}\, c_{F,i}^{(n)} (d_i^{(n)})^2.$$

Легко видеть, что из условий 1) и 3) теоремы 2 следует, что

$$\lim_{n=n'_p\to\infty} \sum_i |\delta_i^{(n)}| = 0.$$

Тогда из (3.12) следует, что

$$\int_D [\bar{u}(x) - u(x)]\alpha(x)\, dx = \int_D \varkappa(y) \int_D \alpha(x) F(x, y)\, dx dy -$$

$$- \lim_{n=n'_p\to\infty} \int_{\partial K^{(n)}} \rho^{(n)}(y) \int_D \alpha(x) F(x, y)\, dx dS_y = 0,$$

так как согласно (3.6) $\rho^{(n)'}_{\rho}(x)$ слабо сходится к $\varkappa(x)$ и функция

$$\int_D \alpha(x) F(x, y)\, dx$$

непрерывна.

Следовательно, $\bar{u}(x)$ почти всюду равна $u(x)$. Лемма 4 доказана.

**Лемма 5.** *Пусть функция $f(x)$, определенная условием 3) теоремы 2, и $\varphi(x)$ принадлежат $C^{(0,\lambda)}(D)$. Тогда функция $u(x)$, определенная равенством (3.11), удовлетворяет уравнению*

$$\mathfrak{M}u(x) - f(x)\, u(x) = -\varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in D \tag{3.13}$$

*и краевому условию*

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial D. \tag{3.14}$$

Условие (3.14) непосредственно следует из лемм 3 и 4. Для доказательства условия (3.13), очевидно, достаточно доказать, что функция $\varkappa(x)$, определенная условием (3.10), представима в виде

$$\varkappa(x) = f(x)\, u(x) \quad \text{при} \quad x \in D. \tag{3.15}$$

Заметим, что если, начиная с некоторого $n \geqslant N$, в шар $v(x_0, \rho)$ с центром в точке $x_0 \in D$ радиуса $\rho$ ($\rho$ — произвольное положительное число), не попадают тела $T_i^{(n)}$, то согласно условию 3) теоремы 2

$$f(x_0) = 0$$

и, очевидно, имеет место (3.15).

Таким образом, нам остается показать справедливость равенства (3.15) для тех точек $x_0 \in D$, произвольная $\varepsilon$-окрестность которых содержит хотя бы одно тело $T_i^{(n)}$ при $n \to \infty$. Согласно теореме 1

$$\int_D F(x, y)\, \varphi(y)\, dy = \int_{\partial K^{(n)}} F(x, y)\, \rho^{(n)}(y)\, dS_y \quad \text{при} \quad x \in \partial K^{(n)}.$$

Из леммы 1 следует, что существует такая точка $x_i^{(n)} \in \partial T_i^{(n)}$, что

$$\int_D F(x_i^{(n)}, y)\, \varphi(y)\, dy = \frac{m_i^{(n)}}{c_{F,\,i}^{(n)}} + \sum_{j \neq i} \int_{\partial T_j^{(n)}} F(x_i^{(n)}, y)\, \rho^{(n)}(y)\, dS_y + \\ + \int_{\partial D} F(x_i^{(n)}, y)\, \rho^{(n)}(y)\, dS_y.$$

Возьмем теперь произвольную точку $x_0 \in D$, в произвольной $\varepsilon$-окрестности которой содержатся тела $T_i^{(n)}$ при $n \to \infty$, и выберем произвольное положительное число $\rho < 1$. Перепишем предыдущее выражение в таком виде:

$$\frac{m_i^{(n)}}{c_{F,\,i}^{(n)}} = \int_D F(x_0, y)\, \varphi(y)\, dy - \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} \geqslant \rho^{\frac{1}{3}}}} \int_{\partial T_j^{(n)}} F(x_0, y)\, \rho^{(n)}(y)\, dS_y - \\ - \int_{\partial D} F(x_0, y)\, \rho^{(n)}(y)\, dS_y - \alpha_i^{(n)} - \beta_i^{(n)} - \gamma_i^{(n)}, \tag{3.16}$$

где

$$\alpha_i^{(n)} = \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} < \rho^{\frac{1}{3}}}} \int_{\partial T_j^{(n)}} F(x_i^{(n)}, y)\, \rho^{(n)}(y)\, dS_y,$$

$$\beta_i^{(n)} = \int_D [F(x_0, y) - F(x_i^{(n)}, y)]\, \varphi(y)\, dy -$$

$$- \int_{\partial D} [F(x_0, y) - F(x_i^{(n)}, y)\, \rho^{(n)}(y)\, dS_y,$$

$$\gamma_i^{(n)} = - \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} \geqslant \rho^{\frac{1}{3}}}} \int_{\partial T_j^{(n)}} [F(x_0, y) - F(x_i^{(n)}, y)]\, \rho^{(n)}(y)\, dS_y.$$

Принимая во внимание (1.6), можем записать

$$|\alpha_i^{(n)}| \leqslant B \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} < \rho^{\frac{1}{3}}}} \left| \int_{\partial T_j^{(n)}} \frac{\rho^{(n)}(y)}{r(x_i^{(n)}, y)}\, dS_y \right| \leqslant B \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} < \rho^{\frac{1}{3}}}} \frac{|m_i^{(n)}|}{r_{ij}^{(n)}}.$$

Из неравенства (3.9) и условия 2) теоремы 2 следует, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\alpha_i^{(n)}| \leqslant B_1 \delta\left(\rho^{\frac{1}{3}}\right). \qquad (3.17)$$

Из свойств функции $F(x, y)$ вытекает, что при $x \in v(x_0, \rho)$ и $y \bar{\in} v\left(x_0, \rho^{\frac{1}{3}}\right)$ имеет место неравенство

$$|F(x_0, y) - F(x, y)| \leqslant \sigma(\rho),$$

где $\sigma(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Точку $x_i^{(n)} \in \partial T_i^{(n)}$ будем выбирать на поверхности одного из тел $T_i^{(n)} \subset v(x_0, \rho)$. Тогда

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\beta_i^{(n)}| \leqslant B_2 (\rho + \sigma(\rho)), \qquad (3.18)$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\gamma_i^{(n)}| \leqslant B_3 \sigma(\rho),$$

где константы $B_2$ и $B_3$ не зависят от $n$.

Из определения предельного распределения $\varkappa(x)\, dx$ следует, что равномерно по множеству тех $i$, при которых $T_i^{(n)} \subset v(x_0, \rho)$

$$\lim_{n = n'_p \to \infty} \left| \int_D F(x_0, y)\, \varkappa(y)\, dy - \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} \geqslant \rho^{\frac{1}{3}}}} \int_{\partial T_j^{(n)}} F(x_0, y)\, \rho^{(n)}(y)\, dS_y - \right.$$

$$\left. - \int_D F(x_0, y)\, \rho^{(n)}(y)\, dS_y \right| \leqslant \int_{v\left(x_0 2\rho + \rho^{\frac{1}{3}}\right)} F(x_0, y)\, |\varkappa(y)|\, dy. \qquad (3.19)$$

Тогда (3.16) можно записать так:

$$\frac{m_i^{(n)}}{c_{F, i}^{(n)}} = \int_D F(x_0, y)\, \varphi(y)\, dy - \int_D F(x_0, y)\, \varkappa(y)\, dy + \varepsilon_i^{(n)}.$$

[...] учитывая (3.11),

$$\frac{m_i^{(n)}}{c_{F,\,i}^{(n)}} = u(x_0) + \varepsilon_i^{(n)}. \tag{3.20}$$

[...] этом согласно (3.17), (3.18) и (3.19) имеем

$$\overline{\lim_{n=n'_p\to\infty}} \, |\varepsilon_i^{(n)}| \leqslant B_1\delta\left(\rho^{\frac{1}{3}}\right) + B_2(\rho + \sigma(\rho)) + B_3\sigma(\rho) + \\ + \int\limits_{v\left(x_0,\, 2\rho+\rho^{\frac{1}{3}}\right)} F(x_0, y)\,|\varkappa(y)|\,dy = \varepsilon(\rho) \tag{3.21}$$

[...]мерно по тому же множеству значений $i$.

[...] ограниченности функции $\varkappa(x)$ и условия 2) теоремы 2 следует, что

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon(\rho) = 0. \tag{3.22}$$

[...] (3.20), принимая во внимание (3.21), получаем

$$\lim_{n=n'_p\to\infty} \Big|\sum_{v(x_0,\,\rho)} m_i^{(n)} - u(x_0)\sum_{v(x_0,\,\rho)} c_{F,\,i}^{(n)}\Big| \leqslant \varepsilon(\rho) \lim_{n=n'_p\to\infty} \sum c_{F,\,i}^{(n)},$$

т. е. согласно (3.10) и условию 3) теоремы 2

$$\Big|\int\limits_{v(x_0,\,\rho)} \varkappa(x)\,dx - u(x_0)\int\limits_{v(x_0,\,\rho)} f(x)\,dx\Big| \leqslant \varepsilon(\rho)\int\limits_{v(x_0,\,\rho)} f(x)\,dx.$$

[...] обе части этого неравенства на объем шара $v(x_0, \rho)$ и устремляя $\rho$ [...] нулю в силу (3.22), получаем

$$\varkappa(x_0) = u(x_0)\,f(x_0)$$

[...] всюду. Тем самым мы показали, что функция $u(x)$, определенная [...]венством (3.11), представима в виде

$$u(x) = \int\limits_D F(x, y)\,[\varphi(y) - u(y)\,f(y)]\,dy.$$

[...]скольку мы предполагали, что $f(x)$ и $\varphi(x) \in C^{(0,\,\lambda)}(D)$, а из (3.11) со[...]гласно [2] следует, что $u(x) \in C^{(1,\,\lambda)}(D)$, то

$$\varphi(x) - f(x)\,u(x) \in C^{(0,\,\lambda)}(D).$$

[...]гда согласно [2] $u(x) \in C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению (3.13). Лемма 5 [...]казана.

*Замечание. Если $f(x)$ и $\varphi(x) \in C^{(0,\,\lambda)}(D)$, то существует сильный [...]дел в $L_2(D)$ у всей последовательности $\bar{u}^{(n)}(x)$ и он равен $u(x)$.*

Очевидно, достаточно показать, что $u(x)$ будет пределом функций [...]$(x)$ по любой подпоследовательности.

Пусть $u_1(x)$ — предел функций $\bar{u}^{(n)}(x)$ по некоторой подпоследователь[...]сти $\{n'_q\}$, отличной от $\{n'_p\}$. Тогда $u_1(x)$ должна удовлетворять тем же [...]ловиям, что и $u(x)$, т. е. уравнению (3.13) и краевому условию (3.14).

Рассмотрим функцию

$$\omega(x) = u(x) - u_1(x).$$

[...]евидно, функция $\omega(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{M}\omega(x) - f(x)\,\omega(x) = 0 \text{ при } x \in D \tag{3.23}$$

и граничному условию

$$\omega(x) = 0 \text{ при } x \in \partial D. \tag{3.24}$$

Так как по определению (условие 3) теоремы 2) $f(x) \geqslant 0$, то для уравнения (3.23) имеет место принцип максимума, из которого, учитывая (3.24), следует, что почти всюду

$$\omega(x) = 0,$$

т. е. почти всюду в $D$

$$u(x) = u_1(x).$$

Тем самым мы доказали теорему 2 в предположении, что

$$f(x) \text{ и } \varphi(x) \in C^{(0,\lambda)}(D).$$

Пусть теперь $\varphi(x) \in L_2(D)$. Выберем последовательность функций $\varphi_k(x) \in C^{(0,\lambda)}(D)$ такую, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \| \varphi(x) - \varphi_k(x) \|_{L_2(D)} = 0,$$

и рассмотрим последовательность задач

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M} u_k^{(n)}(x) = -\varphi_k(x) && \text{при } x \in K^{(n)} \\ &u_k^{(n)}(x) = 0 && \text{при } x \in \partial K^{(n)}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Как было показано выше, при фиксированном $k$ последовательность решений задач (3.25), продолженных нулями на тела $T_i^{(n)}$, сильно сходится в пространстве $L_2(D)$ к некоторой функции $u_k(x) \in C^2(D)$, удовлетворяющей уравнению

$$\mathfrak{M} u_k(x) - f(x) u_k(x) = -\varphi_k(x) \quad \text{при } x \in D \tag{3.26}$$

и краевому условию

$$u_k(x) = 0 \quad \text{при } x \in \partial D. \tag{3.27}$$

Обозначим через $u(x)$ решение задачи (3.26) — (3.27), где вместо $\varphi_k(x)$ стоит $\varphi(x)$. *Имеем, очевидно,*

$$\begin{gathered} \| \bar{u}^{(n)}(x) - u(x) \|_{L_2(D)} \leqslant \| \bar{u}^{(n)}(x) - \bar{u}_k^{(n)}(x) \|_{L_2(D)} + \\ + \| \bar{u}_k^{(n)}(x) - u_k(x) \|_{L_2(D)} + \| u_k(x) - u(x) \|_{L_2(D)}. \end{gathered}$$

В силу эллиптичности оператора $\mathfrak{M}$ имеют место равномерные по $n$ оценки

$$\begin{gathered} \| \bar{u}^{(n)}(x) - \bar{u}_k^{(n)}(x) \|_{L_2(D)} \leqslant \varepsilon(k), \\ \| u_k(x) - u(x) \|_{L_2(D)} \leqslant \varepsilon(k), \end{gathered}$$

где $\varepsilon(k) \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| \bar{u}^{(n)}(x) - u(x) \|_{L_2(D)} \leqslant 2\varepsilon(k),$$

и так как левая часть от $k$ не зависит, и $\varepsilon(k) \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| \bar{u}^{(n)}(x) - u(x) \|_{L_2(D)} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогичным образом можно снять и последнее дополнительное условие ($f(x) \in C^{(0,\lambda)}(D)$).

Итак, мы доказали, что при $n \to \infty$ последовательность операторов (2.3), ядрами которых являются функции Грина $G^{(n)}(x, y)$ задач (2.1), продолженные нулем при $x \in T_i^{(n)}$ или $y \in T_i^{(n)}$, сильно сходятся к интегральному оператору, ядром которого является функция Грина задачи (2.5).

4. **Дополнение**. Мы рассмотрели случай, когда множества $T_i^{(n)}$ распределены внутри некоторой области так, что при $n \to \infty$ сумма их $F$-емкостей имеет объемную плотность. Аналогичным образом можно исследовать случай, когда множества $T_i^{(n)}$ при $n \to \infty$ прижимаются к некоторой поверхности Ляпунова Г так, что сумма их $F$-емкостей имеет поверхностную плотность. В этом случае имеет место

**Теорема. 3.** *Пусть при $n \to \infty$ выполнены такие условия:*

*1) диаметры $d_i^{(n)}$ тел $T_i^{(n)}$ и расстояния $r_i^{(n)}$ от них до поверхности* Г *равномерно стремятся к нулю*

$$\lim_{n \to \infty} \{\max_i d_i^{(n)}\} = \lim_{n \to \infty} \{\max_i r_i^{(n)}\} = 0;$$

*2) функция*

$$\delta(\rho) = \varlimsup_{n \to \infty} \left\{ \max_i \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ji}^{(n)} < \rho}} \frac{c_{F, j}^{(n)}}{r_{ji}^{(n)}} \right\}$$

*стремится к нулю при $\rho \to 0$;*

*3) $F$-емкости $c_{F, i}^{(n)}$ тел $T_i^{(n)}$ удовлетворяют предельному соотношению*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{(\sigma)} c_{F, i}^{(n)} = \int_\sigma f(x)\, d S_x$$

*для любого куска $\sigma$ поверхности* Г, *где $f(x)$ — непрерывная на поверхности* Г *функция, а $\sum_\sigma c_{F, i}^{(n)}$ означает сумму $F$-емкостей всех тел $T_i^{(n)}$, проектирующихся строго внутрь части $\sigma$ поверхности* Г.

*Тогда при $n \to \infty$ существует предел функций Грина $G^{(n)}(x, y)$ задач*

$$\mathfrak{M} G^{(n)}(x, y) = -\delta(x, y) \quad \text{при } x \in R_3 \setminus (\bigcup T_i^{(n)})$$
$$G^{(n)}(x, y) = 0 \quad \text{при } x \in \partial T_i^{(n)},$$

*и этот предел*

$$\lim_{n \to \infty} G^{(n)}(x, y) = G(x, y)$$

*является решение уравнения*

$$\mathfrak{M} G(x, y) = -\delta(x, y)$$

*при таких граничных условиях на поверхности* Г:

$$G^+(x, y) = G^-(x, y) = G(x, y),$$
$$\left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial \mu}\right)^+ - \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial \mu}\right)^- = \frac{f(x)}{a(x)} G(x, y),$$

*где знаками $+$ и $-$ отмечены предельные значения функции в точке $x \in$ Г с разных стороны от* Г, *$\mu$ — конормаль к поверхности* Г *в точке $x$, направленная из стороны, которой отвечает знак $-$, в сторону, которой отвечает знак $+$.*

Доказательство теоремы 3 в основном аналогично доказательству теоремы 2, и мы его приводить не будем.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. А. Марченко за постановку задачи и руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой гра[illegible] цей. Матем. сб., т. 65 (107); 3,1964.

2. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд[illegible] иностр. лит., М., 1957.

3. M. Brelot. Lectures on potential theory. Tata Inst. Bombey, 1960.

4. N. Ninomiya. Etude sur la theorie du potentiel pris par rapport au no[illegible] symetrique. Journ. Inst. Polytechn. Osaka City Uniw., 5 (1954).

5. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряж[illegible] ных операторов. «Наукова думка», К., 1965.

6. Л. Д. Кудрявцев. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложение к ре[illegible] нию вариационным методом эллиптических уравнений. Труды матем. ин-та им. В. А. Ст[illegible] лова. Изд-во АН СССР, М., 1959.

*Поступила 22 июня 1967*