Вып. 6 1968

ОПЕРАТОРНЫЕ ШАРЫ

Ю. Л. Шмульян

Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства. Через $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ будем обозначать класс линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Если A — оператор $\in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, то через $\mathfrak{Z}(A)\,(\subset \mathfrak{H}_1)$ будем обозначать множество аннулируемых им векторов, через $\mathfrak{R}(A)\,(\subset \mathfrak{H}_2)$ — множество его значений.

Через $\mathfrak{K}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ ($\mathfrak{K}^\circ(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$) обозначим множество операторов $\in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ с нормой $\leqslant 1$ (< 1). В символах $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, $\mathfrak{K}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ и $\mathfrak{K}^\circ(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ мы будем опускать обозначения пространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, если это не вызывает недоразумений.

Множество $\mathfrak{K}$ является единичным замкнутым гипершаром в $\mathfrak{B}$, множество $\mathfrak{K}^\circ$ — внутренностью $\mathfrak{K}$ в равномерной топологии.

Пусть $Ц \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$.

Определение 1. *Множество $Ц + A\mathfrak{K}B$ будем называть (замкнутым) операторным шаром и обозначать через $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$.*

Всякий замкнутый операторный шар является выпуклым ограниченным множеством, бикомпактным в слабой топологии [1] *и, следовательно, замкнутым в слабой топологии множеством.*

Определение 2. *Множество $Ц + A\mathfrak{K}^\circ B$ будем называть «открытым» операторным шаром и обозначать через $\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B)$.*

Слово «открытый» заключено в кавычки, поскольку, вообще говоря, $\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B)$ не является открытым множеством и даже относительно открытым в $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ в общеупотребительных топологиях (слабой, сильной или равномерной).

Если $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ — некоторый операторный шар, то шар $\mathfrak{K}(Ц^*;\ B^*,\ A^*)$ $(\subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1))$ состоит из операторов, сопряженных к операторам шара $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$. Такие шары будем называть сопряженными друг другу. Это же относится к «открытым» шарам.

Оператор $Ц$ будем называть центром замкнутого шара $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ («открытого» шара $\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B)$), а операторы A и B — его радиусами, левым и правым соответственно.

Если один из радиусов шара $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ или $\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B)$ является нулевым оператором, то шар состоит из единственного элемента $Ц$, и, таким образом, второй его радиус может быть произвольным. Такой шар мы будем называть тривиальным.

Операторные шары (в дальнейшем — о. ш.), замкнутые и «открытые», возникают при исследовании дробно-линейных преобразований с операторными коэффициентами [2, 3,] в качестве их областей определения и областей значения.

В настоящей статье рассматриваются операторные шары. Связь операторных шаров с дробно-линейными преобразованиями будет исследована в другой статье.

§ 1. ЗАМКНУТЫЕ ШАРЫ

1. Пусть $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ — некоторый замкнутый о. ш. Очевидно, что является центром симметрии этого шара (т. е. вместе с каждым его ератором R в $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ входит и $Ц-(R-Ц)$).

Поскольку ограниченное множество не может иметь двух центров мметрии, то *центр шара определяется этим шаром однозначно*. В настоящем параграфе будет исследован вопрос о том, насколько определяет ар свои радиусы.

Лемма 1.1. *Для того чтобы оператор R входил в о. ш. $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$, ходимо и достаточно, чтобы**

$$\sup_{\substack{x\in\mathfrak{H}_1\\ y\in\mathfrak{H}_2}}\frac{|((R-Ц)\,x,y)|}{\|Bx\|\cdot\|A^*y\|}\leqslant 1,$$

е. чтобы при произвольных $x\in\mathfrak{H}_1$, $y\in\mathfrak{H}_2$ выполнялось неравенство

$$|((R-Ц)\,x,\ y)|\leqslant\|Bx\|\cdot\|A^*y\|.$$

Доказательство следует из [4, теорема 1]**.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы $\mathfrak{K}(Ц_1;\ A_1,\ B_1)\subset\mathfrak{K}(Ц_2;\ A_2,\ B_2)$, необдимо и достаточно, чтобы для любых $x\in\mathfrak{H}_1$, $y\in\mathfrak{H}_2$ выполнялось нераство*

$$|((Ц_1-Ц_2)\,x,\ y)|+\|B_1x\|\cdot\|A_1^*y\|\leqslant\|B_2x\|\cdot\|A_2^*y\|. \tag{1.1}$$

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $\mathfrak{K}(Ц_1;\ A_1,\ B_1)\subset$ $(Ц_2;\ A_2,\ B_2)$, x и y — произвольные элементы $\in\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно. Сущевует изометрический оператор $U\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{H}_2)$, переходящий вектор B_1x вектор, коллинеарный с A_1^*y. Тогда

$$|(UB_1x,\ A_1^*y)|=\|B_1x\|\cdot\|A_1^*y\|. \tag{1.2}$$

оскольку условием (1.2) оператор U определяется с точностью до скарного множителя, равного по модулю единице, то этот оператор можно брать так, чтобы

$$\operatorname{sign}((Ц_1-Ц_2)\,x,\ y)=\operatorname{sign}(UB_1x,\ A_1^*y). \tag{1.3}$$

Так как $Ц_1+A_1UB_1\in\mathfrak{K}(Ц_1;\ A_1,\ B_1)\subset\mathfrak{K}(Ц_2;\ A_2,\ B_2)$, то найдется кой $T\in\mathfrak{K}$, что $Ц_1+A_1UB_1=Ц_2+A_2TB_2$. Тогда

$$((Ц_1-Ц_2)\,x,\ y)+(UB_1x,\ A_1^*y)=(TB_2x,\ A_2^*y).$$

з (1.2) и (1.3) вытекает, что

$$|(Ц_1-Ц_2)\,x,\ y)+(UB_1x,\ A_1^*y)|=|((Ц_1-Ц_2)\,x,\ y)|+\|B_1x\|\cdot\|A_1^*y\|,$$

следовательно,

$$|((Ц_1-Ц_2)\,x,\ y)|+\|B_1x\|\cdot\|A_1^*y\|\leqslant\|TB_2x\|\cdot\|A_2^*y\|\leqslant$$
$$\leqslant\|B_2x\|\cdot\|A_2^*y\|.$$

* Дробь $\frac{0}{0}$ будем считать равной нулю. Дробь $\frac{r}{0}$, где $r>0$, будем считать ной $+\infty$. При этих соглашениях для любых неотрицательных чисел $r,\ s,\ s_n$ справедны утверждения: а) неравенство $\frac{r}{s}\leqslant 1$ и $r\leqslant s$ эквивалентны; б) $\lim\frac{r}{s_n}=\frac{r}{\lim\limits_{n\to\infty}s_n}$.

** В [4] рассматриваются операторы, действующие в одном и том же гильбертовом транстве. Однако все результаты легко переносятся на операторы, действующие из го пространства в другое.

Достаточность. Пусть выполнено (1.1), R — оператор $\in \mathfrak{K}(Ц_1;\, A_1,\, B_1)$. Тогда существует $T \in \mathfrak{K}$ так, что $R = Ц_1 + A_1 T B_1$, откуда $|((R - Ц_1)x, y)| \leqslant \leqslant \|B_1 x\| \cdot \|A_1^* y\|$ при произвольных $x \in \mathfrak{H}_1$, $y \in \mathfrak{H}_2$.

Имеем при произвольных $x \in \mathfrak{H}_1$, $y \in \mathfrak{H}_2$

$$|((R - Ц_2)x, y)| \leqslant |((R - Ц_1)x, y)| + |((Ц_1 - Ц_2)x, y)| \leqslant \leqslant \|B_1 x\| \cdot \|A_1^* y\| + |((Ц_1 - Ц_2)x, y)|.$$

В силу (1.1) будем иметь $|((R - Ц_2)x, y)| \leqslant \|B_2 x\| \cdot \|A_2^* y\|$ и следовательно, $R \in \mathfrak{K}(Ц_2;\, A_2,\, B_2)$.

Следствие. (Правило совмещения центров). *Если $\mathfrak{K}(Ц_1;\, A_1,\, B_1) \subset \subset \mathfrak{K}(Ц_2;\, A_2,\, B_2)$, то при произвольном $Ц$ будет выполняться условие $\mathfrak{K}(Ц;\, A_1,\, B_1) \subset \mathfrak{K}(Ц;\, A_2,\, B_2)$.*

Это предложение можно доказать, исходя непосредственно из определения о. ш.

В случае концентрических шаров условию принадлежности шаров друг другу можно придать другую форму.

Теорема 1.2. *Для того чтобы $A_1 \mathfrak{K} B_1 \subset A_2 \mathfrak{K} B_2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух условий:*

а) *шар $A_1 \mathfrak{K} B_1$ — тривиален (т. е. либо A_1, либо B_1 равны нулю);*

б) *существуют операторы V, $W \in \mathfrak{B}$ такие, что*

$$A_1 = A_2 V, \quad B_1 = W B_2, \quad \|V\| \cdot \|W\| \leqslant 1. \tag{1.4}$$

Достаточность очевидна.

Необходимость. Пусть $A_1 \mathfrak{K} B_1 \subset A_2 \mathfrak{K} B_2$, т. е. согласно теореме 1.1

$$\|B_1 x\| \cdot \|A_1^* y\| \leqslant \|B_2 x\| \cdot \|A_2^* y\| \quad (x \in \mathfrak{H}_1,\ y \in \mathfrak{H}_2). \tag{1.5}$$

Допустим, что шар $A_1 \mathfrak{K} B_1$ нетривиален. Тогда и шар $A_2 \mathfrak{K} B_2$ нетривиален. Найдется такое $x_0 \in \mathfrak{H}_1$, что $\|B_1 x_0\| \neq 0$. Имеем

$$\frac{\|A_1^* y\|}{\|A_2^* y\|} \leqslant \frac{\|B_2 x_0\|}{\|B_1 x_0\|} \qquad (y \in \mathfrak{H}_2).$$

Как показано в [4, лемма 1], отсюда следует, что существует такой оператор $V \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_2)$, что $A_1 = A_2 V$. Аналогично с помощью леммы 1' из [4] доказывается, что существует такой оператор $W \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_1)$, что $B_1 = W B_2$. При этом [4, леммы 2 и 2'] операторы V и W можно выбрать так, что

$$\|V\| = \sup_{y \in \mathfrak{H}_2} \frac{\|A_1^* y\|}{\|A_2^* y\|}, \quad \|W\| = \sup_{x \in \mathfrak{H}_1} \frac{\|B_1 x\|}{\|B_2 x\|}.$$

Из (1.5) тогда следует, что $\|V\| \cdot \|W\| \leqslant 1$.

Замечание. Условие б) равносильно следующему условию:

б') существует такое число $\rho > 0$, что

$$A_1 A_1^* \leqslant \rho A_2 A_2^*, \quad B_1^* B_1 \leqslant \frac{1}{\rho} B_2^* B_2. \tag{1.6}$$

Действительно, если $A_1 = A_2 V$, $B_1 = W B_2$, где $\|V\| \cdot \|W\| \leqslant 1$, то $A_1 A_1^* \leqslant \|V\|^2 \cdot A_2 A_2^*$, $B_1^* B_1 \leqslant \|W\|^2 B_2^* B_2 \leqslant \|V\|^{-2} B_2^* B_2$.

Положив $\rho := \|V\|^2$, получим (1.6).

братно пусть выполнено условие б′). Тогда [4] существуют такие операторы V и W, что $A_1 = A_2V$, $B_1 = WB_2$, $\|V\| \leqslant \sqrt{\rho}$, $\|W\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\rho}}$. Отсюда $\|V\| \cdot \|W\| \leqslant 1$. Таким образом, теорему 1.2. можно сформулировать так:

Теорема 1.2′. *Для того, чтобы $A_1\mathfrak{K}B_1 \subset A_2\mathfrak{K}B_2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:*

а) *шар $A_1\mathfrak{K}B_1$ тривиален;*

б) *существует такое число $\rho > 0$, что имеют место неравенства* (1.6).

Замечание 1. Из правила совмещения центров вытекает, что для произвольных (т. е. не концентрических) нетривиальных о. ш. $\mathfrak{K}(Ц_1; A_1, B_1)$ $\mathfrak{K}(Ц_2; A_2, B_2)$ условия б) и б′) являются необходимыми для того, чтобы шар $\mathfrak{K}(Ц_1; A_1, B_1)$ был подмножеством шара $\mathfrak{K}(Ц_2; A_2, B_2)$.

Замечание 2. Если радиусы шаров $\mathfrak{K}(Ц_1; A_1; B_1)$ и $\mathfrak{K}(Ц_2; A_2, B_2)$ являются эрмитовыми операторами, то неравенства (1.6) принимают вид

$$A_1^2 \leqslant \rho A_2^2, \quad B_1^2 \leqslant \frac{1}{\rho} B_2^2. \tag{1.7}$$

Отсюда вытекает [6], что

$$A_1 \leqslant \sqrt{\rho}\, A_2, \quad B_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_2. \tag{1.8}$$

Однако из неравенств (1.8) не вытекают неравенства (1.7).

Теорема 1.3. *Для того чтобы $A_1\mathfrak{K}B_1 = A_2\mathfrak{K}B_2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:*

а) *в каждой из пар $\{A_1, B_1\}$ и $\{A_2, B_2\}$ один из операторов равен нулю (и тогда шар тривиален);*

б) *существует такое число $\rho > 0$, что*

$$A_1A_1^* = \rho A_2A_2^* \quad B_1^*B_1 = \frac{1}{\rho} B_2^*B_2.$$

Доказательство. *Достаточность* очевидна.

Необходимость. Пусть $A_1\mathfrak{K}B_1 = A_2\mathfrak{K}B_2$. Если один из операторов A_1 и B_1 равен нулю, то шар тривиален, и равен нулю один из операторов A_2 и B_2, т. е. выполняется условие а).

Пусть все операторы A_1, B_1, A_2, B_2 отличны от нулевого. Тогда по теореме 1.2′ существуют такие положительные числа ρ_1 и ρ_2, что

$$A_1A_1^* \leqslant \rho_1 A_2A_2^*, \quad B_1^*B_1 \leqslant \frac{1}{\rho_1} B_2^*B_2,$$

$$A_2A_2^* \leqslant \frac{1}{\rho_2} A_1A_1^*, \quad B_2^*B_2 \leqslant \rho_2 B_1^*B_1.$$

Отсюда легко вывести, что $\rho_1 = \rho_2$ и, следовательно, выполняется условие б).

2. Будем говорить, что шар $\mathfrak{K}(Ц; A, B)$ имеет каноническую форму, если его радиусы A и B являются эрмитовыми неотрицательными операторами, и $\|A\| = \|B\|$.

Теорема 1.4. *Всякий шар может быть приведен к канонической форме. Каноническая форма определяется единственным образом.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что центр шара есть нулевой оператор.

Пусть $A\mathfrak{K}B$ — некоторый шар. Если A либо B равны нулю, то шар тривиален. В его канонической форме оба радиуса равны нулю, и это единственная каноническая форма тривиального шара.

Пусть A и B отличны от нулевого оператора. Положим

$$R_л := \sqrt{AA^*}\left(\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad R_п := \sqrt{B^*B}\left(\frac{\|A\|}{\|B\|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Имеем

$$R_л R_л^* = R_л^2 = AA^*\frac{\|B\|}{\|A\|}, \quad R_п^* R_п = R_п^2 = B^*B\frac{\|A\|}{\|B\|}.$$

По теореме 1.3 $A\mathfrak{K}B = R_л\mathfrak{K}R_п$.

Далее *

$$\|R_л\| = \|\sqrt{AA^*}\|\cdot\left(\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|B\|^{\frac{1}{2}}$$

и аналогично $\|R_п\| = \|A\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|B\|^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, канонической формой шара $A\mathfrak{K}B$ является $R_л\mathfrak{K}R_п$.

Пусть $R_л\mathfrak{K}R_п$ и $R_л'\mathfrak{K}R_п'$ — две канонические формы одного и того же шара. Если этот шар тривиален, то $R_л = R_п = R_л' = R_п' = 0$.

Пусть шар нетривиален. Согласно теореме 1.3 при некотором $\rho >$ выполняются условия $R_л^2 = \rho R_л'^2$, $R_п^2 = \frac{1}{\rho} R_п'^2$.

Из равенств $\|R_л\| = \|R_п\| (> 0)$, $\|R_л'\| = \|R_п'\| (>0)$ вытекает, что $\rho = 1$. Поэтому $R_л^2 = R_л'^2$, $R_п^2 = R_п'^2$. Поскольку операторы $R_л$, $R_п$, R, $R_п'$ неотрицательны, то $R_л = R_л'$, $R_п = R_п'$.

Замечание. Если $R_л\mathfrak{K}R_п$ и $R_л'\mathfrak{K}R_п'$ — канонические формы двух шаров и $R_л\mathfrak{K}R_п \subset R_л'\mathfrak{K}R_п'$, то, вообще говоря, нельзя заключить, что

$$R_л^2 \leqslant R_л'^2, \quad R_п^2 \leqslant R_п'^2. \tag{1.}$$

Пример. Пусть $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — двумерные пространства. Положим

$$R_л := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad R_п := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_л' := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R_п' := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\|R_л\| = \|R_п\|$, $\|R_л'\| = \|R_п'\|$; $R_л\mathfrak{K}R_п \subset R_л'\mathfrak{K}R_п'$, но второе неравенство (1.9) не выполняется.

3. Пусть

$$Ц + A_1\mathfrak{K}B_1 \subset A_2\mathfrak{K}B_2 \quad (A_1 \neq 0,\ B_1 \neq 0). \tag{1.1}$$

Тогда существуют такие операторы $Ц_0 \in \mathfrak{K}$, V и W, что

$$Ц = A_2 Ц_0 B_2, \quad A_1 = A_2 V, \quad B_1 = W B_2, \quad \|V\|\cdot\|W\| \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Неравенство (1.10) можно записать в виде

$$A_2 Ц_0 B_2 + A_2 V\mathfrak{K}W B_2 \subset A_2\mathfrak{K}B_2. \tag{1.1}$$

Операторы $Ц_0$, V и W определяются равенствами (1.11), вообще говоря, неоднозначно. Покажем, что их всегда можно выбрать так, что неравенство (1.12) можно сократить слева на A_2 и справа на B_2. Именно справедлива

* Для любого оператора $T \in \mathfrak{B}$ справедливо равенство $\|\sqrt{T^*T}\| = \|T\|$.

Теорема 1.5 (правило сокращения). *Если* $Ц + A_1\mathfrak{K}B_1 \subset A_2\mathfrak{K}B_2$ $(A_1 \neq 0, B_1 \neq 0)$, *то существуют операторы* $Ц_0$, V, W *такие, что выполняются условия* (1.11) и

$$Ц_0 + V\mathfrak{K}W \subset \mathfrak{K}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Условие (1.10) равносильно тому, что

$$|(Цx, y)| + \|B_1x\| \cdot \|A_1^*y\| \leqslant \|B_2x\| \cdot \|A_2^*y\| \qquad (x \in \mathfrak{H}_1, \ y \in \mathfrak{H}_2).$$

Как показано в [4] (замечание к теореме 1 и леммы 2,2') операторы $Ц_0$, V, W, удовлетворяющие условиям (1.11), всегда можно выбрать так, чтобы имели место включения

$$\mathfrak{Z}(Ц_0) \supset \mathfrak{R}(B_2)^{\perp} \subset \mathfrak{Z}(W), \ \mathfrak{Z}(Ц_0^*) \supset \mathfrak{R}(A_2^*)^{\perp} \subset \mathfrak{Z}(V^*). \tag{1.14}$$

Положим $z := B_2x$, $u := A_2^*y$. Тогда

$$|(Ц_0z, u)| + \|Wz\| \cdot \|V^*u\| \leqslant \|z\| \cdot \|u\|.$$

Из непрерывности операторов $Ц_0$, V^* и W следует, что это неравенство имеет место при всех $z \in \overline{\mathfrak{R}(B_2)}$ и $\in \overline{\mathfrak{R}(A_2^*)}$.

Пусть теперь z и u — произвольные элементы $\in \mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно. Имеем $z = z_1 + z_2$, $u = u_1 + u_2$, где $z_1 \in \overline{\mathfrak{R}(B_2)}$, $z_2 \perp \mathfrak{R}(B_2)$,

$$u_1 \in \overline{\mathfrak{R}(A_2^*)}, \ u_2 \perp \mathfrak{R}(A_2^*).$$

В силу (1.14)

$$(Ц_0z, u) = (Ц_0z_1, u_1); \quad \|Wz\| = \|Wz_1\|, \ \|V^*u\| = \|V^*u_1\|.$$

Тогда

$$|(Ц_0z, u)| + \|Wz\| \cdot \|V^*u\| = |(Ц_0z_1, u_1)| + \|Wz_1\| \cdot \|V^*u_1\| \leqslant$$
$$\leqslant \|z_1\| \cdot \|u_1\| \leqslant \|z\| \cdot \|u\| \qquad (z \in \mathfrak{H}_1; \ u \in \mathfrak{H}_2).$$

Из теоремы 1.1 тогда следует, что выполняется (1.13), что и требовалось доказать.

Замечание 1. Пусть при условиях теоремы 1.5 оператор $Ц$ входит в $A_2\mathfrak{K}^\circ B_2$. Тогда оператор $Ц_0$, удовлетворяющий условиям (1.11) и (1.14), можно выбрать так, чтобы $\|Ц_0\| < 1$. Это следует из способа построения этого оператора, приведенного в [4].

Замечание 2. Аналогично, но еще более просто, доказывается возможность одностороннего сокращения. Сформулируем, например, правило правого сокращения. Пусть имеет место (1.10). Тогда существуют операторы $Ц'$ и W' такие, что

$$Ц = Ц'B_2, \ B_1 = W'B_2, \ Ц' + A_1\mathfrak{K}W' \subset A_2\mathfrak{K}.$$

Нам понадобится еще следующее правило одностороннего сокращения.

Лемма 1.2 а) *Пусть* $Ц + A_1\mathfrak{K}B \subset A_2\mathfrak{K}B$. *Тогда существует такой оператор* $Ц'$, что $Ц = Ц'B$ и

$$Ц' + A_1\mathfrak{K} \subset A_2\mathfrak{K}.$$

б) Пусть $Ц + A\mathfrak{K}B_1 \subset A\mathfrak{K}B_2$. *Тогда существует такой оператор* $Ц''$, *что* $Ц = AЦ''$ *и*

$$Ц'' + \mathfrak{K}B_1 \subset \mathfrak{K}B_2.$$

Доказательство. Докажем предложение а), так как б) получается из а) переходом к сопряженным шарам.

Из условия вытекает, что $Ц \in A_2\mathfrak{K}B$ и следовательно, $Ц = Ц'B$ пр некотором $Ц' \in \mathfrak{B}$. Согласно [4] оператор $Ц'$ можно выбрать так, чтоб выполнялось условие

$$\mathfrak{Z}(Ц') \supset \mathfrak{R}(B)^{\perp}. \qquad (1.1$$

Согласно теореме 1.1. будем иметь

$$|(Ц'Bx,\ y)| + \|Bx\| \cdot \|A_1^*y\| \leqslant \|Bx\| \cdot \|A_2^*y\|$$
$$(x \in \mathfrak{H}_1,\ y \in \mathfrak{H}_2).$$

Полагая $Bx := z$, получим

$$|(Ц'z,\ y)| + \|z\| \cdot \|A_1^*y\| \leqslant \|z\| \cdot \|A_2^*y\|$$

для всех $z \in \mathfrak{R}(B)$ и, следовательно, для всех $z \in \overline{\mathfrak{R}(B)}$. Тогда

$$\frac{|(Ц'z, y)|}{\|z\|} + \|A_1^*y\| \leqslant \|A_2^*y\| \quad (z \in \overline{\mathfrak{R}(B)} - \{0\},\ y \in \mathfrak{H}_2) \qquad (1.1$$

Если теперь z — произвольный элемент $\in \mathfrak{H}_1$, z_1 — его проекция н $\overline{\mathfrak{R}(B)}$, то в силу (1.15) $Ц'z = Ц'z_1$ и, следовательно, $|(Ц'z,\ y)|/\|z\| \leqslant |(Ц'z_1,\ y)|/\|z_1\|$. Поэтому условие (1.16) выполняется при всех $z \neq ($ Беря верхнюю грань в левой части по $z \in \mathfrak{H}_1$, получим

$$\|Ц'^*y\| + \|A_1^*y\| \leqslant \|A_2^*y\| \quad (y \in \mathfrak{H}_2)$$

Тогда при произвольном $x \in \mathfrak{H}_1$ выполняется условие

$$|(Ц'x,\ y)| + \|x\| \cdot \|A_1^*y\| \leqslant \|x\| \cdot \|A_2^*y\| \quad (y \in \mathfrak{H}_2),$$

откуда по теореме 1.1 следует, что $Ц' + A_1\mathfrak{K} \subset A_2\mathfrak{K}$. Лемма доказан

Из рассуждений, приведенных при доказательстве леммы 1.2 выт кает следующий частный признак принадлежности шаров:

Теорема 1.6. *Для того чтобы $Ц + A_1\mathfrak{K}$ входил в $A_2\mathfrak{K}$, ($Ц + \mathfrak{K}B$ входил в $\mathfrak{K}B_2$) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|Ц^*y\| + \|A_1^*y\| \leqslant \|A_2^*y\| \quad (y \in \mathfrak{H}_2),$$
$$(\|Цx\| + \|B_1x\| \leqslant \|B_2x\|) \quad (x \in \mathfrak{H}_1)).$$

§ 2. СЧЕТНЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ШАРОВ

Пусть $\mathfrak{K}_n := \mathfrak{K}(Ц_n;\ A_n,\ B_n)$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ — убывающая последова тельность о. ш., т. е. $\mathfrak{K}_1 \supset \mathfrak{K}_2 \supset \cdots$. В настоящем параграфе устанавли вается, что пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$ также является шаром, центр и радиус которого получаются из центров и радиусов шаров $\mathfrak{K}_n$ с помощью пре дельного перехода.

Рассмотрим вначале случай концентрических о. ш. Без ограничени общности будем считать, что общий центр шаров $\mathfrak{K}_n$ есть нулевой опе ратор.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{K}_n = A_n\mathfrak{K}B_n$ — убывающая последовательност шаров. Тогда пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$ также является некоторым шаром. Есл предположить, что последовательности $A_nA_n^*$ и $B_n^*B_n$ являются убыва* (что не ограничивает общности), то радиусы A и B шара $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$ выбрать так, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n A_n^* = AA^*, \quad \lim_{n\to\infty} B_n^* B_n = B^* B. \tag{2.1}$$

Доказательство. Как известно [5], убывающие последовательности $A_n A_n^*$ и $B_n^* B_n$ имеют сильные пределы, которые мы обозначим через P и Q соответственно. Пусть A и B — такие операторы, что $AA^* = P$, $B^*B = Q$.

(В качестве A и B можно взять, например, неотрицательные квадратные корни $\sqrt{P}$ и $\sqrt{Q}$ соответственно). Тогда выполняются равенства (2.1). Из равенств следует

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n^* y \| = \| A^* y \| \quad (y \in \mathfrak{H}_2), \quad \lim_{n\to\infty} \| B_n x \| = \| Bx \| \quad (x \in \mathfrak{H}_1). \tag{2.2}$$

Докажем, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n = A\mathfrak{K}B$. Так как $AA^* \leqslant A_n A_n^*$, $B^*B \leqslant B_n^* B_n$ ($n = 1$, 2, ...), то по теореме 1.2′ $A\mathfrak{K}B \subset \mathfrak{K}_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Обратно, пусть $R \in \mathfrak{K}_n$ при произвольном n. Согласно лемме 1.1, будем иметь

$$\frac{|(Rx, y)|}{\| B_n x \| \cdot \| A_n^* y \|} \leqslant 1 \quad (x \in \mathfrak{H}_1, \ y \in \mathfrak{H}_2); \ n = 1, 2, \dots).$$

Устремляя n к ∞* и учитывая (2.2), получим $\frac{|(Rx, y)|}{\| Bx \| \cdot \| A^* y \|} \leqslant 1$, откуда следует, что $R \in A\mathfrak{K}B$.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathfrak{K}_n := \mathfrak{K}(Ц_n;\ A_n,\ B_n)$ — убывающая последовательность шаров. Тогда*

а) *последовательность $\mathfrak{K}(0;\ A_n,\ B_n)$ также убывающая;*

б) *последовательность $Ц_n$ имеет слабый предел;*

в) *пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$ есть шар $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$, где*

$$A\mathfrak{K}B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}(0;\ A_n,\ B_n), \quad Ц = \lim_{n\to\infty} Ц_n.$$

Доказательство. Утверждение а) вытекает непосредственно из принципа совмещения центров (следствие из теоремы 1.1).

б) Будем считать, как и в теореме 2.1, что последовательности $A_n A_n^*$ и $B_n^* B_n$ убывают, и их пределы есть AA^* и B^*B соответственно. В частности, имеет место (2.2).

Пусть $m > n$. Имеем $\mathfrak{K}(Ц_m;\ A_m, B_m) \subset \mathfrak{K}(Ц_n;\ A_n,\ B_n)$, откуда по теореме 1.1 следует, что при произвольных $x \in \mathfrak{H}_1$, $y \in \mathfrak{H}_2$ выполняется условие

$$|((Ц_m - Ц_n)\, x,\ y)| \leqslant \| B_n x \| \cdot \| A_n^* y \| - \| B_m x \| \cdot \| A_m^* y \|.$$

В силу (2.2) правая часть стремится к 0 при m, $n \to \infty$, откуда и следует утверждение б).

в) Пусть $Ц$ — слабый предел последовательности $Ц_n$. При произвольном $m > n$ будем иметь

$$\mathfrak{K}(Ц_m;\ A,\ B) \subset \mathfrak{K}_m \subset \mathfrak{K}_n.$$

---

* См. сноску* на стр. 69.

Устремляя m к ∞ и пользуясь слабой замкнутостью шаров $\mathfrak{K}_n$, получи что $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B) \subset \mathfrak{K}_n$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$.

Обратно, пусть оператор R входит в $\mathfrak{K}_n$ при произвольном n. П $m > n$ по правилу совмещения центров будем иметь

$$R \in \mathfrak{K}(Ц_m;\ A_m,\ B_m) \subset \mathfrak{K}(Ц_m;\ A_n,\ B_n),$$

т. е. $R - Ц_m \in \mathfrak{K}(0;\ A_n, B_n)$. Устремляя m к ∞, получим $R - Ц \in \mathfrak{K}(0;\ A_n,\ B$ откуда $R - Ц \in \mathfrak{K}(0;\ A,\ B)$, $R \in \mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$. Этим доказано в).

§ 3. «ОТКРЫТЫЕ» ОПЕРАТОРНЫЕ ШАРЫ

В настоящем параграфе устанавливается связь между «открытым и замкнутыми о. ш. Как и в случае замкнутого шара, центр «открытог шара определяется этим шаром однозначно. Аналогом леммы 1.1. д «открытых» шаров является

Лемма 3.1. *Для того, чтобы оператор R входил в $\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{\substack{x \in \mathfrak{H}_1 \\ y \in \mathfrak{H}_2}} \frac{|((R - Ц)\,x,\ y)|}{\|Bx\| \cdot \|A^* y\|} < 1.$$

Отметим следующее очевидное предложение.

Лемма 3.2. *Замыкание множества $\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B)$ по слабой, сильн и равномерной топологиям равно $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$.*

Доказательство. Так как шар $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ замкнут по вс упомянутым топологиям, то $\overline{\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B)} \subset \mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$.

Обратно, каждый элемент $R = Ц + ATB \in \mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ $(\|T\| \leqslant$ является пределом равномерно сходящейся последовательности

$$Ц + A\left(\frac{n-1}{n}T\right)B \in \mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B).$$

Следствие. *Если $\mathfrak{K}^\circ(Ц_1;\ A_1,\ B_1) \subset \mathfrak{K}^\circ(Ц_2;\ A_2,\ B_2)$, то $\mathfrak{K}(Ц_1;\ A_1,$ $\subset \mathfrak{K}(Ц_2;\ A_2,\ B_2)$.*

Приведем пример показывающий, что обратное предложение невер даже в двумерном пространстве.

Пример. Пусть $\{e_1,\ e_2\}$ — ортонормированный базис пространст $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$. Операторы $Ц_1$, A_1, B_1 зададим в этом базисе матрицами

$$Ц_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 := B_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и положим $Ц_2 := 0$, $A_2 := B_2 := I$, так что

$$\mathfrak{K}(Ц_2;\ A_2,\ B_2) = \mathfrak{K},\ \mathfrak{K}^\circ(Ц_2;\ A_2,\ B_2) = \mathfrak{K}^\circ.$$

Для любого $T = (t_{jk})_{j,k=1}^2 \in \mathfrak{K}$ будем иметь

$$Ц_1 + A_1 T B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{K}.$$

В то же время $\|Ц_1 + A_1 T B_1\| = 1$ при любом $T \in \mathfrak{K}^\circ$, так что $\mathfrak{K}^\circ(Ц_1;\ A_1,$ не содержится в $\mathfrak{K}^\circ$, и более того, множества $\mathfrak{K}^\circ(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$ и не пересекаются.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B) \subset \mathfrak{K}(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$. Возможно одно только одно из двух положений:*

1) $\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B) \subset \mathfrak{K}^\circ(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$;
2) $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B) \cap \mathfrak{K}^\circ(Ц_1;\ A_1,\ B_1) = \varnothing$.

Таким образом, либо «открытый» шар $\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B)$ входит в «открытый» шар $\mathfrak{K}^\circ(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$, либо весь шар $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ лежит «на поверхности» шара $\mathfrak{K}(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$.

Доказательство. Достаточно показать, что если хотя бы один элемент $R_0 \in \mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B)$ не входит в $\mathfrak{K}^\circ(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$, то имеет место случай 2). Без ограничения общности можно считать, что $Ц_1 = 0$.

Пусть $R_0 = Ц + AT_0B$, где $\|T_0\| < 1$, $\varepsilon := 1 - \|T_0\|$, $\mathfrak{U}_\varepsilon := \{T;\ \|T - T_0\| \leqslant \varepsilon\}$ — замкнутая ε-окрестность точки T_0 в равномерной топологии. Тогда $\mathfrak{U}_\varepsilon \subset \mathfrak{K}$ и, следовательно, $Ц + A\mathfrak{U}_\varepsilon B \subset A_1\mathfrak{K}B_1$.

Покажем, что $(Ц + A\mathfrak{U}_\varepsilon B) \cap \mathfrak{K}^\circ(0;\ A_1,\ B_1)$ пусто.

Предположим противное, т. е. что при некотором $T_0' \in \mathfrak{U}_\varepsilon$ выполняется условие

$$Ц + AT_0'B = A_1T'B_1,$$

где $\|T'\| < 1$. Оператор $T_0'' := T_0 - (T_0' - T_0)$ (симметричный с T_0' относительно T_0) также входит в $\mathfrak{U}_\varepsilon$, так что

$$Ц + AT_0''B = A_1T''B_1$$

при некотором T'', $\|T''\| \leqslant 1$.

Имеем

$$R_0 = \frac{1}{2}[(Ц + AT_0'B) + (Ц + AT_0''B)] =$$

$$= \frac{1}{2}(A_1T'B_1 + A_1T''B_1) = A_1\,\frac{T' + T''}{2}\,B_1.$$

Поскольку $\left\|\frac{T' + T''}{2}\right\| \leqslant \frac{\|T'\| + \|T''\|}{2} < 1$, то $R_0 \in A_1\mathfrak{K}^\circ B_1$, что противоречит условию. Таким образом, $Ц + A\mathfrak{U}_\varepsilon B \cap \mathfrak{K}^\circ(0;\ A_1,\ B_1) = \varnothing$. В силу связности множества $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ имеет место случай 2).

Следствие 1. *Для концентрических шаров справедливо предложение: Включения* $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B) \subset \mathfrak{K}(Ц;\ A_1,\ B_1)$ и $\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B) \subset \mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A_1,\ B_1)$ *эквивалентны.*

Следствие 2. *Равенства* $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B) = \mathfrak{K}(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$ *и* $\mathfrak{K}^\circ(Ц;\ A,\ B) = \mathfrak{K}^\circ(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$ *эквивалентны.*

Таким образом, «внутренность» шара $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ определяется самим шаром и не зависит от выбора радиусов.

Замечание. Теоремы 1.2 и 1.2′ переносятся на «открытые» шары.

Теорема 3.2 устанавливает важный достаточный признак того, что в теореме 3.1 имеет место случай 1).

Предварительно докажем вспомогательные предложения.

Лемма 3.3. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ — гильбертовы пространства. *Если операторы* $S, T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H},\ \mathfrak{H}')$ *удовлетворяют условию*

$$\|Sx\| + \|Tx\| \leqslant \|x\| \qquad (x \in \mathfrak{H}),$$

то

$$\|S\|^2 + \|T\|^2 \leqslant 1.$$

Доказательство. Пусть f и g — произвольные элементы $\in \mathfrak{H}'$, $\|f\| \leqslant 1$, $\|g\| \leqslant 1$. Для любого $x \in \mathfrak{H}$ будем иметь

$$|(S^*f + T^*g,\ x)| = |(f,\ Sx) + (g,\ Tx)| \leqslant \|Sx\| + \|Tx\| \leqslant \|x\|.$$

Отсюда вытекает, что $\|S^*f + T^*g\| \leqslant 1$. Следовательно, при произвольных $f,\ g \in \mathfrak{H}'$, $\|f\| \leqslant 1$, $\|g\| \leqslant 1$ выполняются условия

$$\|S^*f + T^*g\|^2 \leqslant 1,$$
$$\|S^*f - T^*g\|^2 \leqslant 1,$$

Сложив последние неравенства и применив к левой части равенство п[а]раллелограмма, получим

$$\| S^* f \|^2 + \| T^* g \|^2 \leqslant 1.$$

В силу произвола f и g отсюда следует, что $\| S^* \|^2 + \| T^* \|^2 \leqslant 1$, т. [е.] $\| S \|^2 + \| T \|^2 \leqslant 1$.

Лемма 3.4. *Пусть операторы A, B, $C \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}')$ удовлетворяю[т] условиям*

а) $\| Ax \| + \| Bx \| \leqslant \| Cx \| \quad (x \in \mathfrak{H})$, (3[.1])

б) $\sup\limits_{x \in \mathfrak{H}} \dfrac{\| Ax \|}{\| Cx \|} = 1$. *

Тогда $B = 0$.

Доказательство. Из условия а) вытекает, что

$$\frac{\| Ax \|}{\| Cx \|} \leqslant 1, \qquad \frac{\| Bx \|}{\| Cx \|} \leqslant 1.$$

Тогда из [4, леммы 1′, 2′] вытекает, что существуют такие опе[ра]торы S, $T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}', \mathfrak{H}')$, что

$$A = SC, \ B = TC,$$

$$\sup_{x \in \mathfrak{H}} \frac{\| Ax \|}{\| Cx \|} = \| S \|, \qquad (3[.2])$$

$$\mathfrak{R}(C)^{\perp} \subset \mathfrak{Z}(S); \quad \mathfrak{R}(C)^{\perp} \subset \mathfrak{Z}(T). \qquad (3[.3])$$

Если положить $y := Cx$, то условие (3.1) примет вид

$$\| Sy \| + \| Ty \| \leqslant \| y \|. \qquad (3[.4])$$

Это условие очевидно выполняется для всех $y \in \overline{\mathfrak{R}(C)}$. Произвольн[ый] элемент y из $\mathfrak{H}'$ можно представить в виде $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in \overline{\mathfrak{R}(C)}$, $y_2 \perp \mathfrak{R}(C)$. Из (3.3) следует, что $Sy = Sy_1$, $Ty = Ty_1$, и, следователь[но], $\| Sy \| + \| Ty \| = \| Sy_1 \| + \| Ty_1 \| \leqslant \| y_1 \| \leqslant \| y \|$, т. е. (3.4) выполняе[тся] при всех $y \in \mathfrak{H}'$. По лемме 3.3 $\| S \|^2 + \| T \|^2 \leqslant 1$. Поскольку из услов[ия] б) и (3.2) вытекает, что $\| S \| = 1$, то $T = 0$, и, следовательно, $B = 0$.

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B) \subset \mathfrak{K}(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$ $(A \neq 0,\ B \neq [0])$ *и выполняется одно из условий*

$$\inf_{y \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{Z}(A_1^*)} \frac{\| A^* y \|}{\| A_1^* y \|} > 0, \qquad \inf_{x \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{Z}(B_1)} \frac{\| Bx \|}{\| B_1 x \|} > 0. \qquad (3[.5])$$

Тогда $Ц \in \mathfrak{K}^0(Ц_1; A_1; B_1)$ (и следовательно, по теореме 3.1 $\mathfrak{K}^0(Ц;\ A,\ B) \subset \mathfrak{K}^0(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$).

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, [что] $Ц_1 = 0$. Допустим, что имеет место первое из условий (3.5). (Если вып[ол]няется второе условие, то следует рассмотреть сопряженный шар). То[гда] существует такое число $k > 0$, что $\| A^* y \| \geqslant k \cdot \| A_1^* y \| \quad (y \in \mathfrak{H}_2)$, т. [е.] $AA^* \geqslant k^2 A_1 A_1^*$. Из теоремы 1.2′ тогда вытекает, что $kA_1\mathfrak{K}B \subset A\mathfrak{K}B$ [и] следовательно,

$$Ц + kA_1\mathfrak{K}B \subset A_1\mathfrak{K}B_1.$$

---

* Из условия а) следует, что если $Cx = 0$, то $Ax = 0$ и $(Bx = 0)$. Дробь $\frac{0}{0}$ условились считать равной нулю.

Из леммы 1.2 б) следует, что существует такой оператор $Ц'$, что $Ц = A_1 Ц'$ и

$$Ц' + k\mathfrak{K}B \subset \mathfrak{K}B_1.$$

По теореме 1.6 отсюда вытекает, что

$$\| Ц'x \| + k\|Bx\| \leqslant \| B_1 x \| \quad (x \in \mathfrak{H}_1).$$

Поскольку $k \neq 0$, $B \neq 0$, то, как следует из леммы 3.4,

$$\sup_{x \in \mathfrak{H}_1} \frac{\| Ц'x \|}{\| B_1 x \|} < 1.$$

Поэтому [4, лемма 2] найдется такой оператор $Ц_0 \in \mathfrak{K}^0(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, что $Ц' = Ц_0 B$. Следовательно, $Ц = A_1 Ц_0 B_1 \in A_1 \mathfrak{K}^0 B_1$, что и требовалось доказать.

Замечание. Условия (3.5) не являются необходимыми для того, чтобы $Ц$ входил в $\mathfrak{K}^0(Ц_1;\ A_1,\ B_1)$.

Ниже приводится критерий того, что пересечение убывающей последовательности «открытых» о. ш. является пустым.

Теорема 3.3. *Пусть* $\{\mathfrak{K}_n^0\}_1^\infty$ *— последовательность «открытых» о. ш.,* $\mathfrak{K}_n^0 \supset \mathfrak{K}_{n+1}^0$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1°. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n^0 = \varnothing$.

2°. *Центр* $Ц_\infty$ *замкнутого шара* $\mathfrak{K}_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$ *не принадлежит* $\mathfrak{K}_n^0$ *при некотором* n *(и, значит, при всех следующих).*

3°. *Пересечение* $\mathfrak{K}_\infty \cap \mathfrak{K}_n^0$ *пусто при некотором* n.

Доказательство. $1^0 \Rightarrow 2^0$ тривиальным образом. $2^0 \Rightarrow 3^0$ на основании теоремы 3.1.

$3^0 \Rightarrow 1^0$: Допустим, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n^0$ непусто и содержит некоторый элемент K. Тогда $K \in \mathfrak{K}_n^0 \subset \mathfrak{K}_n$ при любом n и, следовательно, $K \in \mathfrak{K}_\infty$. Таким образом, $\mathfrak{K}_\infty \cap \mathfrak{K}_n^0$ непусто при любом n.

§ 4. ОПЕРАТОРНЫЕ ШАРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

1. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ введена инволюция комплексного сопряжения $x \to \bar{x}$ [5, п. 50]. Для каждого оператора $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ определим комплексно сопряженный оператор $\bar{A}$ формулой $\bar{A}x = \overline{A\bar{x}}$ $(x \in \mathfrak{H})$.

По аналогии с теорией матриц введем понятие оператора A^τ, транспонированного с оператором A, определив его формулой $A^\tau := (\bar{A})^* \ (= \overline{A^*})$.

Оператор A, удовлетворяющий условию $A = A^\tau$, называется симметрическим.

Отметим очевидные свойства операции транспонирования:

1) $(\lambda A)^\tau = \lambda A^\tau$ при любом λ;

2) $(AB)^\tau = B^\tau A^\tau$;

3) если H — эрмитов (неотрицательный) оператор, то оператор H^τ — эрмитов (неотрицателен);

4) $\| A^\tau \| = \| A \|$;

5) если H — неотрицательный оператор, то $(\sqrt{H})^\tau = \sqrt{H^\tau}$.

В самом деле, из 2) следует, что $[(\sqrt{H})^\tau]^2 = H^\tau$, и требуемое вытекает из неотрицательности оператора $(\sqrt{H})^\tau$ и единственности неотрицательного квадратного корня.

2. Пусть $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ — некоторый о. ш. Множество всех операторо транспонированных с операторами $\in \mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$, совпадает в силу и 4) с о. ш. $\mathfrak{K}(Ц^{\tau};\ B^{\tau},\ A^{\tau})$. Этот шар будем называть транспонир ванным по отношению к о. ш. $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$.

Шар будем называть симметрическим, если он совпадает своим транспонированным.

Теорема 4.1. *Для того чтобы шар $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ был симметрически необходимо и достаточно, чтобы*

а) *его центр Ц был симметрическим,*

б) *нашлось такое число $\rho > 0$, что*

$$B^*B = \rho (AA^*)^{\tau}. \tag{4.}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что центр шара определ ется единственным образом, и теоремой 1.3. Для того чтобы о. $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ совпадал с о. ш. $\mathfrak{K}(Ц^{\tau};\ B^{\tau},\ A^{\tau})$, необходимо и достаточн чтобы а) $Ц = Ц^{\tau}$, б) существовало такое число $\rho > 0$, что $B^*B = \rho A^{\tau *}A$ $AA^* = \frac{1}{\rho} B^{\tau} B^{\tau *}$. Легко видеть, что последние равенства равносильн равенству (4.1).

Следствие. *Если $Ц = Ц^{\tau}$, $A = B^{\tau}$, то шар $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ симметриче* Обратно, *если шар $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ симметричен, то можно выбрать е радиусы $R_л$ и $R_п$ так, чтобы выполнялось условие $R_л = R_п^{\tau}$.* В качест таких радиусов можно выбрать канонические радиусы. Действительн пусть шар $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B)$ симметричен, и, следовательно, имеет место (4.1 при некотором $\rho > 0$.

Положим $R_л := \sqrt[4]{\rho} \cdot \sqrt{AA^*}$, $R_п := \frac{1}{\sqrt[4]{\rho}} \sqrt{B^*B}$. Из теоремы 1.3 выт кает, что $\mathfrak{K}(Ц;\ A,\ B) = \mathfrak{K}(Ц;\ R_л,\ R_п)$.

Использовав (4.1), будем иметь

$$R_п^{\tau} = \frac{1}{\sqrt[4]{\rho}} (\sqrt{B^*B})^{\tau} = \frac{1}{\sqrt[4]{\rho}} \sqrt{(B^*B)^{\tau}} = \sqrt[4]{\rho} \sqrt{AA^*} = R_л.$$

Из свойства 4) вытекает, что $\| R_л \| = \| R_п \|$, т. е. радиусы $R_л$ и $R_п$ явл ются каноническими.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathfrak{K}^1$ и $\mathfrak{K}^2$ — симметрические шары, $R_л^{(k)}$ и $R_п^{(k)}$ ($= R_л^{(k)\tau}$) — канонические радиусы о. ш. $\mathfrak{K}^{(k)}$ $(k = 1,\ 2)$.*

Если $\mathfrak{K}^1 \subset \mathfrak{K}^2$, то

$$R_л^{(1)} \leqslant R_л^{(2)}, \quad R_п^{(1)} \leqslant R_п^{(2)}. \tag{4.}$$

Доказательство. Из теоремы 1.3 вытекает, что существует тако $\rho > 0$, при котором

$$\text{а)}\ R_л^{(1)^2} \leqslant \rho R_л^{(2)^2}, \quad \text{б)}\ R_п^{(1)^2} \leqslant \frac{1}{\rho} R_п^{(2)^2}. \tag{4.}$$

Перейдя в неравенстве (4.3) б) к транспонированным оператора и учитывая следствие из теоремы 4.1, получим $R_л^{(1)^2} \leqslant \frac{1}{\rho} R_л^{(2)^2}$. Сравн с (4.3) а), получим $R_л^{(1)^2} \leqslant R_л^{(2)^2}$, откуда $R_п^{(1)^2} \leqslant R_п^{(2)^2}$. Как показано в [6] отсюда следует (4.2).

Замечание. Если отказаться от симметричности о. ш. $\mathfrak{K}^1$ и $\mathfrak{K}^2$, то и условия $\mathfrak{K}^1 \subset \mathfrak{K}^2$ не следует, что для канонических радиусов выполняетс (4.2). Пример, подтверждающий это, приведен в § 1.

Теорема 4.2. *Пусть* $\{\mathfrak{K}_n\}$ — *последовательность симметрических шаров* $\mathfrak{K}_{n+1} \subset \mathfrak{K}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$ — *симметрический операторный шар. Если* $R_л^{(n)}$ и $R_п^{(n)}$ — *канонические радиусы шара* $\mathfrak{K}_n$, *то последовательности* $\{R_л^{(n)}\}$ и $\{R_п^{(n)}\}$ *являются убывающими, и их сильные пределы* $R_л := \lim\limits_{n\to\infty} R_л^{(n)}$ *и* $R_п := \lim\limits_{n\to\infty} R_п^{(n)}$ *являются каноническими радиусами шара* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{K}_n$.

Доказательство. Если $T \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$, то $T \in \mathfrak{K}_n$ при произвольном n. Тогда $T^{\tau} \in \mathfrak{K}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, $T^{\tau} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$. Поэтому шар $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{K}_n$ симметричен.

Из леммы 4.1 вытекает, что последовательности $\{R_л^{(n)}\}$ и $\{R_п^{(n)}\}$ являются убывающими. По теореме 2.2 их сильные пределы $R_л$ и $R_п$ являются радиусами шара $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$, причем каноническими, так как $R_л$ и $R_п$ — ...товы неотрицательные операторы, и $R_л = \lim\limits_{n\to\infty} R_л^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} R_п^{(n)\tau} = R_п^{\tau}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. Изд-во иностр. лит. М., 1962.
2. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка. Труды Московск. матем. об-ва, т. 5, 1956, 203—268.
3. М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян. О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами. Математические исследования, т. 2, вып. 3 (5), Кишинев, 1967.
4. Ю. Л. Шмульян. Двустороннее деление в кольце операторов. Математические заметки, т. 1, вып. 5. 1967, 605—610.
5. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. «Наука», М., 1966.
6. K. Löwner. Über monotone Matrixfunktionen. Math. Zeitschr., 38, 1934, —216.

Поступила 20 января 1967 г.