НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА С СИММЕТРИЧНЫМ НАКЛОНОМ

Л. А. Иванов

Пусть E — банахово пространство. Наклоном [1] подпространства к подпространству Q называется величина

$$(\widehat{P, Q}) = \inf \| x - y \|, \quad (x \in P, \ \| x \| = 1, \ y \in Q).$$

В общем случае наклон несимметричен, т. е. $(\widehat{P, Q}) \neq (\widehat{Q, P})$. Как доказа В. И. Гурарий [2], для симметричности наклона в банаховом простра стве E ($\dim E > 2$) необходимо и достаточно, чтобы пространство E был со скалярным произведением, т. е. в E можно ввести скалярное произв дение так, что для любого $x \in E$ $\| x \| = \sqrt{(x, x)}$ *.

В этой работе будет показано, что для двумерного банахова пр странства условия указанной теоремы не являются необходимыми. Буде построен некоторый класс двумерных банаховых пространств без скаля ного произведения (т. е неевклидовых), в которых наклон симметриче

Пусть в двумерной плоскости в качестве единичного шара взят пр вильный шестиугольник и по нему определена норма. Полученное ба хово пространство, очевидно. не является евклидовым. Обозначим е через E_1.

Теорема 1. *В банаховом пространстве E_1 наклон симметричен.*

Для доказательства установим некоторые вспомогательные предл жения.

Определение. *Подпространство P называется ортогональн к Q, если $(\widehat{P, Q}) = 1$.*

Так как $\dim E_1 = 2$, то в дальнейшем будем говорить не о подп странствах, а о прямых P и Q.

Предложение 1. *В пространстве E_1 ортогональность симметрич т. е. если $(\widehat{P, Q}) = 1$, то $(\widehat{Q, P}) = 1$.*

Предложение 2. *Если две прямые P и Q пересекают единичн шестиугольник в точках K и L, лежащих на одной стороне, то накл между ними симметричен.*

Доказательства предложений 1 и 2 геометрически очевидны.

Для завершения доказательства теоремы 1 установим предваритель одну лемму. Пусть дан ромб $ABCD$. Прямые P и Q, проходящие чер вершину D, пересекают соответственно стороны AB и BC в точках K и Проводим через K и L прямые, параллельные прямым P и Q. Эти прям пересекают стороны DA и CD соответственно в точках G и H (рис.

Лемма. *В предыдущем построении отрезки DG и HD равны.*

---

* Если в E нельзя ввести такого скалярного произведения, то будем называть E п странством без скалярного произведения.

Доказательство. Возьмем точку K', симметричную K относительно диагонали BD (см. рис. 1). Без ограничения общности можно считать, что точка K' попала на отрезок LC. Соединим K' с H. Для доказательства леммы достаточно показать, что углы GKD и DLH равны. Это то же, что доказать равенство углов DLH и $DK'H$, ибо они равны, как углы с соответственно параллельными сторонами. При этом углы $LK'D$, BKD и LHD равны. Отсюда следует, что точки L, K', H и D лежат на одной окружности (углы $LK'D$ и LHD опираются на один отрезок DL). Углы DLH и $DK'H$ равны, как опирающиеся на одну хорду BH. Лемма доказана.

Предложение 3. *Если прямые проходят через соседние стороны шестиугольника, то наклон между ними симметричен (рис. 2).* В предложении 2 и 3 разобраны все случаи взаимного расположения P и Q в E_1. Отсюда вытекает утверждение теоремы 1.

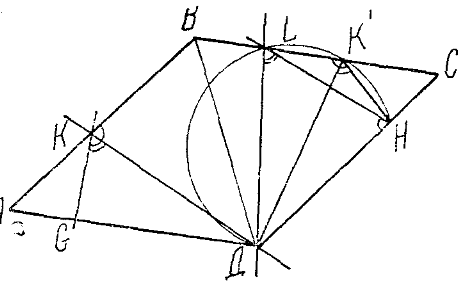

Рис. 1.

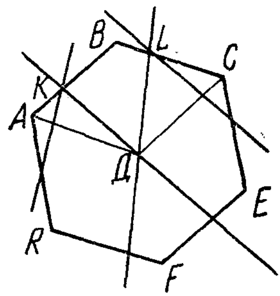

Рис. 2.

Рассмотрим теперь совокупность двумерных банаховых пространств E_k. Норма в E_k определяется правильным многоугольником с $2+4k$ сторонами.

Теорема 2. *В банаховом пространстве E_k ($k=1, 2, \ldots$) наклон симметричен.*

Доказательство. Для определения наклона P и Q важно знать ортогональные к P и Q направления. Для многоугольников рассматриваемого типа ортогональное к P направление параллельно стороне, по которой P пересекает единичную сферу (т. е. границу $4k+2$ угольника). Таким образом стороны, в которых P и Q пересекают единичную сферу, в продолжении образуют совместно с ортогональными к P и Q направлениями параллелограмм.

В силу симметрии такого типа многоугольников относительно диагоналей, являющихся диаметром, а также относительно прямых, соединяющих середины противоположных сторон, получаем, что эти параллелограммы являются ромбами, т. е. имеет место утверждение леммы. Отсюда вытекает, что наклон симметричен в E_k.

Заметим, что остается открытым вопрос о существовании двумерного банахова пространства со строго выпуклой единичной сферой с симметричным наклоном и без скалярного произведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Гурарий. О наклонах подпространств и условных базисах в пространствах Банаха. ДАН СССР, 145, № 3 (1962).

2. В. И. Гурарий. О наклонах и растворах подпространств банахова пространства. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.

Поступила 27 декабря 1966 г.