Вып. 6 1968

КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА—ГАЛЬПЕРНА

В. М. Борок

Рассмотрим уравнения вида

$$P\left(\Delta, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-p_k}^{q_k} \frac{d^k u(x + jh, t)}{dt^k} = 0.$$

$-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$, $p_k, q_k \geqslant 0$, a_{kj} — постоянные, т. е. диффер циальные по временной переменной t и разностные по пространствен переменной x линейные уравнения с постоянными коэффициента К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$D_t^j u(x, 0) = 0, \; j = 0, \ldots, n-1, \; -\infty < x < \infty.$$

Нас будет интересовать вопрос, какие оценки решения $u(x, t)$ зад (1) — (2) при $t > 0$ и $-\infty < x < \infty$ (или $x \geqslant 0$, или $x \leqslant 0$) дают возм ность заключить, что $u(x, t) \equiv 0$, $t > 0$.

Задачу Коши для общих линейных дифференциальных уравне

$$\sum_{\substack{0 \leqslant m \leqslant M \\ 0 \leqslant n \leqslant N}} a_{mn} \frac{\partial^{m+n} u(x, t)}{\partial t^m \partial x^n} = 0$$

(и систем таких уравнений) при тех или иных ограничениях изу С. Л. Соболев [1], С. А. Гальперн [2] и др. А. Г. Костюченко, Г. И. Э [3, 4]. В [5] исследован вопрос о классах единственности решения за Коши для любого уравнения вида (3). Настоящая работа посвящ исследованию того же вопроса для разностного аналога уравнения который, очевидно, всегда может быть записан в виде (1).

Для уравнений вида (1) в случае $p_n = q_n = 0$ достаточные усл единственности решения задачи Коши в широких классах функций получены в ряде работ Л. И. Камынина [6] и др. и Б. Л. Гуревиче (см. также [8]).

Не уменьшая общности, можно считать в уравнении (1) $h = 1$, $= 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Кроме того, учитывая (2), мы всегда можем пола что многочлен $P(s, \lambda)$ нельзя представить в виде

$$P(s, \lambda) = P_1(\lambda) P_2(s, \lambda),$$

где $P_1(\lambda)$ и $P_2(s, \lambda)$ — многочлены, $P_1(\lambda) \not\equiv \text{const}$.

Пусть $s_1(\lambda), \ldots, s_N(\lambda)$ — корни многочлена

$$P(s, \lambda) \equiv \sum_{k=0}^{n} P_k(s) \lambda^k \equiv \sum_{j=0}^{N} Q_j(\lambda) s^j.$$

окрестности бесконечно удаленной точки эти корни имеют вид [9]:

$$s_j(\lambda) = a_j\lambda^{\gamma_j} + a_j'\lambda^{\gamma_j'} + a_j''\lambda^{\gamma_j''} + \dots \tag{5}$$

$$\gamma_j > \gamma_j' > \gamma_j'' > \dots,\ j = 1, \dots, N,\ a_j \neq 0.$$

Разобьем исследование на следующие случаи:

I. $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \gamma_j = \Gamma_1 > 0$

II. $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \gamma_j = \Gamma_2 < 0$

III. $\Gamma_1 = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \gamma_j < 0 < \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \gamma_j = \Gamma_2,\ \min\limits_{1\leqslant j\leqslant N} |\gamma_j| > 0.$

IV. $\prod\limits_{j=1}^{N} \gamma_j = 0,\quad \prod\limits_{j;\ \gamma_j=0} \ln|a_j| \neq 0.$

V. $\prod\limits_{j=1}^{N} \gamma_j = 0,\quad \prod\limits_{j;\ \gamma_j=0} \ln|a_j| = 0,\quad \prod\limits_{j;\ \gamma_j=0\wedge|a_j|=1} a_j' \neq 0.$

VI. Имеются корни $s_j(\lambda)$ вида $s_j(\lambda) \equiv s_j (= \text{const}),\ |s_j| = 1.$

Исследование диаграммы Ньютона [9] для многочлена $P(s, \lambda)$ покажет, что случай I имеет место тогда и только тогда, когда многочлен $Q_0(\lambda)$ (см. (4)) имеет степень n, а степени многочленов $Q_1(\lambda), \dots,$ $Q_N(\lambda)$ меньше n, то есть когда уравнение (1) можно решить относительно старшей производной по t ($P_n(s) \equiv \text{const}$).

Случай II осуществляется тогда и только тогда, когда многочлен $Q_N(\lambda)$ имеет степень n, а степени многочленов $Q_0(\lambda), \dots, Q_{N-1}(\lambda)$ мень- Это означает, что уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^n u(x+m, t)}{\partial t^n} = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ 0\leqslant l\leqslant m-1}} a_{kl} \frac{\partial^k u(x+l, t)}{\partial t^k}.$$

Случай III осуществляется тогда и только тогда, когда при некотором j_0 $(1 \leqslant j_0 \leqslant N-1)$ степень многочлена $Q_{j_0}(\lambda)$ равна n, а степени многочленов $Q_j(\lambda)$, $j \neq j_0$, меньше n.

В случаях IV—VI среди многочленов $Q_0(\lambda), \dots, Q_N(\lambda)$ по крайней мере два имеют степень n. При этом случай VI характеризуется возможностью представить $P(s, \lambda)$ в виде $P(s, \lambda) \equiv P(s) P_2(s, \lambda)$, причем многочлен $P(s)$ имеет корень, равный по модулю единице.

Случаи IV и V различаются следующим образом.

Пусть $Q_{j_0}(\lambda), \dots, Q_{j_k}(\lambda)$, $0 \leqslant j_0 < \dots < j_k \leqslant N$, — многочлены степени n, $A_{j_0}, \dots, A_{j_k}$ — их коэффициенты при λ^n. Случай IV характеризуется тем, что многочлен

$$A_{j_0} + A_{j_1} y^{j_1-j_0} + \dots + A_{j_k} y^{j_k-j_0}$$

не имеет корней, по модулю равных 1. В случае V такие корни имеются, и многочлен $P(s, \lambda)$ допускает представление $P(s, \lambda) \equiv P_1(s) P_2(s, \lambda)$; многочлен $P_1(s)$ не имеет корней, равных единице по модулю.

Доказательство всех этих утверждений непосредственно вытекает из диаграммы Ньютона.

Мы будем рассматривать только те решения задачи (1)—(2), которые имеют нормальный тип по t, т. е. решения $u(x, t)$, которые, как и их производные, входящие в уравнение (1), растут при $t \to \infty$ не быстрее функции $\exp\{\beta t\}$ с каким-либо $\beta > 0$.

Теорема 1. *В случае I для единственности решения задачи К*[о]
(1)—(2) в классе функций

$$|u(x, t)| \leqslant C\exp\left\{\beta t + \int_0^x f(\xi)\,d\xi\right\},$$

$x \geqslant 0,\ t \geqslant 0,\ \beta > 0,\ f(\xi)$ — возрастающая непрерывная функция, необ[хо]димо и достаточно, чтобы

$$\int_1^\infty \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(\xi)\right\} d\xi = \infty.$$

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ — преобразование Лапласа [ре]шения $u(x, t)$ (по t). Тогда

$$P(\Delta, \lambda)\, y(x, \lambda) = 0,$$

и, следуя идее Хилла [10], нужно установить, что условие (7) являе[тся] необходимым и достаточным для того, чтобы всякое аналитическое [при] $\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$ решение уравнения (8), удовлетворяющее оценке

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C\exp\left\{\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right\},\quad x \geqslant 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0 \geqslant \beta$$

было тождественно равно нулю.

Достаточность. Пусть $y_1(x, \lambda), \ldots, y_N(x, \lambda)$ — фундаментальная [си]стема решений уравнения (8), а $y(x, \lambda)$ — решение этого уравнения, ана[ли]тическое при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$ и удовлетворяющее условию (9). Это реше[ние] может быть записано в виде

$$y(x, \lambda) \equiv \sum_{k=1}^N c_k(x - [x], \lambda)\, y_k(x, \lambda),\quad -\infty < x < \infty.$$

Заменяя в (10) x на $x + j$ $(j = 1, 2, \ldots, N-1)$ и решая относите[ль]но c_k получившуюся систему N уравнений, получим

$$c_k \equiv W^{-1}(x, \lambda)\, W_k(x, \lambda),\quad x \geqslant 0,\ 1 \leqslant k \leqslant N,$$

где

$$W(x, \lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) \ldots\ldots\ldots y_N(x, \lambda) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1(x+N-1, \lambda) \ldots y_N(x+N-1, \lambda) \end{vmatrix} = \left[\prod_{k=1}^N s_k(\lambda)\right]^x W(0,$$

а $W_k(x, \lambda)$ получается из $W(x, \lambda)$ заменой k-го столбца на столбец фу[нк]ций $y(x, \lambda), \ldots, y(x + N - 1, \lambda)$.

Из (11) и (12), учитывая (9), получаем

$$|c_k(x - [x], \lambda)| \leqslant C\,|s_k(\lambda)|^{-x}\,|\lambda|^{M_1}(1 + x)^{M_2}\exp\left\{\int_0^{x+N-1} f(\xi)\,d\xi\right\}$$

$$M_1,\ M_2 \geqslant 0,\ x \geqslant 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0,$$

или, обозначая $y = x + N - 1$, получим

$$|c_k| \leqslant c\,|\lambda|^{M_3}(1 + y)^{M_2}\exp\left\{-y\ln|s_k(\lambda)| + \int_0^y f(\xi)\,d\xi\right\},$$

$$M_2,\ M_3 \geqslant 0,\ \mathrm{Re}\lambda \geqslant \sigma_0,\ y \geqslant N-1,\ 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Положим здесь $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $y = y(\tau)$, где $y(\tau)$ определим из соотношения $y(\tau) = x + [\varphi(\tau) - x]$,

$$f(\varphi(\tau)) \equiv \Gamma_1 \ln|\tau| + b, \quad b < \min_{1 \leqslant k \leqslant N} \ln|a_k|. \tag{14}$$

Тогда из (13) получим

$$|c_k(\lambda)| \leqslant c|\lambda|^{M_3}(1 + y(\tau))^{M_2} \exp\left\{-y(\tau)\ln|s_k(\lambda)| + \int\limits_0^{y(\tau)} f(\xi)\,d\xi\right\}. \tag{15}$$

Но, поскольку $|s_k(\lambda)| = |a_k||\tau|^{\gamma_k}(1 + o(1))$, $o(1) \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0$,

$$\ln|s_k(\lambda)| = \gamma_k \ln|\tau| + \ln|a_k| + o(1) > \gamma_k \ln|\tau| + b_1$$

($b_1 > b$) при достаточно больших значениях $|\tau|$. Отсюда, учитывая (14), получим

$$\exp\left\{-y(\tau)\ln|s_k(\lambda)| + \int\limits_0^{y(\tau)} f(\xi)\,d\xi\right\} \leqslant \exp\{-y(\tau)\gamma_k \ln|\tau| -$$
$$- b_1 y(\tau) + y(\tau)[\Gamma_1 \ln|\tau| + b]\} \leqslant \exp\{-(b_1 - b)\,y(\tau)\}.$$

Возвращаясь к (15), получим при достаточно больших значениях $|\tau|$

$$|c_k| \leqslant c|\lambda|^{M_3}(1 + y(\tau))^{M_2}\exp\{-\gamma y(\tau)\}, \quad \gamma > 0, \quad \lambda = \sigma_0 + i\tau. \tag{16}$$

Покажем, что

$$\int^{\infty} \tau^{-2} y(\tau)\,d\tau = \infty \tag{17}$$

или, что равносильно,

$$\int^{\infty} \tau^{-2}\varphi(\tau)\,d\tau = \infty.$$

Действительно,

$$\int\limits_1^{\infty} \tau^{-2}\varphi(\tau)\,d\tau = \lim_{A \to \infty}\int\limits_1^{A} \tau^{-2}\varphi(\tau)\,d\tau = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\Gamma_1}\int\limits_{\varphi(1)}^{\varphi(A)} y f'(y)\, e^{-\frac{1}{\Gamma_1}f(y)}\,dy =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\Gamma_1}\left[-\Gamma_1 y e^{-\frac{1}{\Gamma_1}f(y)}\Big|_{\varphi(1)}^{\varphi(A)} + \Gamma_1\int\limits_{\varphi(1)}^{\varphi(A)}\exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1}f(y)\right\}dy\right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{\varphi(A)}{A}\right] + c_1 + \int\limits_{\varphi(1)}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1}f(y)\right\}dy = \infty,$$

так как, учитывая (7), можно, не уменьшая общности, считать $f(y) \geqslant \Gamma_1 \ln y$ при достаточно больших значениях y, откуда $\varphi(A) \leqslant A$ при больших значениях A. Тем самым доказана справедливость (17).

Поскольку

$$|y_k(x, \lambda)| \leqslant (1 + x)^{M_1}|s_k(\lambda)|^x = (1 + x)^{M_2}\exp\{x\ln|s_k(\lambda)|\},$$

получаем из (10) и (16)

$$|y(x, \lambda)| \leqslant c_3(1 + x)^{M_2}|\lambda|^M \exp\{-\gamma y(\tau) + x[\max_k \gamma_k \ln|\tau| + c_4]\},$$
$$\lambda = \sigma_0 + i\tau$$

Учитывая (17), получаем отсюда, что при любом $x > 0$

$$\int^{\infty} \tau^{-2}\ln|y(x, \sigma_0 + i\tau)|\,d\tau = \infty. \tag{18}$$

В то же время из (9) вытекает ограниченность при каждом $x > 0$ функции $y(x, \lambda)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$. Учитывая (18) и аналитичность $y(x, \lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, заключаем [11], что $y(x, \lambda) \equiv 0$.

Необходимость. Нужно показать, что при нарушении (7) существует решение $y(x, \lambda)$ уравнения (8), $y(x, \lambda) \not\equiv 0$, аналитическое в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ и удовлетворяющее в ней условию (9).

Пусть $s_j(\lambda) = a_j\lambda^{\Gamma_1}(1 + o(1))$. Функция $y(x, \lambda) = C(\lambda)[s_j(\lambda)]^x$ удовлеряет нужным условиям, если $C(\lambda) \not\equiv 0$ — подобранная соответствую образом аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ функция. Чтобы указать усло которым должна удовлетворять функция $C(\lambda)$, оценим функцию

$$G(\lambda) = \sup_{x \geqslant 0} |s_j(\lambda)|^x \exp\left\{-\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right\};$$

$$G(\lambda) \leqslant \sup_{x \geqslant 0} \exp\left\{\int_0^x (\Gamma_1 \ln|\lambda| + C - f(\xi))\,d\xi\right\},$$

где $C > \ln|a_j|$, и последнее неравенство справедливо при всех достато больших значениях $|\lambda|$. Полагая

$$f(x(r)) \equiv \Gamma_1 \ln r + C,$$

получим из (19)

$$0 \leqslant G(\lambda) \leqslant \exp \int_0^{x(|\lambda|)} [\Gamma_1 \ln|\lambda| + C - f(\xi)]\,d\xi \overset{\text{def}}{\equiv} \exp F(|\lambda|).$$

Покажем, что

$$\int_1^\infty r^{-2} F(r)\,dr < \infty.$$

Запишем функцию $F(r)$ в виде

$$F(r) = \int_0^{x(r)} [\Gamma_1 \ln r - f(\xi)]\,d\xi + Cx(r).$$

Поскольку

$$\int_1^\infty r^{-2} x(r)\,dr = \frac{1}{\Gamma_1}\int_{x(1)}^\infty y f'(y) \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1}(f(y) - C)\right\} dy =$$

$$= \exp\left\{\frac{C}{\Gamma_1}\right\}\left[-y \exp\left\{-\frac{f(y)}{\Gamma_1}\right\}\Bigg|_1^\infty - \int_1^\infty \exp\left\{-\frac{f(y)}{\Gamma_1}\right\} dy\right] < \infty$$

(так как $y \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(y)\right\} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$)) в силу нарушения (7), то условие равносильно сходимости интеграла

$$I = \int_1^\infty r^{-2} \int_0^{x(r)} [\Gamma_1 \ln r - f(\xi)]\,d\xi\,dr,$$

который можно записать следующим образом:

$$I = \lim_{A\to\infty}\left[\Gamma_1 \int_1^A r^{-2} \ln r \cdot x(r)\,dr - \int_1^A r^{-2} \int_0^{x(r)} f(\xi)\,d\xi\,dr\right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty} [\Gamma_1 I_1(A) - I_2(A)].$$

Преобразуем каждый из интегралов $I_1(A)$ и $I_2(A)$:

$$I_1(A) = \Gamma_1^{-2} \exp\left\{\frac{C}{\Gamma_1}\right\} \int_{x(1)}^{x(A)} (f(y) - C) f'(y) \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(y)\right\} dy =$$

$$= \Gamma_1^{-2} \exp\left\{\frac{C}{\Gamma_1}\right\}\left[\int_{x(1)}^{x(A)} y f(y) f'(y) \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(y)\right\} dy - \right.$$

$$\left. - C \int_{x(1)}^{x(A)} y f'(y) \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(y)\right\} dy\right].$$

В силу сходимости интеграла в (7) второй из получившихся интегралов имеет конечный предел при $A \to \infty$ (чтобы в этом убедиться, достаточно проинтегрировать по частям). Обозначая $I_3(A)$ и $I_4(A)$ интегралы в правой части (24), получим

$$I_1(A) = \Gamma_1^{-2} \exp\left\{\frac{C}{\Gamma_1}\right\} \cdot I_3(A) + I_4(A), \tag{25}$$

где $I_4(A) \to I_4 = \mathrm{const}$ при $A \to \infty$, а I_3 преобразуем дальше. Интегрируя по частям, получим

$$I_3(A) = \left[-\Gamma_1 y f(y) \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(y)\right\} - \Gamma_1^2 y \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(y)\right\}\right]_{x(1)}^{x(A)} +$$

$$+ \Gamma_1 \int\limits_{x(1)}^{x(A)} f(y) \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(y)\right\} dy + \Gamma_1^2 \int\limits_{x(1)}^{x(A)} \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(y)\right\} dy =$$

$$= -\frac{1}{A} \Gamma_1^2 x(A) \ln A \exp\left\{-\frac{C}{\Gamma_1}\right\} + \Gamma_1 \int\limits_{x(1)}^{x(A)} f(y) \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(y)\right\} dy + I_5(A),$$

где $I_5(A)$ имеет конечный предел при $A \to \infty$. Подставляя в (25), получим

$$I_1(A) = -\frac{x(A) \ln A}{A} + \frac{1}{\Gamma_1} \exp\left\{\frac{C}{\Gamma_1}\right\} \int\limits_{x(1)}^{x(A)} f(y) \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(y)\right\} dy + I_6(A),$$

$$I_6(A) \to I_6 = \mathrm{const} \text{ при } A \to \infty. \tag{26}$$

Преобразуем интеграл $I_2(A)$:

$$I_2(A) = \int\limits_1^A r^{-2} dr \cdot \int\limits_0^{x(1)} f(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x(1)}^{x(A)} f(\xi) \int\limits_{g(\xi)}^{A} r^{-2} dr\, d\xi,$$

где $g(\xi) = \exp\left\{\frac{1}{\Gamma_1} [f(\xi) - C]\right\}$ — функция, обратная k $x(\xi)$, см. (20). Следовательно,

$$I_2(A) = \left(1 - \frac{1}{A}\right) \int\limits_0^{x(1)} f(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x(1)}^{x(A)} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} d\xi - \frac{1}{A} \int\limits_{x(1)}^{x(A)} f(\xi)\, d\xi. \tag{27}$$

Последние два интеграла в (27) обозначим соответственно $I_7(A)$ и $I_8(A)$. Имеем

$$I_7(A) = \int\limits_{x(1)}^{x(A)} f(\xi) \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma_1} f(\xi)\right\} d\xi \cdot \exp\left\{\frac{C}{\Gamma_1}\right\};$$

$$I_8(A) = \frac{1}{A} \int\limits_{x(1)}^{x(A)} f(\xi)\, d\xi \leqslant \frac{1}{A} (\Gamma_1 \ln A + C)\, x(A).$$

Возвращаясь к (23) и учитывая (26) и (27), получим, что выражение в правой части (23) имеет конечный предел, откуда вытекает справедливость (22). Подберем теперь функцию $C(\lambda)$, аналитическую при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ и такую, что

$$|C(\lambda)| \leqslant \exp\{-F(|\lambda|)\}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0. \tag{28}$$

Возможность выбора такой функции $C(\lambda)$, отличной от тождественно нуля, обеспечена [11] выполнением условия (22). Решение $y(x, \lambda) = C(\lambda)[s_j(\lambda)]^x$ удовлетворяет при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ условию (9).

Замечание 1. Условие (6) в теореме 1 ограничивает рост решения $u(x, t)$ по x при $x \geqslant 0$. Очевидно, заменить $x \geqslant 0$ на $x \leqslant 0$ в формулировке этой теоремы нельзя. Условие, необходимое и достаточное для единственности решения задачи Коши (1) — (2) в классе функций, удовлетворяющих оценке (6) при $x \leqslant 0$/$f(x) \geqslant 0$ — убывающая при $x <$ функция/, состоит в том, что

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty. \quad (29)$$

Действительно, если выполнено (29), то, устремляя в неравенстве (13), справедливом при достаточно больших по модулю и отрицательных значениях y, y к $-\infty$, получим, что $c_k(\lambda) \equiv 0$. Если же (29) не выполнено, то любая из функций $y_k(x, \lambda) = [s_k(\lambda)]^x$ при достаточно больших значениях $|\lambda|$, очевидно, удовлетворяет оценке

$$|y_k(x, \lambda)| \leqslant \exp\left\{\left|\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right|\right\}, \quad x \leqslant 0,$$

откуда, как и в теореме 1, вытекает отсутствие единственности решения задачи Коши в соответствующем классе.

Теорема 2. *В случае II для единственности решения задачи Коши (1) — (2) в классе функций*

$$|u(x, t)| \leqslant C\exp\left\{\beta t + \int_x^0 f(\xi)\,d\xi\right\}, \quad (30)$$

$\beta > 0$, $x \leqslant 0$, $t \geqslant 0$, $f(x) > 0$ — убывающая при $x < 0$ функция, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty} \exp\left\{-\frac{1}{|\Gamma_2|} f(\xi)\right\} d\xi = \infty.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 2. В классе функций, удовлетворяющих оценке (30) при $x \geqslant 0$ (с возрастающей при $x > 0$ функцией $f(x) \geqslant 0$) задача Коши (1) — (2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty.$$

Доказательство этого предложения аналогично проведенному в замечании 1.

Теорема 3. *В случае III для единственности решения задачи Коши (1) — (2) в классе функций, удовлетворяющих оценке*

$$|u(x, t)| \leqslant C\exp\left\{\beta t + \left|\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right|\right\},$$

$\beta > 0$, $t \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$, $f(x) \geqslant 0$ *возрастает при* $x \geqslant x_0 \geqslant 0$ *и убывает при* $x \leqslant -x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия*

$$\int^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\alpha} f(\xi)\right\} d\xi = \infty, \quad \int_{-\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\beta} f(\xi)\right\} d\xi = \infty, \quad (31)$$

$$\alpha = \min_{j:\gamma_j>0} \gamma_j, \quad \beta = \min_{j:\gamma_j<0} |\gamma_j|.$$

Доказательство. Нужно показать, что условие (31) является необходимым и достаточным для того, чтобы всякое аналитическое при $\mathrm{Re}\,\lambda > \sigma_0$ и удовлетворяющее условию

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C \exp\left\{\left|\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right|\right\}, \quad -\infty < x < \infty \tag{32}$$

решение уравнения (8) тождественно равнялось нулю.

Достаточность. Пусть (31) имеет место и пусть $y_1(x, \lambda), \ldots, y_N(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения (8). Имеет место тождество (10), и, как в доказательстве теоремы 1, приходим к оценке типа

$$|c_k(y-[y], (\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{M_3}(1+|y|)^{M_2}\exp\left\{-y\ln|s_k(\lambda)| + \left|\int_0^y f(\xi)\,d\xi\right|\right\}, \tag{33}$$

$$M_2,\ M_3 \geqslant 0,\ -\infty < y < \infty,\ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0,\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

Если $\gamma_k > 0$, то в (33) следует положить $y = y(\tau)$, определив $y(\tau)$ соотношением $y(\tau) = x + [\varphi(\tau) - x]$,

$$f(\varphi(\tau)) \equiv \alpha\ln|\tau| + b,\ b < \ln|a_k|,\ \varphi(\tau) > 0,$$

после чего придем к оценке (16).

Если же $\gamma_k < 0$, то в (33) следует положить $y = y(\tau)$, определив $y(\tau)$ соотношением $y(\tau) = x + [\varphi(\tau) - x]$,

$$f(\varphi(\tau)) \equiv \beta\ln|\tau| + b_1,\ b_1 < -|\ln|a_k||,\ \varphi(\tau) < 0,$$

что снова приведет к оценке типа (16) с заменой $y(\tau)$ на $|y(\tau)|$. Далее доказательство единственности проходит по схеме доказательства теоремы 1.

Необходимость. Пусть не выполнено, например, первое из условий (31). Рассмотрим функцию $y(x, \lambda)$, построенную при доказательстве необходимости условия (7) в теореме 1. Эта функция удовлетворяет оценке (32) при $x > 0$. При $x < 0$ имеем: $|y(x, \lambda)| = |C(\lambda)||s_j(\lambda)|^x \leqslant |C(\lambda)|$, так как $|s_j(\lambda)| \geqslant 1$ (при достаточно больших значениях $|\lambda|$) — в силу того, что $\gamma_j > 0$. Учитывая теперь (28) и (21), получаем $|y(x, \lambda)| \leqslant 1$ при $x < 0$, т. е. оценка (32) имеет место для $y(x, \lambda)$ при всех значениях x.

Замечание 3. Рассмотрим, в частности, уравнение вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=-m}^{n} a_k u(x+k, t),\ n,\ m \geqslant 0,\ a_{-m} \neq 0,\ a_n \neq 0. \tag{34}$$

Применяя к этому уравнению теорему единственности из [8], получим, что единственность решения задачи Коши для (34) имеет место в классе функций, растущих при $|x| \to \infty$ не быстрее, чем $\exp(b|x|\ln|x|)$ при $b < \dfrac{1}{\max(m, n)}$.

Применение теоремы 3 к уравнению (34) дает более точный результат. Обозначая $u(x-m, t) \equiv v(x, t)$, запишем (34) в виде

$$\Delta^m \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{n+m} a_{k-m}\Delta^k v(x, t).$$

Соответствующее уравнение (4) имеет вид

$$s^m\lambda = \sum_{k=0}^{n+m} a_{k-m}s^k,$$

а его корни $s_1(\lambda), \ldots, s_{n+m}(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$

$$s_j(\lambda) = a_j\lambda^{\frac{1}{n}}(1+o(1)),\ a_j \neq 0,\ j = 1, \ldots, n;$$

$$s_{n+j}(\lambda) = b_j\lambda^{-\frac{1}{m}}(1+o(1)),\ b_j \neq 0,\ j = 1, \ldots, m;$$

$$o(1) \to 0 \text{ при } |\lambda| \to \infty.$$

Таким образом, для уравнения (34) справедлив результат теорем с $\alpha = \frac{1}{n}$, $\beta = \frac{1}{m}$, что приводит к более широким классам единственно чем в приведенном выше результате из [8].

Перейдем к рассмотрению случая IV.

Обозначим

$$A = \min_{j;\ \gamma_j = 0} |\ln|a_j||.$$

Очевидно, в случае IV $A > 0$.

Теорема 4. *В случае IV в классе функций*

$$|u(x, t)| \leqslant C\exp\{\beta t + a|x|\},\ -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0,\ \beta > 0$$

единственность решения задачи Коши (1) — (2) имеет место, если $< A$, *и нарушается при* $a < A$.

Доказательство. Пусть $y_1(x, \lambda), \ldots, y_N(x, \lambda)$ — фундамент ная система решений уравнения (8); $y(x, \lambda) \equiv \sum_{j=1}^{N} c_j(x-[x], \lambda)\, y_j(x,$ аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ решение этого уравнения, удовлетворяю оценке

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C\exp\{a|x|\},\ a < A,\ -\infty < x < \infty,\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0.$$

Аналогично (13), используя (36), получим

$$|c_j| \leqslant C|\lambda|^{M_1}(1+|x|)^{M_2}\exp\{-x\ln|s_j(\lambda)| + a|x|\}.$$

Пусть сначала j таково, что $\gamma_j > 0$. Тогда при достаточно боль значениях $|\lambda|$ (таких, что $\ln|s_j(\lambda)| > a$), устремляя в (37) x к $+\infty$, лучим $c_j(x-[x], \lambda) \equiv 0$. Если $\gamma_j < 0$, то в (37) следует устремит к $-\infty$, и также получим $c_j(x-[x], \lambda) \equiv 0$ (при достаточно боль значениях $|\lambda|$).

Пусть теперь $\gamma_j = 0$. Тогда, также при больших $|\lambda|$, $|\ln|s_j(\lambda)|$ $= |\ln|a_j(1+o(1))|| > a$; выбирая $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign}\ln|a_j|$ и устремляя $|$ бесконечности, вновь получим $c_j(x-[x], \lambda) \equiv 0$. Таким образом $(x, \lambda) \equiv 0$.

Пусть теперь $a > A$ и j_0 таково, что $\gamma_{j_0} = 0$, $|\ln|a_{j_0}|| = A$. Расс рим функцию $y(x, \lambda) = [s_{j_0}(\lambda)]^x$. Имеем

$$|y(x, \lambda)|\exp\{-a|x|\} = \exp\{-a|x| + x\ln|s_{j_0}(\lambda)|\}.$$

Если $\operatorname{sign}\{x\ln|a_{j_0}|\} = -1$, то $|y(x, \lambda)| \leqslant \exp\{a|x|\}$ при достат больших значениях $\operatorname{Re}\lambda$; если же $\operatorname{sign}\{x\ln|a_{j_0}|\} = +1$, то $x\ln|a_j$ $= |x||\ln|a_{j_0}||$ и $x\ln|s_{j_0}(\lambda)| = |x|\cdot A + xo(1)$ ($o(1) \to 0$ при $|\lambda| \to$ потому снова $|y(x, \lambda)| \leqslant \exp\{a|x|\}$ при достаточно больших значен $\operatorname{Re}\lambda$.

Замечание 4. При $a = A$ в классе (35) единственность решения задачи Коши имеет место для некоторых уравнений, относящихся к случаю IV, и нарушается для других уравнений этого типа. В качестве примера рассмотрим уравнения

1) $$\frac{\partial u(x+1,\ t)}{\partial t} - 2\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = u(x,\ t);$$

2) $$\frac{\partial u(x+1,\ t)}{\partial t} - 2\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = -u(x,\ t).$$

Оба эти уравнения относятся к случаю IV и для обоих уравнений $A = \ln 2 \left(s(\lambda) = 2 + \frac{1}{\lambda}\right.$ в уравнении 1 и $\left.s(\lambda) = 2 - \frac{1}{\lambda}\right.$ в уравнении $\left.2\right)$. Однако для первого уравнения имеет место единственность решения задачи Коши в классе функций (35) с $a = \ln 2$, а для второго уравнения она нарушается.

Теорема 5. *В случае V для единственности решения задачи Коши (1) — (2) в классе функций*

$$|u(x,\ t)| \leqslant C\exp\{\beta t + |x|\, H(|x|)\},\ \beta > 0,\ -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0, \tag{38}$$

где $H(x) > 0$ — непрерывная и монотонная при $x > 0$ функция, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{x>0} H(x) = 0. \tag{39}$$

Доказательство. Пусть (39) выполнено. Оценка типа (13) имеет в данном случае вид

$$|c_k(y-[y],\ \lambda)| \leqslant C|\lambda|^{M_1}(1+|y|)^{M_2}\exp\{-y\ln|s_k(\lambda)| + |y|\, H(|y|)\}, \tag{40}$$

$$-\infty < y < \infty,\ M_1,\ M_2 \geqslant 0,\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Если $\gamma_k > 0$ $(\gamma_k < 0)$, то, выбирая $y \to +\infty\ (-\infty)$, получим $c_k(y-[y],\ \lambda) \equiv 0$. Если $\gamma_k = 0$, $|a_k| \neq 1$, то при $y\ln|a_k| = |y|\,|\ln|a_k||$, учитывая (39), и устремляя $|y|$ к ∞, вновь получим $c_k(y-[y],\ \lambda) \equiv 0$. Если $\gamma_k = 0$, $|a_k| = 1$, то

$$s_k(\lambda) = \exp\{i\varphi_k\} + a'_k\lambda^{\gamma'_k}\cdot(1+o(1)),\ a'_k \neq 0,\ \gamma'_k < 0.$$

Тогда $|\ln|s_k(\lambda)|| = |\ln|1 + a'_k\exp\{-i\varphi_k\}\lambda^{\gamma'_k}(1+o(1))|| \geqslant \frac{1}{2}|a'_k|\,|\lambda|^{\gamma'_k}$ (при достаточно большом σ_0). Поэтому, фиксируя λ и выбирая знак y так, чтобы $y\ln|s_k(\lambda)| = |y|\,|\ln|s_k(\lambda)||$, получим $-y\ln|s_k(\lambda)| \leqslant -\frac{1}{2}|y|\,|a_k|\,|\lambda|^{\gamma'_k}$. Из (39) и (40) заключим тогда, что $c_k(y-[y],\lambda) \equiv 0$ и в этом случае.

Пусть теперь (39) не выполнено: $\inf H(x) = h > 0$. Покажем, что существует решение $u(x,\ t) \not\equiv 0$ задачи (1) — (2), удовлетворяющее при некотором $\beta > 0$ условию

$$|u(x,\ t)| \leqslant C\exp\{\beta t + h|x|\},\ -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0. \tag{41}$$

Действительно, пусть k таково, что $s_k(\lambda) = \exp\{i\varphi\} + a'_k\lambda^{\gamma'_k}(1+o(1))$, $a'_k \neq 0$, $\gamma'_k < 0$. Рассмотрим функцию $y(x,\ \lambda) = [s_k(\lambda)]^x$. Для нее справедлива оценка $|y(x,\ \lambda)| = \exp\{x\ln|s_k(\lambda)|\} \leqslant \exp\{h|x|\}$, так как при достаточно больших значениях $\operatorname{Re}\lambda$ имеем $\ln|s_k(\lambda)| \leqslant 2|a'_k|\,|\lambda|^{\gamma'_k} < h$. Отсюда вытекает существование решения $u(x,\ t)$ задачи (1) — (2), удовлетворяющего (41).

Теорема 6. *В случае VI для единственности решения задачи Ко*
(1) — (2) в классе функций

$$|u(x, t)| \leqslant \alpha(|x|)\exp\{\beta t\}, \quad \beta \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\alpha(x) > 0$ — *монотонная непрерывная функция, необходимо и дос*
точно, чтобы

$$\inf_{x \geqslant 0} \alpha(x) = 0.$$

Доказательство. Неравенство (13) в рассматриваемом слу
имеет вид

$$|c_k(x-[x], \lambda)| \leqslant C|\lambda|^{M_2}(1+|x|)^{M_3}\alpha(x)\exp\{-x\ln|s_k(\lambda)|\}.$$

Если при $\lambda = \lambda_0$ $\ln|s_k(\lambda_0)| \neq 0$, то из (44) следует, что $c_k(\lambda_0) =$
В силу аналитичности $s_k(\lambda)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$ (при достато
большом σ_0), почти всюду в этой полуплоскости $|s_k(\lambda)| \neq 1$ (если $s_k(\lambda)$
$\not\equiv \mathrm{const}$) и потому $c_k(\lambda) = 0$. Итак, функция $y(x, \lambda)$ почти всюду в
луплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$ является линейной комбинацией функций в
$\exp\{i\varphi_j x\}$ и их произведений на степени x. Но тогда оценка $|y(x, \lambda)|$
$\leqslant C\alpha(|x|)$ с учетом (43) возможна лишь, если $y(x, \lambda) \equiv 0$.

Если условие (43) не выполнено, т. е. $\inf_x \alpha(|x|) = \alpha > 0$, то фу
ция $u(x, t) = Ct^\gamma \exp\{i\varphi x\}$, $\gamma > 0$, где $\exp\{i\varphi\}$ — корень уравнения
при некотором C дает пример нетривиального решения уравнения
удовлетворяющего условию (42).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев. Об одной новой задаче математической физики. И
АН СССР, сер. матем., 18, № 1, 1954.

2. С. А. Гальперн. Задача Коши для общих систем линейных уравнени
частными производными. ДАН СССР, т. 119, № 4, (1958).

3. А. Г. Костюченко, Г. И. Эскин. Задача Коши для уравнений Со
лева — Гальперна. Труды Моск. матем. об-ва, т. 10, 1961.

4. Г. И. Эскин. О единственности решения задачи Коши для уравнений
типа Ковалевской. Труды Моск. матем. об-ва, т. 10, 1961.

5. В. М. Борок. О задаче Коши для общих линейных уравнений. ДАН СС
т. 177, № 4, (1967).

6. Л. И. Каминин. О единственности решения задачи Коши в классе быс
растущих функций для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных урав
ний. ДАН СССР, т. 103, № 4 (1955).

7. Б. Л. Гуревич. Новые типы пространств основных и обобщенных функ
и задача Коши для систем дифференциально-разностных уравнений. ДАН СС
т. 108, 1001—1003 (1956).

8. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции, вып. 3. Нек
рые вопросы теории дифференциальных уравнений. Физматгиз, М., 1958, стр. 106—

9. Н. Г. Чеботарев. Теория алгебраических функций. Гостехиздат, М. —
1948.

10. E. Hille. An abstract formulation of Caushy's problem. Camtes Rendus
Dausilme Congress des Mathmaticiens Scandinaves, Lund, 1953.

11. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовател
стей. Применения. Изд-во иностр. лит., М., 1955.

Поступила 14 апреля 1967 г.