ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
Вып. 6 1968

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

Д. Димитров

Пусть X — действительное сепарабельное пространство Банаха, и пусть в нем дана полная линейно независимая система элементов

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \dots \tag{1}$$

Положим

$$E_n(y)=\min_{\lambda_i}\left\|y-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right\| \quad (y\in X). \tag{2}$$

Если для каждого $y\in X$ и каждого натурального n минимум в (2) достигается на единственном полиноме

$$y_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(n)}g_i, \tag{3}$$

то система (1) называется T-системой (системой Чебышева).

Положим еще

$$E_0(y)=\|y\|.$$

Очевидно,

$$E_0(y)\geqslant E_1(y)\geqslant E_2(y)\geqslant\ \dots\ ;\quad \lim_{n\to\infty}E_n(y)=0. \tag{4}$$

Исходя из уклонений $E_n(y)$, введем для каждого $y\in X$ последовательность координат

$$h_n(y)=\{E_{n-1}^2(y)-E_n^2(y)\}^{\frac{1}{2}}\operatorname{sign}\lambda_n^{(n)}$$

Из (4) следует, что для каждого $y\in X$

$$\sum_{n=1}^{\infty}h_n^2(y)=\|y\|^2.$$

Теорема Бернштейна. *Пусть X — банахово пространство и $\{g_n\}_1^\infty$ — T-система в нем. Для любой последовательности действительных чисел $\{h_n\}_1^\infty$, для которой $\sum_{n=1}^{\infty}h_n^2<\infty$ найдется элемент $y\in X$ такой, что $h_n(y)=h_n$.*

С. Н. Бернштейн [1] доказал эту теорему в случае $X=C[0,\ 1]$, $g_n=t^{n-1}$. но его доказательство непосредственно переносится на общий случай [2].

Если в условиях теоремы Бернштейна каждый элемент y определяется своими координатами единственным образом, то T-система называется B-системой (системой Бернштейна).

До сих пор остается открытым поставленный С. Н. Бернштейном вопрос: будет ли система $\{t^n\}_0^\infty$ B-системой в $C[0,1]$?

к показал Р. Лонг [3], в общем случае эта проблема решается тельно: он ввел в пространстве c_0 эквивалентную норму, относильно которой естественный базис пространства c_0 стал T-системой, но -системой. Пространство, построенное Лонгом, не является строго ованным.

В данной работе строится локально равномерно выпуклое пространство в нем T-система, которая не является B-системой.

Для каждого $x = \{x_n\}_1^\infty \in c_0$ определим функционал

$$|||x||| = \sup_{n\geqslant 1}\left\{\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2}{n+1+\delta_{n+1}} + b_n\sup_{i>n}|x_i|^2\right) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i|x_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}}; \tag{5}$$

$$b_n = (n+1)\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{(i+1)(i+2+\delta_{i+2})}; \quad a_n = \frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1+\delta_{n+1}}; \tag{6}$$

$$0 < \delta_n < 1, \quad \delta_n > \delta_{n+1}, \quad \delta_n > n\delta_{n+2}^{*}. \tag{7}$$

Лемма. *Функционал* (5) *есть норма в* c_0, *эквивалентная обычной* up-*норме, пространство* c_0 *превращается в строго нормированное про-ранство; норма* (5) *обладает свойством монотонности*

$$|||\sum_{i=n}^{\infty}x_ie_i||| > |||\sum_{i=n+1}^{\infty}x_ie_i||| \text{ при } x_n \neq 0;$$

$_1^\infty$ — *естественный базис в* c_0.

Доказательство. Оценим коэффициенты b_n:

$$b_n = (n+1)\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{(i+1)(i+2+\delta_{i+2})} < (n+1)\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{(i+1)(i+2)} = 1.$$

ерейдем к оценке снизу:

$$b_n = (n+1)\left[\frac{1}{1+\delta_{n+2}}\cdot\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{1+\delta_{n+3}}\cdot\frac{1}{n+2} - \frac{1}{1+\delta_{n+2}}\cdot\frac{1}{n+2+\delta_{n+2}}\right) + \right.$$
$$\left. + \cdots\right] > \frac{1}{1+\delta_{n+2}} = 1 - \frac{\delta_{n+2}}{1+\delta_{n+2}} > 1 - \delta_{n+2}.$$

аким образом, справедлива оценка

$$1 - \frac{\delta_{n+2}}{1+\delta_{n+2}} < b_n < 1. \tag{8}$$

Теперь оценим коэффициенты a_n, опираясь на (7) и (8).

$$a_{n-1} = \frac{b_n}{n} - \frac{1}{n+\delta_n} > \frac{1 - \frac{\delta_{n+2}}{1+\delta_{n+2}}}{n} - \frac{1}{n+\delta_n} = \frac{\delta_n - n\delta_{n+2}}{n(1+\delta_{n+2})(n+\delta_n)} > 0;$$

$$a_{n-1} = \frac{b_n}{n} - \frac{1}{n+\delta_n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\delta_n} = \frac{\delta_n}{n(n+\delta_n)} < \frac{1}{n^2}, \tag{9}$$

т. е. $0 < a_{n-1} < \frac{1}{n^2}$, $(n = 2, 3, \ldots)$.

---

[*] В дальнейшем мы положим $\delta_n = \frac{1}{(n+m)!}$, $m > 0$ и достаточно большое целое сло.

Из (8) и (9) сравнительно просто следует, что $|||x|||$ — норма, эквивалентная sup-норме. Монотонность очевидна. Строгая нормированность обеспечивается слагаемым $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i |x_i|^2$.

В силу указанных свойств нормы система $\{e_i\}$ является T-системой, многочлены наилучшего приближения для элемента x имеют вид

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

и, значит,

$$E_n(x) = |||R_n(x)||| = |||\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i e_i|||, \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Теорема 1. *Существует строго нормированное пространство Банаха с T-системой, не являющейся B-системой.*

Доказательство. Покажем, что $X = (c_0, |||\cdot|||)$ является таким пространством.

Будем искать два различных элемента $x = \{x_n\}_1^{\infty}$ и $y = \{y_n\}_1^{\infty}$, для которых выполнялось бы условие

$$h_n(x) = h_n(y), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Этим и будет доказана теорема. Для удобства обозначим

$$x_n^2 = \xi_n \text{ и } y_n^2 = \eta_n.$$

Определим класс элементов D_+

$$x \in D_+$$

если

1) $x \in c_0$, $x_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

2) Для любого $n \geqslant 2$ выполняется для $R_{n-2}(x)$ неравенство

$$\frac{\xi_{n-1}}{n + \delta_n} + b_{n-1}\xi_n \geqslant \sup_{i \geqslant n-1} \left\{ \frac{\sum\limits_{q=n-1}^{i} \xi_q}{i + 1 + \delta_{i+1}} + b_i \sup_{q > i} \xi_q \right\}.$$

$$\frac{\xi_{n-1}}{n + \delta_n} + b_{n-1}\xi_n \geqslant b_{n-2}\xi_{n-1}.$$

Норма для элемента $R_n(x)$, где $x \in D_+$, выглядит так:

$$E_n(x) = |||R_n(x)||| = \left\{ \frac{\xi_{n+1}}{n + 2 + \delta_{n+2}} + b_{n+1}\xi_{n+2} + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \xi_i \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим бесконечную систему уравнений

$$\lambda_n \left(\frac{1}{n + 1 + \delta_{n+1}} + a_n \right) + \left(b_n - \frac{1}{n + 2 + \delta_{n+2}} \right) \lambda_{n+1} = b_{n+1} \lambda_{n+2}. \tag{10}$$

Используя определение чисел a_n и b_n и деля n-е уравнение на b_{n+1}, получим систему

$$\frac{\lambda_n}{n + 1} + \frac{n + 1}{n + 2} \lambda_{n+1} = \lambda_{n+2}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Зададим $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ и найдем все λ_n. Тогда, как нетрудно видеть, $\lambda_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$.

$$\xi_n = \eta_n + \lambda_n, \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{11}$$

положив, что x и $y \in D_+$, покажем, что они являются искомыми ентами:

$$x \neq y \quad h_n(x) = h_n(y), \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Действительно,

$$h_n^2(x) = \xi_n\left(\frac{1}{n+1+\delta_{n+1}} + a_n\right) + \left(b_n - \frac{1}{n+2+\delta_{n+2}}\right)\xi_{n+1} - b_{n+1}\xi_{n+2} =$$

$$= \eta_n\left(\frac{1}{n+1+\delta_{n+1}} + a_n\right) + \left(b_n - \frac{1}{n+2+\delta_{n+2}}\right)\eta_{n+1} - b_{n+1}\eta_{n+2} +$$

$$+ \lambda_n\left(\frac{1}{n+1+\delta_{n+1}} + a_n\right) + \left(b_n - \frac{1}{n+2+\delta_{n+2}}\right)\lambda_{n+1} - b_{n+1}\lambda_{n+2} = h_n^2(y).$$

Покажем, что при выборе $\delta_n = \frac{1}{(n+m)!}$ m — достаточно большое по- жительное целое число, можно найти элементы x и $y \in D_+$, удовле- ряющие (11).

Положим

$$x = \left\{\sqrt{\frac{u_n}{n!}}\right\}_1^\infty, \quad y = \left\{\sqrt{\frac{v_n}{n!}}\right\}_1^\infty.$$

Переформулируем условие 3) из определения D_+ применительно к и v_n:

$$\frac{u_{n-1}}{(n-1)!\,(n+\delta_n)} + b_{n-1}\frac{u_n}{n!} \geqslant \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} > b_{n-2}\frac{u_{n-1}}{(n-1)!}, \quad (n > 1);$$

$$u_n \geqslant \frac{n(n-1+\delta_n)}{b_{n-1}(n+\delta_n)}\,u_{n-1};$$

алогичное неравенство получаем для v_n.

Обозначим через

$$d_n = \frac{n(n-1+\delta_n)}{b_{n-1}(n+\delta_n)}, \quad (n > 1);$$

$$d_n \approx n - 1 \text{ с точностью до } \frac{1}{(n+m)!}; \quad u_n = d_n u_{n-1} + \mu_n, \tag{12}$$

где $\mu_n \geqslant 0$.

ловие (12) достаточно для условия 3).

Построим u_n и v_n так, чтобы удовлетворились (11) и (12). Непосред- енная проверка показывает, что для этого достаточно положить

$$u_1 = N + 1; \qquad\qquad v_1 = N;$$

$$u_n = \begin{cases} n \text{ — четное } d_n u_{n-1} + 1; \\ n \text{ — нечетное } d_n u_{n-1} + d_n + 2. \end{cases} \qquad v_n = \begin{cases} n \text{ — четное } u_n + 1; \\ n \text{ — нечетное } d_n v_{n-1} + 1. \end{cases}$$

В дальнейшем будем проводить доказательство для u_n, но все ана- гично можно сделать и для v_n.

Числа u_n удовлетворяют неравенствам

$$u_n \leqslant d_n u_{n-1} + d_n + 2. \tag{13}$$

Покажем, что выполнено условие 1), т. е. $x \in c_0$. Строим последова- ьность w_n

$$w_1 = N + 1; \quad w_n = d_n w_{n-1} + 2, \quad (n > 1);$$

очевидно,

$$u_n \leqslant w_n.$$

$$w_n = \prod_{i=2}^{n} d_i \cdot w_1 + 2 \sum_{q=3}^{n} \prod_{i=q}^{n} d_i + 2 =$$

$$= \prod_{i=2}^{n} d_i \left[w_1 + \frac{2}{d_2} \left(1 + \sum_{q=3}^{n} \frac{1}{\prod\limits_{i=3}^{q} d_i} \right) \right];$$

$$\frac{\prod\limits_{i=2}^{n} d_i}{n!} < \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\delta_{i+1}}{i} \right)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - \delta_{i+1}) \cdot \prod\limits_{i=2}^{n} \left(1 + \frac{\delta_i}{i} \right)} \cdot \frac{1}{n}.$$

Все произведения сходятся. В квадратных скобках стоит ограниченная величина. Следовательно, $\frac{w_n}{n!} \to 0$ как $\frac{1}{n}$. Из (14) следует, что $x \in c_0$ (аналогично $y \in c_0$).

Покажем, что выполнено условие 2) в определении D_+. Для этого достаточно доказать, что

$$\frac{\xi_{n-1}}{n + \delta_n} + b_{n-1}\xi_n \geqslant \frac{\xi_{n-1} + \xi_n}{n + 1 + \delta_{n+1}} + b_n \xi_{n+1} \, (n \geqslant 2) \qquad (15$$

и

$$\xi_n \geqslant \xi_{n+1}.$$

Оценим $b_n \xi_{n+1}$ из (13):

$$b_n \xi_{n+1} \leqslant \frac{n + \delta_{n+1}}{n + 1 + \delta_{n+1}} \cdot \xi_n + \frac{n + \delta_{n+1}}{(n + 1 + \delta_{n+1})\, n!} + \frac{2}{(n + 1)!}.$$

Уменьшим левую часть неравенства (15):

$$\frac{\xi_{n-1}}{n + \delta_n} + b_{n-1}\xi_n > \frac{\xi_{n-1}}{n + \delta_n} + \xi_n - \delta_{n+1}\xi_n. \qquad (16$$

Увеличим правую часть неравенства (15):

$$\frac{\xi_{n-1} + \xi_n}{n + 1 + \delta_{n+1}} + b_n \xi_{n+1} \leqslant \frac{\xi_{n-1} + \xi_n}{n + 1 + \delta_{n+1}} + \frac{n + \delta_{n+1}}{n + 1 + \delta_{n+1}} \cdot \xi_n +$$

$$+ \frac{n + \delta_{n+1}}{(n + 1 + \delta_{n+1})\, n!} + \frac{2}{(n + 1)!}. \qquad (17)$$

Сопоставляя (16) и (17), приходим к неравенству, более сильному, чем (15).

$$\frac{\xi_{n-1}}{n + \delta_n} + \xi_n - \delta_{n+1}\xi_n \geqslant \frac{\xi_{n-1} + \xi_n}{n + 1 + \delta_{n+1}} + \frac{n + \delta_{n+1}}{n + 1 + \delta_{n+1}} \cdot \left(\xi_n + \frac{1}{n!} \right) + \frac{2}{(n + 1)!}.$$

Производя тождественные преобразования и заменяя ξ_n через $\frac{u_n}{n!}$, получаем

$$\frac{u_{n-1}(1 - \delta_n + \delta_{n+1})}{(n - 1)(n + \delta_n)(n + 1 + \delta_{n+1})} \geqslant \delta_{n+1} \frac{u_n}{n!} + \frac{n + \delta_{n+1}}{(n + 1 + \delta_{n+1})\, n!} + \frac{2}{(n + 1)!}. \qquad (18)$$

Заметим, что из определения u_n и из того, что $d_n \approx n - 1$ следует $u_n \geqslant N(n - 1)!$.

Если выбрать достаточно большие N и m, неравенство будет справедливо для всех $n \geqslant 2$.

Проверим неравенства $\xi_n \geqslant \xi_{n+1}$, заменяя ξ_n через $\frac{u_n}{n!}$ для четных после азований; получаем

$$u_n(n+1-d_{n+1}) \geqslant d_{n+1}+2;$$

нечетных

$$u_n(n+1-d_{n+1}) \geqslant 1.$$

выбора N и m они выполняются. Следовательно, $x \in D_+$ (аналогично $y \in D_+$). Теорема доказана.

Нетрудно показать, что для всех векторов $z(\mu)$ таких, что

$$z_n^2(\mu) = \mu x_n^2 + (1-\mu)\, y_n^2, \quad (0 \leqslant \mu \leqslant 1)$$

же будет

$$h_n(z(\mu)) = h_n(x) = h_n(y), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть x и $y \in D_+$ и удовлетворяют условию (11). В силу теоремы 1 ем: $h_n(x) = h_n(y)$

$$E_n^2(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} h_i^2(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} h_i^2(y) = E_n^2(y);$$

$$|||R_n(x)|||^2 = E_n^2(x) = E_n^2(y) = |||R_n(y)|||^2. \tag{19}$$

Зведем в c_0 следующие эквивалентные нормы:

$$\|x\|_1 = \sup_{n \geqslant 1} \left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}{n+1+\delta_{n+1}} + b_n \sup_{i>n} |x_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\|x\|_2 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|R_{n-1}(x)\|_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$J(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{i=n}^{\infty} a_i |x_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\|x\|_3 = \left\{ \|x\|_2^2 + J^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |||R_{n-1}(x)|||^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Пространство* $(c_0, \|.\|_3)$ *является локально равномерно уклым пространством с* T*-системой, не являющейся* B*-системой.*

Доказательство локальной равномерной выпуклости $(c_0, \|.\|_3)$ провося аналогично доказательству того, что любое сепарабельное простран с базисом изоморфно локально равномерно выпуклому простран [4].

Так как $\|.\|_3$ удовлетворяет следующим свойствам монотонности

$$\left\| \sum_{i=n}^{\infty} x_i e_i \right\|_3 > \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i e_i \right\|_3 \text{ при } x_n \neq 0,$$

истема $\{e_i\}_1^{\infty}$ является T-системой и многочлены наилучшего прибли ия имеют вид

$$y_m = S_m(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \quad (m = 1, 2, \ldots);$$

$$E_m(x) = \|R_m(x)\|_3, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим элементы x и $y \in D_+$ и удовлетворяющие (11). Испо зуя (19), получаем

$$\| R_m(x) \|_3 = \{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} ||| R_{n-1}(R_m(x)) |||^2 \}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \{ (1 - 2^{-m-1}) ||| R_m(x) |||^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n-1} ||| R_n(x) |||^2 \}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \{ (1 - 2^{-m-1}) ||| R_m(y) |||^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n-1} ||| R_n(y) |||^2 \}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \| R_m(y) \|_3 = E_m(y), \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Следовательно, в $(c_0, \|\cdot\|_3)$

$$h_m(x) = h_m(y). \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Теорема доказана.

Доказанные теоремы подтверждают мысль о том, что единственн восстанавливаемого элемента не зависит от геометрических свойств е ничной сферы, а зависит только от алгебраических свойств нормы.

Выражаю глубокую благодарность М. И. Кадецу, обратившему м внимание на эту задачу, за руководство в процессе ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений, т. II. Изд-во АН СССР, (1954).
2. М. И. Кадец. О гомеоморфизме некоторых пространств Банаха. ДАН СССР, 465—468, (1953).
3. R. G. Long. AT-system which is not a Bernstein system. Proc. Amer. Ma Soc., 8, № 5, 925—927, 1957.
4. М. И. Кадец. Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабе ных бесконечномерных пространств Банаха. Ж. «Функциональный анализ и его прило ния», т. I, вып. 1. Издание АН СССР, 61—70, (1967).

Поступила 10 июня 1967