ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
Вып. 6 1968

ОБОБЩЕНИЕ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ АБЕЛЯ И ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРА НА РЯДЫ НЬЮТОНА С УЗЛАМИ, УХОДЯЩИМИ В БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Э. В. Морозюк

Для степенных рядов справедливы известные теоремы Абеля (вторая) и Таубера [1]. Они неоднократно служили предметом различных обобщений (см., например, [2, 3, 4]).

Наиболее известны распространения этих теорем на специальные ряды: ряды Дирихле с вещественными показателями [5], ряды по полиномам Фабера (6), некоторые типы рядов Ньютона [7, 8] и т. п.

В настоящей работе рассматриваются ряды Ньютона

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z-\lambda_k) \tag{1}$$

с узлами λ_k, уходящими в бесконечность ($|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$) и лежащими внутри угла раствора меньше π. Переносом и поворотом всегда можно добиться того, что вершина этого угла попадет в начало координат, а ось симметрии совпадет с вещественной осью, т. е. можно считать $|\arg \lambda_k| \leqslant \psi_0$, $0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Коэффициенты ряда (1) записаны в виде частного $\frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n} \lambda_k}$ для удобства

Известно [9], что в случае сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}$, ряд (1) сходится либо на всей плоскости, либо только в точках λ_k, $k = 1, 2, 3 \ldots$

Поэтому для нас представляет интерес только случай, когда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}$ расходится.

Введем определения.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность* $\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условиям* (β), *если*

1) $|\arg \lambda_k| \leqslant \psi_0$, $0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$;
2) $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$;
3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}$ расходится.

Заметим, что в условиях (β) не содержится требования монотонности возрастания $|\lambda_k|$.

Определение 2. *Пусть z_0 — некоторая точка плоскости и узлы (1) лежат внутри угла* $\arg|\lambda_k| \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$. *Тогда под* $G(z_0, \delta, R)$ *понимать замкнутую область, определяемую неравенствами*

$$|\arg(z - z_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \delta; \qquad 0 \leqslant |z - z_0| \leqslant R,$$

$0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \psi_0, \quad R > 0.$

Для рядов Ньютона с узлами, удовлетворяющими условиям (β), раведлив аналог второй теоремы Абеля.

Частный случай таких рядов, когда $\lambda_k = k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ рассмотрен Е. Нёрлундом [7].

И. Мартин [8] обобщил этот результат на случай рядов (1) с узлами λ_k, ремящимися к вещественной оси ($\arg \lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$), причем $|\lambda_k| \to \infty$ $k \to \infty$, $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$ при любом k и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}$ расходится.

Г. Л. Лунцем и Н. С. Насековской было замечено, что: 1) доказальство И. Мартина сохраняет силу, если условие $\arg \lambda_k \to 0$ заменить словием $|\arg \lambda_k| \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$; 2) условие монотонности возрастания $|\lambda_k|$ этом доказательстве не используется.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Пусть ряд (1) сходится в точке z_0, а узлы его удовлетворяют условиям (β). Тогда он равномерно сходится в каждой области* (z_0, δ, R), $R > 0$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \psi_0$.

При доказательстве теоремы устанавливается справедливость неравенства, которое будет использоваться в дальнейшем. Приведем это неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \right| \leqslant A, \tag{2}$$

е A не зависит от z из $G(z_0, \delta, R)$; последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям (β).

Требование теоремы $|\arg \lambda_k| \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$ можно несколько ослабить. казывается, аналогичная теорема остается верной, если бесконечное ножество узлов будет иметь произвольные аргументы, но таких узлов лжно быть не слишком много; основная часть узлов по-прежнему должна жать внутри угла раствора меньше π. А именно, справедлива слеющая

Теорема 1. *Из сходимости ряда* (1) *в точке z_0 следует его равнорная сходимость в* $G(z_0, \delta, R)$, *если существует последовательность* }, *удовлетворяющая условиям* (β), *такая, что* $\lambda'_k = \lambda_k$ *для узлов, лежа- внутри угла* $|\arg \lambda_k| \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, *а члены последовательности* λ'_{k_s}, *тветствующие узлам* λ_{k_s}, *лежащим вне этого угла, удовлетворяют овиям:*

$$\left| \frac{\lambda'_{k_s}}{\lambda_{k_s}} \right| < q = \mathrm{const}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda'_{k_s}|} < \infty.$$

Итак, часть узлов может иметь произвольные аргументы. Однако бование того, чтобы основная масса узлов лежала в угле раствора меньше π, существенно. Это видно на примере ряда Стирлинга [9]. Узл этого ряда $\lambda_{2m-1} = -m$, $\lambda_{2m} = m$, $m = 1, 2, \ldots$ лежат на двух луча угол между которыми равен π. Известно, что из сходимости ряда Сти линга в точке z_0, отличной от узла, нельзя сделать вывода о сходимос в ее окрестности.

Поскольку теорема Таубера в известном смысле является обращ нием второй теоремы Абеля, то в аналоге теоремы Таубера естествен в качестве условий, налагаемых на последовательности узлов ряда (брать те же условия, что и в аналогах теоремы Абеля.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{\lambda_k\}$ *узлов ряда (1) удов творяет условиям* (β), z_0 — *точка границы области сходимости ря и коэффициенты* a_n *таковы, что при* $n \to \infty$

$$\left| \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \lambda_{n+1} \prod_{k=1}^{n} (z_0 - \lambda_k) \right| = 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если при стремлении z к z_0 *вдоль некоторого пути, лежащего в* $G(z_0, \delta$,

$$\lim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k) = S,$$

то ряд (1) сходится в точке z_0 *к сумме, равной* S.

Доказательство. Положим $N = \left[\frac{1}{|z - z_0|}\right]$ и покажем, что п $z \to z_0$ стремится к нулю

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k) - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z_0 - \lambda_k) =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k) - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \left[\prod_{k=1}^{n} (z_0 - \lambda_k) - \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k) \right].$$

Начнем с оценки первого слагаемого правой части (4)

$$S_1(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k).$$

При достаточно больших n из (3) получаем

$$\left| \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \lambda_{n+1} \prod_{k=1}^{n} (z_0 - \lambda_k)\, n \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Будем считать z настолько близким к z_0, что для $n \geqslant N+1$ это равенство выполняется. Тогда

$$|S_1(z)| \leqslant \varepsilon \frac{1}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \right| \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \right| \cdot \frac{|z-z_0|}{|\lambda_{n+1}|} =$$

$$= \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \right| \cdot \left| \frac{z_0-\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \right| \leqslant \varepsilon c A,$$

е постоянные A и c не зависят от z из $G(z_0, \delta, R)$; постоянная A едена в неравенстве (2), а неравенство

$$\left| \frac{z_0-\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \right| < c$$

евидно.

Итак, $S_1(z) \to 0$ при $z \to z_0$.

Перейдем к оценке второй суммы правой части (4).

$$|S_2(z)| = \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n} \lambda_k} \left[\prod_{k=1}^{n} (z_0-\lambda_k) - \prod_{k=1}^{n} (z-\lambda_k) \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z_0-\lambda_k) \lambda_{n+1} n \right| \cdot \frac{1}{n} \cdot \left| 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \right| \cdot \frac{1}{|\lambda_{n+1}|}.$$

юбь $\frac{1}{|\lambda_{n+1}|} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $\frac{1}{|\lambda_{n+1}|} < d = \text{const}$.

Преобразуем множитель

$$\frac{1}{n} \left| 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \right| = P_1(z, n) \cdot P_2(z, n), \tag{5}$$

$$P_1(z, n) = \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \right)^{\frac{j-1}{n}} \right|$$

$$P_2(z, n) = \left| 1 - \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \right)^{\frac{1}{n}} \right|.$$

Очевидно, $P_1(z, n) \leqslant g$, где g — постоянная, не зависящая от n и z $G(z_0, \delta, R)$, если модуль каждого слагаемого меньше или равен g.

Покажем, что начиная с некоторого номера $\left| \frac{z-\lambda_k}{z_0-z_k} \right| < 1$, если z принадлежит $G(z_0, \delta, R)$.

Преобразуем

$$\left| \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \right| = \left| 1 - \frac{z-z_0}{\lambda_k \left(1 - \frac{z_0}{\lambda_k} \right)} \right| = |1 - w(z, k)|,$$

Обозначим $1-\frac{z_0}{\lambda_k}=r_k e^{i\varphi_k}$, причем $r_k\to 1$ и $\varphi_k\to 0$, если $k\to$ Можем считать $|\varphi_k|<\frac{\delta}{2}$ при $k>K_1$.

Аналогично, $\frac{z-z_0}{\lambda_k}=\rho_k(z)\,e^{i\xi_k(z)}$, причем $\rho_k(z)\to 0$ при $k\to\infty$ рав мерно по z из $G(z_0,\ \delta,\ R)$, а $|\xi_k(z)|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta$.

Тогда

$$w(z,\ k)=\frac{\rho_k(z)}{r_k}\,e^{i[\xi_k(z)-\varphi_k]},$$

где $\frac{\rho_k(z)}{r_k}\to 0$ при $k\to\infty$ равномерно по z из $G(z_0,\ \delta,\ R)$, а $|\xi_k(z)-\varphi_k|<\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}$.

Поэтому для всех z из $G(z_0,\ \delta,\ R)$ и всех номеров, начиная с не торого $K\ (K\geqslant K_1)$, значения $w(z,\ k)$ лежат внутри круга $|w-1|<$ а это значит, что

$$\left|\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\right|=|1-w(z,\ k)|<1.$$

Таким образом,

$$g=\max_{m=1,2,\ldots,K}\left\{1,\ \sup_{z\in G(z_0,\ \delta,\ R)}\prod_{k=1}^{m}\left|\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\right|\right\}.$$

Можно показать, что второй множитель (5)

$$P_2(z,\ n)\leqslant h\,|z-z_0|,$$

h не зависит от n и z из $G(z_0,\ \delta,\ R)$.

В результате для (5) получаем оценку

$$\frac{1}{n}\left|1-\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\right|\leqslant gh\,|z-z_0|,$$

причем из определения N следует, что $|z-z_0|\leqslant\frac{1}{N}$.

Поэтому для $S_2(z)$ окончательно имеем:

$$\left|S_2(z)\right|\leqslant dgh\,\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k}\prod_{k=1}^{n}(z_0-\lambda_k)\,\lambda_{n+1}n\right|\to 0$$

при $N\to\infty$, т. е. при $z\to z_0$, по известной лемме [1], как среднее ари метическое слагаемых, стремящихся к нулю.

Теорема доказана.

В некоторых частных случаях условие (3) на коэффициенты ря Ньютона можно заменить условием

$$\left|a_n\lambda_n e^{-z_0\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}}\right|=0\left(\frac{1}{n}\right),$$

выполнение которого легче проверить.

Чтобы формулировать теорему Таубера для такого случая, введ следующее понятие.

Определение 3. *Назовем последовательность $\{\alpha_k\}$ правильно возрастающей, если*

$$a\eta(k) \leqslant \alpha_k \leqslant b\eta(k),$$

где a и b — положительные постоянные, $0 < a \leqslant b < +\infty$, а $\eta(x)$ — непрерывная функция, имеющая положительную непрерывную производную.

Очевидно, правильно возрастающая последовательность может быть немонотонной.

Теорема 3. *Пусть последовательность $\{\lambda_k^2\}$ удовлетворяет условиям (β), а последовательность $\{\mathrm{Re}\lambda_k\}$ правильно возрастает; точка z_0 является точкой границы области сходимости ряда (1), отличной от узла ряда, причем ее аргумент удовлетворяет одному из неравенств*

$$|\arg z_0| < \frac{\pi}{4} - \frac{\psi_0}{4} \quad \textit{или} \quad |\arg z_0 - \pi| < \frac{\pi}{4} - \frac{\psi_0}{2}$$

для коэффициентов a_n справедливо (6). Тогда если при стремлении z к z_0 вдоль некоторого пути, лежащего в $G(z_0, \delta, R)$,

$$\lim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k) = S,$$

то ряд (1) сходится в точке z_0 к сумме, равной S.

Очевидно, если последовательность $\{\lambda_k^2\}$ удовлетворяет условиям (β), то тем же условиям удовлетворяет и последовательность $\{\lambda_k\}$, причем $|\arg \lambda_k| \leqslant \frac{\psi_0}{2} < \frac{\pi}{4}$.

Раствор центрального угла сектора $G(z_0, \delta, R)$, согласно определению 2, зависит от раствора угла, в котором лежат узлы ряда (1). Поэтому в данном случае для z из $G(z_0, \delta, R)$

$$|\arg(z - z_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\psi_0}{2} - \delta, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \frac{\psi_0}{2}.$$

Доказательство теоремы 3 вполне аналогично доказательству теоремы 2, только вместо неравенства (2) используются неравенства, которые мы докажем в следующих двух леммах.

При доказательстве первой леммы дважды используется формула суммирования Эйлера—Маклорена [10], состоящая в следующем: пусть $f(t)$ при $t \geqslant a$, $0 < a \leqslant 1$ положительна, имеет непрерывную отрицательную производную и стремится к нулю при $t \to \infty$; тогда

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) = \int_1^n f(t)\,dt + f(1) + \int_1^n (t - [t]) f'(t)\,dt, \tag{7}$$

где последний интеграл имеет предел при $n \to \infty$.

Лемма 1. *Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям (β), а последовательность $\{\mathrm{Re}\,\lambda_k\}$ правильно возрастает.* Тогда в каждой области $G(z_0, \delta, R)$ справедливо неравенство

$$|z - z_0| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \exp\left[-\mathrm{Re}\left(\frac{z - z_0}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}\right)\right] \leqslant B,$$

где B — положительная постоянная, не зависящая от z из $G(z_0, \delta, R)$ и, вообще говоря, зависящая от z_0, δ, R).

Доказательство. Из определения 3 и условий (β) следует, чт $\eta(x) > 0$ при $x \geqslant 1$ и $\eta(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

Обозначим

$$H(z) = |z - z_0| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \exp\left[-\operatorname{Re}\left(\frac{z-z_0}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\frac{z-z_0}{\lambda_n} \exp\left[-\operatorname{Re}\left(\frac{z-z_0}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}\right)\right],$$

где $\varphi = \arg(z - z_0) - \arg\lambda_n$, а $\cos\varphi > \sin\delta$.

Очевидно,

$$H(z) \leqslant \frac{1}{\sin\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\frac{z-z_0}{\lambda_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\frac{z-z_0}{\lambda_k}\right).$$

Для $\operatorname{Re}\frac{z-z_0}{\lambda_k}$ несложно получить оценки сверху и снизу:

$$\operatorname{Re}\frac{z-z_0}{\lambda_k} \leqslant \left[1 + \frac{\operatorname{tg}\psi_0}{\operatorname{tg}(\psi_0+\delta)}\right] \frac{1}{a} \frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(k)} = a_1 \frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(k)}$$

и

$$\operatorname{Re}\frac{z-z_0}{\lambda_k} \geqslant \frac{1 - \dfrac{\operatorname{tg}\psi_0}{\operatorname{tg}(\psi_0+\delta)}}{1 + \operatorname{tg}^2\psi_0} \frac{1}{b} \frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(k)} = b_1 \frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(k)}.$$

Учитывая эти оценки, получаем

$$H(z) \leqslant \frac{1}{\sin\delta} \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(n)} \exp\left[-\frac{b_1}{2} \operatorname{Re}(z-z_0) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\eta(k)}\right].$$

К суммированию $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\eta(k)}$ применим формулу (7):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\eta(k)} = \int_1^n \frac{dt}{\eta(t)} + u(n);$$

абсолютная величина $|u(n)|$ ограничена постоянной, не зависящей от поэтому

$$\exp\left[-\frac{b_1}{2} \operatorname{Re}(z-z_0)\, u(n)\right] < c,$$

где c не зависит от n и z из $G(z_0, \delta, R)$. В результате имеем

$$H(z) \leqslant \frac{a_1 c}{\sin\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(n)} \exp\left(-\frac{b_1}{2} \operatorname{Re}(z-z_0) \int_1^n \frac{dt}{\eta(t)}\right] =$$

$$= \frac{a_1 c}{\sin\delta} \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} \frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(n)} \exp\left[-\frac{b_1}{2} \operatorname{Re}(z-z_0) \int_1^n \frac{dt}{\eta(t)}\right].$$

Нетрудно убедиться, что к суммированию последнего выражения ть применена формула (7). Получаем

$$H(z) \leqslant \frac{a_1 c}{\sin\delta} \lim_{p\to\infty} \left\{-\frac{2}{b_1}\exp\left[-\frac{b_1}{2}\operatorname{Re}(z-z_0)\int_1^p \frac{dt}{\eta(t)}\right] + \frac{2}{b_1} + \right.$$

$$\left. -\frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(1)} + \int_1^p (\xi-[\xi])\left[\frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(\xi)}\exp\left(-\frac{b_1}{2}\operatorname{Re}(z-z_0)\int_1^\xi \frac{dt}{\eta(t)}\right)\right]_\xi' d\xi\right\} =$$

$$= \frac{a_1 c}{\sin\delta}\left\{\frac{2}{b_1} - \frac{2}{b_1}\exp\left[-\frac{b_1}{2}\operatorname{Re}(z-z_0)\lim_{p\to\infty}\int_1^p \frac{dt}{\eta(t)}\right] + \frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(1)} + \right.$$

$$\left. + \int_1^\infty (\xi-[\xi])\left[\frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(\xi)}\exp\left(-\frac{b_1}{2}\operatorname{Re}(z-z_0)\int_1^\xi \frac{dt}{\eta(t)}\right)\right]_\xi' d\xi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1 c}{\sin\delta}\left(\frac{2}{b_1} + 2d\right) = \text{const},$$

где d — постоянная; $\frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(1)} < d$ для всех z из $G(z_0, \delta, R)$. Справедливость использованных здесь оценок

$$\exp\left[-\frac{b_1}{2}\operatorname{Re}(z-z_0)\lim_{p\to\infty}\int_1^p \frac{dt}{\eta(t)}\right] < 1$$

$$\int_1^\infty (\xi-[\xi]_\rho)\left\{\frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(\xi)}\exp\left[-\frac{b_1}{2}\operatorname{Re}(z-z_0)\int_1^\xi \frac{dt}{\eta(t)}\right]\right\}_\xi' d\xi < \frac{\operatorname{Re}(z-z_0)}{\eta(1)}$$

нетрудно проверить.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям* (β), *для любой области $G(z_0, \delta, R)$ можно найти такой номер K, что $n > K$ для всех z из $G(z_0, \delta, R)$ выполняется неравенство*

$$\left|\exp\left[\frac{z-z_0}{2}\sum_{k=K}^n \frac{1}{\lambda_k} + \sum_{j=2}^n\left(\frac{z^j - z_0^j}{j}\sum_{k=K}^n \frac{1}{\lambda_k^j}\right)\right]\right| > 1.$$

Доказательство. Пусть r таково, что $|z| < r$ для всех z из $G(z_0, \delta, R)$.

Выберем ζ и ξ такие, что

$$\left|\arg\left[1 + i4(1+\operatorname{tg}^2\psi_0)\frac{\frac{r}{\zeta}}{1-\frac{r}{\zeta}}\right]\right| < \frac{\delta}{2}$$

$\xi > \max\{r, \zeta\}$.

Из условий (β) следует, что $\operatorname{Re}\lambda_k \to \infty$ при $k\to\infty$.

Поэтому существует такой номер K, что $\operatorname{Re}\lambda_k > \xi$ при $k > K$.

Рассмотрим

$$\Phi(z, n) = \left|\exp\left[\frac{z-z_0}{2}\sum_{k=K}^n \frac{1}{\lambda_k} + \sum_{j=2}^n\left(\frac{z^j - z_0^j}{j}\sum_{k=K}^n \frac{1}{\lambda_k^j}\right)\right]\right| =$$

$$= \left|\exp\left\{\frac{z-z_0}{2}\sum_{k=K}^n \frac{1}{\lambda_k}[1+\varphi(z, n)]\right\}\right|,$$

где

$$\varphi(z, n) = 2\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\sum_{l=0}^{j-1} z^{j-l-1} z_0^l}{j} \frac{\sum_{k=K}^{n} \frac{1}{\lambda_k^j}}{\sum_{k=K}^{n} \frac{1}{\lambda_k}}\right).$$

Покажем, что

$$|\arg[1+\varphi(z, n)]| < \frac{\delta}{2}. \tag{8}$$

Оценим

$$|\varphi(z, n)| \leqslant 2\sum_{j=2}^{n}\left(r^{j-1}\frac{\left|\sum_{k=K}^{n}\frac{1}{\lambda_k^j}\right|}{\left|\sum_{k=K}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\right|}\right) \leqslant 2\sum_{j=2}^{n}\left(r^{j-1}\frac{\sum_{k=K}^{n}\frac{1}{|\lambda_k^j|}}{\sum_{k=K}^{n}\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_k}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2(1+\operatorname{tg}^2\psi_0)\sum_{j=2}^{n}\left(r^{j-1}\frac{\sum_{k=K}^{n}\frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda_k)^j}}{\sum_{k=K}^{n}\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_k}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2(1+\operatorname{tg}^2\psi_0)\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{r}{\xi}\right)^{j-1} \leqslant 2(1+\operatorname{tg}^2\psi_0)\frac{\frac{r}{\xi}}{1-\frac{r}{\xi}}.$$

В силу выбора ξ отсюда вытекает, что для всех z из $G(z_0, \delta, R)$ и всех $n > K$ выполняется неравенство (8), и следовательно,

$$\left|\arg\left\{\frac{z-z_0}{2}\sum_{k=K}^{n}\frac{1}{\lambda_k}[1+\varphi(z, n)]\right\}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}.$$

Поэтому

$$\Phi(z, n) > \exp\left\{\left|\frac{z-z_0}{2}\sum_{k=K}^{n}\frac{1}{\lambda_k}[1+\varphi(z, n)]\right|\sin\delta\right\} > 1.$$

Лемма доказана.

Теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3, легко доказываются также и в случае узлов, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Автор выражает глубокую признательность М. Г. Хапланову за научное руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Ч. Титчмарш. Теория функций. ГТТИ, М.—Л., 1951.
2. К. В. Бороздин. Обобщение теоремы Абеля. ДАН СССР, 137, № 6, 1270—1273 (1961).
3. Н. А. Давыдов. Обобщение второй теоремы Абеля. УМН, т. X, вып. 3 (65), 135—138, 1955.
4. Э. В. Морозюк. О некоторых обобщениях второй теоремы Абеля. Материалы третьей научной конференции аспирантов. Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1961, стр. 86—91.
5. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций ГТТИ, М.—Л., 1950.

6. П. К. Суетин. Теоремы Абеля и Таубера для рядов по многочленам Фабера. ДАН СССР, 91, № 1, 25—28 (1953).
7. N. E. Nörlund. Differenzenrechnung. Изд-во Шпрингера, Берлин, 1926.
8. I. Martin. Séries d'interpolation et de facultés. Bull. Sc. math., t. 75, 21—32 (1951).
9. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, М., 1959.
10. Г. Харди. Расходящиеся ряды. Изд-во иностр. лит., М., 1951.

Поступила 17 мая 1967 г.