О РЕГУЛЯРНОСТИ РОСТА СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. Ф. Гришин

В настоящей работе изучаются некоторые свойства функций субгармонических во всей комплексной плоскости Z и в верхней полуплоскости Z_+. Мы будем рассматривать лишь функции конечного порядка.

Введем несколько определений.

Назовем уточненный порядок $\rho(r)$ формальным порядком субгармонической функции $u(z)$, если

$$\sup_{|z|\leqslant r} u(z) = B(r) \leqslant M_1 r^{\rho(r)} \text{ (область } Z),$$

$$\sup_{|z|\leqslant r,\ z\in Z_+} u(z) = B(r) \leqslant M_1 r^{\rho(r)} \text{ (область } Z_+).$$

В дальнейшем выражение $r^{\rho(r)}$ будем обозначать $\tilde{r}$.

Обозначим через $C(z, a)$ круг с центром в точке z радиуса a. Будем считать, что мера μ имеет формальный порядок $\rho(r)$, если $\mu(C(0, r)) \leqslant M_2\tilde{r}$.

По субгармонической функции $u(z)$ строим функцию

$$u_h(z) = \frac{1}{\tilde{r}}\{u(z+hz) - u(z)\}.$$

Назовем исключительным любое множество C, вне которого $u_h(z) \rightrightarrows 0$ при $h\to 0$. Это значит, что по любому $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|h| < \delta(\varepsilon)$, $z \bar{\in} C$, $z+hz \bar{\in} C$ будет выполняться неравенство

$$|u_h(z)| < \varepsilon.$$

По заданной мере строим функции

$$v_h(z) = \frac{1}{\tilde{r}}\int\limits_{C\left(z,\ \frac{1}{4}r\right)} \ln\left|\frac{z+hz-\zeta}{z-\zeta}\right| d\mu(\zeta) \text{ (область } Z),$$

$$v_h(z) = \frac{1}{\tilde{r}}\int\limits_{C\left(z,\ \frac{1}{4}r\right)} \frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{(z+hz-\zeta)(z-\bar{\zeta})}{(z+hz-\bar{\zeta})(z-\zeta)}\right| d\mu(\zeta) \text{ (область } Z_+).$$

Во втором случае предполагается, что $\sup\mu \subseteq Z_+$, $\arg\zeta = \varphi$, а на вещественной оси ядро

$$\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right|$$

определяется по непрерывности и равно

$$\frac{2y\zeta}{(\zeta-x)^2+y^2},\quad z = x+iy.$$

Исключительным множеством для меры мы назовем множество, вне которого функция $v_h(z) \rightrightarrows 0$ при $h \to 0$.

Будут рассматриваться исключительные множества C, состоящие из кругов $C_j = C(z_j, a_j)$. При этом мы будем пользоваться такими характеристиками множества C.

1. Верхняя линейная плотность

$$\rho^*(C) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \sum_{|z_j|<r} a_j.$$

2. Угол α, под которым видно множество кругов C из начала координат. Пусть круг C_j виден под углом α_j. Тогда, по определению,

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j.$$

3. Сумма радиусов кругов C_j

$$R = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad (R \leqslant \infty).$$

Чем у́же исключительное множество, тем регулярнее растет субгармоническая функция. Мы рассмотрим четыре класса субгармонических функций. К классам *а*, *б*, *в*, *г* отнесем субгармонические функции, у которых имеются исключительные множества, состоящие из кругов

а) со сколь угодно малой верхней линейной плотностью;

б) с нулевой линейной плотностью;

в) видимых из начала координат под конечным углом;

г) с конечной суммой радиусов.

Очевидно, что каждый следующий класс входит во все предыдущие. Вернее, нужно говорить не о вхождении функции $u(z)$ в класс, а о вхождении пары $(u(z), \rho(r))$ в класс, где $\rho(r)$ — формальный порядок функции $u(z)$, потому что при различных формальных порядках функция $u(z)$ может входить в разные классы. Поэтому, говоря в дальнейшем о вхождении функции $u(z)$ в какой-то класс, будем подразумевать вхождение пары $(u(z), \rho(r))$ в этот класс, причем будет ясно, о каком формальном порядке идет речь.

Аналогичным образом вводятся четыре класса *а'*, *б'*, *в'*, *г'* мер.

В этой работе будут даны достаточные условия для вхождения субгармонической функции и меры в каждый из четырех классов. Будет исследована точность этих условий, причем окажется, что для того чтобы пара $(u(z), \rho(r))$, где $u(z)$ — субгармоническая в области Z функция, а $\rho(r)$ ее ненулевой формальный уточненный порядок, входила в какой-то класс, необходимо и достаточно, чтобы получающаяся при представлении этой функции по Риссу мера входила в соответствующий класс мер.

Имеется большое число работ, которые посвящены родственным вопросам. Б. Я. Левин [1, стр. 128] рассматривал семейство функций

$$h_{f,r}(\theta) = \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{\widetilde{r}},$$

где $f(z)$ — функция, голоморфная внутри угла (α, β), имеет в нем порядок $\rho(r)$ и при некотором $l < 1$ в каждом круге $C\left(re^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}, lr\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ существует точка z_1 такая, что $\ln|f(z_1)| > -N|\widetilde{z}_1|$. Он доказал, что в лю-

...м внутреннем замкнутом угле, вне множества значений r со сколь угодно малой верхней линейной плотностью, это семейство равностепенно непрерывно.

Б. Я. Левин [1] и А. Пфлюгер [7] независимо друг от друга нашли необходимое и достаточное условие, чтобы существовал равномерный предел функции $h_{f,r}(\theta)$ при $r \to \infty$, когда $re^{i\theta}$ не принимает значений, из некоторого множества кругов нулевой линейной плотности. Функции $f(z)$, для которых это условие выполняется, были названы функциями вполне регулярного роста.

Тем же вопросам, что и в настоящей работе, посвящены исследования И. Ф. Красичкова-Терновского [12], [13]. Приведем основной результат этих исследований. Неравенства, которые будут участвовать в формулировке теоремы, выполняются асимптотически при $r \to \infty$.

Теорема. *Пусть $f(z)$—целая функция, такая, что $\ln|f(z)| < B_1\tilde{r}$, ρ—нецелое, а λ_j — последовательность ее корней. Пусть γ_j — такая последовательность, что $|\gamma_j - \lambda_j| < d\lambda_j$ $0 < d < \frac{1}{2}$. Пусть $g(z)$ — целая функция, удовлетворяющая неравенству $\ln|g(z)| < B_2\tilde{r}$, для которой γ_j является последовательностью корней. Тогда существует множество кругов C, $\rho^*(C) < \beta d^\alpha$, вне которого имеет место равенство*

$$\ln|g(z)| - \ln|f(z)| = O_\rho(B_1)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\tilde{r}.$$

Мы усилим эту теорему. Из наших рассуждений будет следовать, что существует множество кругов C, $\rho^*(C) < \eta$, вне которых имеет место равенство

$$\ln|g(z)| - \ln|f(z)| = O_\rho(B_1)\int\limits_0^1 \ln\left(1 + \frac{d}{\eta t}\right)dt. \tag{1}$$

Л. Альфорс, М. Гейнс, В. Хейман рассматривали функции первого порядка, субгармонические в правой полуплоскости и удовлетворяющие граничному условию $\overline{\lim\limits_{z \to iy}}\, u(z) \leqslant 0$. Л. Альфорс и М. Гейнс [6] доказали, что функция $r^{-1}u(re^{i\theta})$, когда $r \to \infty$, не принимая значений из некоторого множества интервалов конечной логарифмической меры, при $\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$ ($\delta > 0$, но произвольное) равномерно стремится к $\alpha\cos\theta$. В. Хейман [8] показал, что можно взять $\delta = 0$. Тут мы усилим результат В. Хеймана, во-первых, за счет уменьшения исключительных множеств и, во-вторых, будем рассматривать произвольные субгармонические функции конечного порядка. Тем самым мы также усилим один результат И. В. Ушаковой [14].

Уже в последнее время Н. В. Говоров [9], [10], [11] изучал функции, голоморфные внутри угла (α, β) и имеющие там конечный порядок $\rho > 0$. Он нашел необходимое и достаточное условие для того, чтобы вне множества значений r нулевой линейной меры плотности существовал равномерный предел при $r \to \infty$ функции

$$\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho},$$

а) внутри всякого замкнутого угла, содержащегося внутри угла (α, β);

б) внутри угла $[\alpha, \beta]$.

Эти условия накладываются на множество корней и граничное поведение функции.

При обзоре исследований, где используются оценки снизу субгармонических функций вне выделенных множеств, можно заметить, что доказательства основываются на одной общей идее. Берется некоторый набор множеств D_λ. Множество $D_{\lambda'}$ выделяется, если величина $\mu(D_{\lambda'})$ достаточно велика, где μ — мера Рисса субгармонической функции. Исключительное множество получается объединением выделенных множеств. Эту идею применил Картан [15], см. также [1, стр. 31], при доказательстве своей теоремы об оценке полиномов снизу. В эквивалентной формулировке эта теорема звучит так.

Теорема. *Пусть $\mu(D)$ — число точек множества $z_1, z_2 \ldots z_n$, расположенных на множестве D. Тогда вне множества кругов с общей суммой радиусов $2eH$ верна такая оценка логарифмического потенциала меры*

$$\int \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\mu(\zeta) \leqslant n \ln \frac{1}{H}. \tag{2}$$

Л. Альфорс [5], см. также [4, стр. 151], показал справедливость этой оценки при произвольной конечной мере, а не сосредоточенной в отдельных точках, как у Картана, но вне множества кругов с общей суммой радиусов $6eH$.

Н. С. Ландкоф [3], см. также [2, стр. 251], получил оценки типа (2) для потенциалов в p-мерном евклидовом пространстве. Именно, он доказал:

Теорема. *Пусть мера μ такова, что $\mu(R^p) = S$, а $h(r)$ — монотонно возрастающая функция такая, что $h(0) = 0$, $h(r_0) = S$. Тогда открытое множество G точек, где выполнено неравенство*

$$\int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{p-\alpha}} > \int_0^{r_0} \frac{dh(r)}{r^{p-\alpha}},$$

можно покрыть системой шаров радиусов $r_k \leqslant r_0$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum h(r_k) \leqslant N(p)\, S.$$

Значение константы $N(p)$ не указано. Из замечания, которое мы сделаем в дальнейшем, будет следовать, что для функций $h(r)$, удовлетворяющих неравенству $h(r_1 + r_2) \leqslant h(r_1) + h(r_2)$, константу $N(p)$, $p > 2$, можно заменить на четыре. Для случая $p = 2$ мы докажем обобщенную теорему Картана, состоящую в том, что оценка (2) верна вне множества кругов с общей суммой радиусов $2eH$ для произвольной меры. Заметим, однако, что улучшенная таким образом оценка Л. Альфорса так же, как и оценка Картана, все же не точна.

Отметим, что выделение исключительных множеств мы будем производить способом, указанным в [3].

Формулировки теорем, доказываемых в данной работе, содержат нестандартные величины, которые нами здесь еще не введены. Поэтому эти формулировки не будут приведены здесь. Ввиду некоторого различия в доказательствах для случая областей z и z_+ и, главное, для лучшей обозримости, разобьем работу на четыре части. Все исследования для полуплоскости будут проведены в последних двух частях.

ЧАСТЬ I

§ 1. ФУНКЦИИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАСС В ОБЛАСТИ Z, И ИХ СВОЙСТВА

Для меры μ формального порядка $\rho(r)$ введем функцию плотности

$$\Phi(\alpha)=\varlimsup_{r\to\infty}\sup_{\theta}\frac{\mu(C(z,\ \alpha r))}{\tilde{r}},\quad z=re^{i\theta},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

Функция $\Phi(\alpha)$ характеризует регулярность распределения меры μ. Она является монотонно неубывающей функцией. Если функция $\Phi(\alpha)$ медленно стремится к нулю или вовсе не стремится к нулю при $\alpha\to 0$, то это означает наличие последовательности точек $z_n\to\infty$, в малых окрестностях которых сосредоточены большие массы. Отметим, что функция $\Phi(\alpha)$ ограничена;

$$\Phi(\alpha)\leqslant\frac{\mu(C(0,\ 2r))}{\tilde{r}}\leqslant\frac{M_2(\widetilde{2r})}{\tilde{r}}\leqslant M_3,$$

так как для любого уточненного порядка $\rho(r)$ имеет место асимптотическое неравенство [1, стр. 49]

$$(\widetilde{kr})<k^{\rho+1}\tilde{r},\quad 1\leqslant k\leqslant 2.$$

Введем еще функцию

$$\varepsilon_B(r,\ \alpha)=\sup_{\theta}\frac{\mu(C(z,\ \alpha r))}{\tilde{r}}-B(\alpha),$$

где $B(\alpha)$ — некоторая неубывающая функция. Мы будем в качестве $B(\alpha)$ брать какую-либо мажоранту функции $\Phi(\alpha)$. Эта функция характеризует регулярность распределения масс уже в следующем приближении.

В дальнейшем особый интерес будут представлять меры, функции плотности которых удовлетворяют условию

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{\alpha}\,d\,\Phi(\alpha)<\infty. \tag{1.1}$$

Легко видеть, что если соотношение (1.1) выполняется для функции $\Phi(\alpha)$, то оно выполняется и для функции

$$\Phi_1(\alpha)=\begin{cases}\Phi(2\alpha) & \alpha\leqslant\frac{1}{2}\\ \Phi(1) & \alpha>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Отметим одно свойство функции $\varepsilon_B(\alpha)$.

Лемма 1. *Пусть $\varepsilon^{+}_{\Phi_2}(r,\ \alpha)=\max\{\varepsilon_{\Phi_2}(r,\ \alpha),\ 0\}$, где $\Phi_2(\alpha)$ — функция, удовлетворяющая условию $\Phi_2(\alpha-0)\geqslant\Phi(\alpha+0)$. Тогда $\varepsilon^{+}_{\Phi_2}(r,\ \alpha)\rightrightarrows 0$ при $r\to\infty$.*

В дальнейшем мы, по возможности, будем опускать индекс у функций ε.

Пусть лемма не верна. Тогда существуют $\delta>0$, последовательности α_n, $0<\alpha_n<1$, $r_n\to\infty$ такие, что $\varepsilon^{+}(r_n,\ \alpha_n)>\delta$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность α_n — сходящаяся и монотонная. Пусть, например, $\alpha_n\uparrow\alpha$. Для каждого r_n выбираем точку z_n, $|z_n|=r_n$, такую, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{\theta}\frac{\mu(C(r_ne^{i\theta},\ \alpha_nr_n))}{\tilde{r}_n}<\frac{\mu(C(z_n,\ \alpha_nr_n))}{\tilde{r}_n}+\frac{\delta}{2}.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\delta}{2} < \frac{\mu\left(C\left(z_n, \alpha_n r_n\right)\right)}{\tilde{r}_n} - \Phi_2(\alpha_n) < \frac{\mu\left(C\left(z_n, \alpha r_n\right)\right)}{\tilde{r}_n} - \Phi_2(\alpha_n).$$

Переходя к верхнему пределу при $n \to \infty$, получим противоречивое неравенство

$$\frac{\delta}{2} \leqslant \Phi(\alpha) - \Phi_2(\alpha - 0).$$

Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha_n \downarrow \alpha$.

Из леммы 1 следует, что функция

$$\varepsilon(r) = \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \varepsilon^{+}(r, \alpha)$$

стремится к нулю при $r \to \infty$.

В дальнейшем нам не раз будут нужны оценки интегралов, содержащих функции $t^{\rho(t)}$, где $\rho(t)$ — уточненный порядок. Эти оценки легко получаются интегрированием по частям и использованием свойств уточненного порядка. Оценки такого типа можно найти в [1, стр. 50—52]. Для примера докажем одну из нужных нам оценок.

Лемма 2. *Пусть $\nu(t)$ — монотонно возрастающая функция $0 \leqslant \leqslant \nu(t) \leqslant M_4 t$, тогда*

$$\int_1^r \frac{d\nu(t)}{t^{\rho(t)-1}} < M_4 B_3 r \text{ при } r \geqslant r_1, \tag{1.2}$$

где величины B_3 и r_1 зависят только от $\rho(r)$.

Имеем

$$\int_1^r \frac{d\nu(t)}{t^{\rho(t)-1}} = \frac{\nu(t)}{t^{\rho(t)-1}}\Bigg|_1^r + \int_1^r \frac{[\rho(t) - 1 + t\ln t\rho'(t)]\,\nu(t)}{t^{\rho(t)}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M_4 r + B_4 + M_4 B_5 (r - r_2) \leqslant M_4 (B_5 + 2) r = M_4 B_3 r,$$

где r_2 — значение t, начиная с которого выполняется неравенство

$$\rho(t) - 1 + t\ln t\,\rho'(t) \leqslant [\rho - 1]_+ + 1 = B_5.$$

Такое значение t, в силу свойств уточненного порядка (см. [1, стр. 49]), существует; B_4 — интеграл по промежутку $[1, r_2]$, а $r_1 \geqslant r_2$ — число, начиная с которого выполняется неравенство $B_4 - M_4 B_5 r_2 \leqslant M_4 r$.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ И ОЦЕНКИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть μ — мера формального порядка $\rho(r)$. Возьмем некоторую непрерывную слева и непрерывную в нуле монотонную функцию $\psi(t)$, $\psi(0) = 0$, $t \in [0, 1]$. Для произвольной точки $z \in Z$, $|z| > 1$ рассмотрим множество кругов $C(z, \alpha r)$, $\alpha \in [0, 1]$, для которых выполняется неравенство

$$\psi(\alpha) \leqslant \frac{\mu\left(C(z, \alpha r)\right)}{\tilde{r}}. \tag{1.3}$$

Из непрерывности слева функции $\psi(\alpha)$ вытекает существование при любом z максимального среди таких чисел α, обозначим его α_z. Соответствующий круг обозначим C_z. Объединение открытых кругов C_z назовем A; A — открытое множество, и поэтому содержит не более чем счетное число связных компонент A_i. Если теперь производить выделение с помощью функции $\psi_1(t) \geqslant \psi(t)$, то каждый круг C_z и все множество A могут лишь уменьшиться. Компоненты A_i могут при этом разбиться на части. Если ничего не требовать от меры μ и функции $\psi(t)$, то ничего нельзя сказать и о множестве A. В частности, A может совпадать с множеством Z.

Теперь исследуем некоторые свойства компонент A_i.

Последовательность кругов C_1, $C_2 \dots C_n$ назовем цепочкой, если пересекаются круги с соседними номерами и только они. Будем говорить, что цепочка C_1, $C_2 \dots C_n$ связывает круги C_1 и C_n. Очевидно, что точка плоскости Z не может покрываться кругами цепочки более чем два раза. Обобщенной цепочкой назовем множество кругов, покрывающих плоскость не более чем два раза.

Лемма 3. *Пусть C_z и C_ω — два круга, принадлежащие одной компоненте. Тогда существует цепочка, принадлежащая этой компоненте, которая связывает указанные круги.*

Это простое следствие связности компоненты.

Предположим теперь, что компонента A_i ограничена. Тогда существует круг наименьшего радиуса R_i, который содержит A_i. Обозначим этот круг $G_i = C(g_i, \alpha_i |g_i|)$. Относительно круга G_i докажем такую лемму.

Лемма 4. *Существует такая обобщенная цепочка C_1, $C_2 \dots C_m$, что*

$$2R_i \leqslant \sum_{k=1}^{m} d_{C_k},$$

где d_{C_k} — диаметр круга C_k.

Доказательство. На границе круга G_i существуют три точки (а может быть даже две), принадлежащие множеству $\bar{A}_i$, которые нельзя поместить в круг с радиусом меньше, чем R_i [21, стр. 29]. Возьмем в $\frac{\varepsilon}{3}$-окрестностях этих точек точки z_1, z_2, z_3 из A_i. Пусть K_1, K_2, K_3 — круги, которым принадлежат эти точки. Соединим круги K_1 и K_2 цепочкой $K_{1,2}: L_1, L_2, \dots, L_n$, принадлежащей A_i, а круги K_1 и K_3 цепочкой $K_{1,3}: N_1, N_2, \dots, N_q$. Пусть N_{q_1} — круг с наибольшим номером, который пересекает цепочку $K_{1,2}$, а L_{n_1} и L_{n_2} — круги с наименьшими и наибольшими номерами, которые пересекают круг N_{q_1}.

Рассмотрим связное множество кругов $C: L_1, \dots, L_{n_1}, L_{n_2}, \dots, L_n, N_{q_1}, \dots, N_q$. Пусть d — диаметр наименьшего круга, содержащего эти круги. Если мы выбросим из нашего множества круг N_q, то диаметр наименьшего круга, который содержит оставшееся множество, уменьшится не более чем на d_{N_q}. Поэтому

$$d \leqslant d_{L_1} + \dots + d_{L_{n_1-1}} + d_{L_{n_2+1}} + \dots + d_{L_n} + d_{N_{q_1+1}} + \\ + \dots + d_{N_q} + d',$$

где d' — диаметр наименьшего круга, содержащего круги L_{n_1}, L_{n_2}, N_{q_1}. Если все три круга имеют общую точку, то найдутся два круга, пусть это будут L_{n_1} и N_{q_1}, таких, что $d' \leqslant d_{L_{n_1}} + d_{N_{q_1}}$. В противном случае применяем оценку $d' \leqslant d_{L_{n_1}} + d_{L_{n_2}} + d_{N_{q_1}}$.

Если взять теперь в качестве обобщенной цепочки $C \setminus L_{n_2}$ в первом случае и просто C — во втором, то мы докажем данную в лемме оценку с точностью до ε. Усложнив рассуждения, можно избавиться от этого ε.

Аналогичную лемму нам не удалось доказать для p-мерного евклидова пространства. Однако ослабленный вариант этой леммы тривиален.

Пусть A — связное множество открытых шаров в R^p и K — шар наименьшего диаметра d, содержащий A. Тогда по теореме Юнга [20] существуют две точки из $\overline{A}$, расстояние между которыми не менее $\sqrt{\frac{p}{2(p+1)}}\,d$ и, значит, найдется пара точек P_1, P_2 из A, расстояние между которыми больше $\frac{1}{2}$.

Пусть K_1 и K_2 — шары из A, содержащие точки P_1 и P_2. Соединим их цепочкой шаров $L_1, L_2 \ldots L_n$, принадлежащих A. Очевидно, что

$$d < 2\sum_{j=1}^{n} d_{L_j}.$$

Из этого и рассуждений, аналогичных тем, которые будут проводиться, вытекает наше замечание к работе Н. С. Ландкофа, которое мы сделали во вступлении.

Продолжим теперь изучение множества A. Для этого в каждой компоненте A_i выделим обобщенную цепочку $C_{i,1}, C_{i,2} \ldots C_{i,m_i}$. Возьмем объединение этих цепочек. Считая, что выделение множества A происходило с помощью функции

$$\psi(t) = \frac{4B_3M_3}{\delta}t = M_5 t,$$

где константы B_3 и M_3 уже введены, а δ — некоторое число меньше единицы, оценим сумму диаметров тех кругов объединения, центры которых лежат в круге $C(0, r)$. Используя (1.3), получим

$$\sum_{|z_{i,k}|\leqslant r} d_{C_{i,k}} \leqslant 2\sum |z_{i,k}|\,\psi^{-1}\left(\frac{\mu(C_{i,k})}{|\tilde{z}_{i,k}|}\right) = \frac{2}{M_5}\sum |z_{i,k}|\,\frac{\mu(C_{i,k})}{|\tilde{z}_{i,k}|}.$$

Здесь через $\psi^{-1}(t)$ обозначена функция, обратная $\psi(t)$.

Введем меру $\nu(t)$ таким образом:

$$d\nu(t) = \begin{cases} \sum\limits_{|z_{i,k}|=|z_{j,l}|} \mu(C_{i,k}) & \text{при } t = |z_{j,l}| \\ 0 & \text{при } t \neq |z_{j,l}| \end{cases}$$

Так как произвольная точка плоскости покрывается кругами $C_{i,k}$ не более чем два раза, и так как круг $C_{i,k}$ с центром $z_{i,k}$, $|z_{i,k}| \leqslant t$, не содержит точек, расположенных вне круга $C(0, 2t)$, то для функции $\nu(t)$ верна оценка

$$\nu(t) < 2\mu(C(0, 2t)) < 2M_2(\widetilde{2t}) < 2M_3\tilde{t}.$$

Далее искомая сумма оценивается так:

$$\sum_{|z_{i,k}|\leqslant r} d_{C_{i,k}} \leqslant \frac{2}{M_5}\int_1^r \frac{d\nu(t)}{t^{\rho(t)-1}}.$$

Применяя лемму 2, получим при $r \geqslant r_1$

$$\sum_{|z_{i,k}|\leqslant r} d_{C_{i,k}} \leqslant \frac{2}{M_5}2M_3B_3r = \delta r. \tag{1.4}$$

Из этого неравенства следует, что при таком выборе функции каждая компонента A_i ограничена, так как в противном случае в этой компоненте нашлись бы для любого $\gamma > 0$ два круга C_{z_1} и $C_{z_1'}$, $|z_1'| > r_1$ таких, что $|z_1| < \gamma |z_1'|$.

Построим цепочку $C_{z_1} = C_1, C_2, \ldots, C_m = C_{z_1'}$. Пусть C_q — круг этой цепочки, центр которого z_q наиболее удален от начала координат. Тогда $|z_q - z_1| = |z_q| \left| 1 - \frac{z_1}{z_q} \right| \geqslant (1-\gamma)|z_q|$.

Если взять γ таким, что $1 - \gamma > \delta$, то для цепочки $C_1, C_2, \ldots, C_q$ не будет выполняться неравенство (1.4).

Оценим теперь верхнюю линейную плотность множества C кругов G_i. Для этого в каждой компоненте A_i выберем такую обобщенную цепочку $C_{i,1}, C_{i,2}, \ldots, C_{i,m_i}$, что выполняется неравенством

$$2R_i \leqslant \sum_{k=1}^{m_i} d_{C_{i,k}}.$$

Если $|g_i| \leqslant r$, то центры кругов $C_{i,k}$ все лежат в круге $C\left(0, \frac{1+\delta}{1-\delta} r\right)$. Применяя неравенство (1.4), получим

$$\sum_{|g_i \leqslant r} R_i \leqslant \frac{1}{2} \sum d_{C_{i,k}} \leqslant \frac{1}{2} \delta \frac{1+\delta}{1-\delta} r \quad \text{при } r \geqslant r_1.$$

Считая, что $\delta \leqslant \frac{1}{3}$, получим

$$\sum_{|g_i| \leqslant r} R_i \leqslant \delta r.$$

Это означает, что $\rho^*(C) \leqslant \delta$.

Предположим теперь, что для функции плотности $\Phi(\alpha)$ меры μ выполняется условие (1.1). В этом случае мы будем производить выделение множества A с помощью функции

$$\psi_1(t) = \max\{M_6 t, \sqrt{t}, 2\Phi_1(t)\},$$

где M_6 — частное значение константы M_5 при $\delta = \frac{1}{3}$. Для так определенной функции $\psi_1(t)$ также выполняется условие (1.1). По определению функции $\psi_1(t)$ получаем, что $R_i \leqslant \frac{1}{3}|g_i|$. А из неравенства (1.3) следует такая оценка для α_z:

$$2\Phi_1(\alpha_z) \leqslant \psi_1(\alpha_z) \leqslant \frac{\mu(C(z, \alpha_z r))}{\tilde{r}} \leqslant \Phi_1(\alpha_z) + \varepsilon(r),$$

$$\Phi_1(\alpha_z) \leqslant \varepsilon(r), \quad \alpha \leqslant \Phi^{-1}(\varepsilon(r)), \quad \mu(C(z, \alpha_z r)) \leqslant 2\varepsilon(r)\tilde{r}. \tag{1.5}$$

Функция $\varepsilon(r)$, как это следует из леммы 1, стремится к нулю при $r \to \infty$. Поэтому и $\alpha_z \to 0$ при $r \to \infty$.

Так как $\psi_1(t) \geqslant \sqrt{t}$, то

$$\sum_{|g_i| \leqslant r} R_i \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,k} d_{C_{i,k}} \leqslant \sum_{i,k} |z_{i,k}| \psi_1^{-1}\left(\frac{\mu(C_{i,k})}{|\tilde{z}_{i,k}|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,k} |z_{i,k}| \left[\frac{\mu(C_{i,k})}{|\tilde{z}_{i,k}|}\right]^2 \leqslant 2 \sum_i \varepsilon_i \sum_k |z_{i,k}| \frac{\mu(C_{i,k})}{|\tilde{z}_{i,k}|} \leqslant$$

$$\leqslant B_6 + 2\varepsilon \sum_{r_1 \leqslant |g_i| \leqslant r} \sum_k |z_{i,k}| \frac{\mu(C_{i,k})}{|\tilde{z}_{i,k}|} \leqslant B_6 + \frac{2}{3}\varepsilon r,$$

где $\varepsilon_i = \sup\limits_{z \in G_i} \varepsilon(r)$ Очевидно, что $\varepsilon_i \to 0$ при $g_i \to \infty$. Число r_3 таково, что при $r \geqslant r_3$ выполняется неравенство $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon$, а B_6 — начальный отрезок суммы. Из полученного неравенства следует, что при таком выборе функции $\psi_1(t)$ *линейная плотность кругов* G_i *равна нулю.*

Теперь мы будем получать более тонкие исключительные множества. Для этого мы будем считать, что выделение множества произведено с помощью функции $\psi_2(t) = \max\left\{M_6 t,\ 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\rho+1}\Phi_2\left(\frac{4}{3}t\right)\right\}$, где $\Phi_2(t)$ — монотонная мажоранта функции $\Phi(t)$, удовлетворяющая условию (1.1) и дополнительному условию

$$\Phi_2(t_1 + t_2) \leqslant \Phi_2(t_1) + \Phi_2(t_2).$$

Это условие не очень ограничительно. Оно удовлетворяется, например, для функций вида at^λ $0 < \lambda \leqslant 1$. Путем некоторого усложнения рассуждений можно отказаться от требования, чтобы мажоранта $\Phi_2(t)$ удовлетворяла дополнительному условию. Правда, функцию $\psi_2(t)$ при этом придется еще больше увеличить.

При указанных выше условиях для компоненты A_i получаются такие оценки:

$$\alpha_i \leqslant \frac{1}{2}\sum_k \frac{d_{C_{i,k}}}{|g_i|} \leqslant \frac{4}{3}\sum_k \alpha_{i,k} \leqslant \frac{4}{3}\sum_k \psi_2^{-1}\left(\frac{\mu(C_{i,k})}{|\widetilde{z}_{i,k}|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{3}\psi_2^{-1}\left(\sum_k \frac{\mu(C_{i,k})}{|\widetilde{z}_{i,k}|}\right) \leqslant \frac{4}{3}\psi_2^{-1}\left(\frac{2\mu(G_i)}{\left|\frac{2}{3}\widetilde{g}_i\right|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{3}\psi_2^{-1}\left(2\frac{|\widetilde{g}_i|}{\left|\frac{2}{3}\widetilde{g}_i\right|}(\Phi_2(\alpha_i) + \varepsilon_i)\right) \leqslant \frac{4}{3}\psi_2^{-1}\left(2\left(\frac{3}{2}\right)^{\rho+1}(\Phi_2(\alpha_i) + \varepsilon_i)\right).$$

Далее, пользуясь определением функции $\psi_2(t)$, получим

$$4\left(\frac{3}{2}\right)^{\rho+1}\Phi_2(\alpha_i) \leqslant \psi_2\left(\frac{3}{4}\alpha_i\right) \leqslant 2\left(\frac{3}{2}\right)^{\rho+1}(\Phi_2(\alpha_i) + \varepsilon_i),$$

$$\Phi_2(\alpha_i) \leqslant \varepsilon_i, \quad \alpha_i \leqslant \Phi_2^{-1}(\varepsilon_i),$$

откуда следует, что

$$\sigma_i = \frac{\mu(A_i)}{|\widetilde{g}_i|} \leqslant \Phi_2(\alpha_i) + \varepsilon_i \leqslant 2\varepsilon_i.$$

Нам также необходимо исследовать сходимость некоторых рядов.

1. Пусть выполняется условие

$$\lim_{r \to \infty} \varepsilon(r)\ln r = 0, \tag{1.6}$$

тогда при любом $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum |g_i| \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_i}\right). \tag{1.7}$$

Действительно,

$$\sum |g_i| \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_i}\right) < B_7 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{|g_i| \geqslant r_4} \sigma_i |g_i| \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2\sigma_i}\right) =$$

$$= B_7 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{|g_i| \geqslant r_4} \frac{\mu(A_i)}{|\tilde{g}_i|} |g_i| \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2\sigma_i}\right) \leqslant B_7 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{|g_i| \geqslant r_5} \frac{\mu(A_i)}{|\tilde{g}_i| |g_i|},$$

где r_4 — такое число, что при $|g_i| \geqslant r_4$ выполняется неравенство $\frac{\varepsilon}{\sigma_i} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2\sigma_i}\right) \leqslant 1$, а r_5 таково, что при $|g_i| \geqslant r_5$ выполняется неравенство $\sigma_i \ln |g_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Очевидно, такие числа r_4 и r_5 существуют.

Введем теперь меру

$$d\nu_1(t) = \begin{cases} \sum\limits_{|g_i| = |g_j|} \mu(A_i), & t = |g_j| \\ 0, & t \neq |g_j| \end{cases} \qquad j = 1,\ 2\ \ldots$$

Так как $\alpha_i \leqslant \frac{1}{3}$, то

$$\nu_1(t) \leqslant \mu\left(C\left(0,\ \frac{4}{3}t\right)\right) < M_3 \tilde{t}.$$

Поэтому оценка ряда продолжается так:

$$\sum |g_i| \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_i}\right) < B_7 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_5}^{\infty} \frac{d\nu_1(t)}{t^{\rho(t)+1}}.$$

Интегрируя по частям и используя оценку для $\nu_1(t)$, легко показать, что последний интеграл сходится. Из сходимости ряда (1.7) при любом $\varepsilon > 0$ следует существование последовательности $\gamma_i \to 0$ при $i \to \infty$ такой, что ряд $\sum |g_i| \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\sigma_i}\right)$ также сходится.

Отметим, что из сходимости ряда (1.7) при любом $\varepsilon > 0$ следует, что $\sigma_i \ln |g_i| \to 0$ при $i \to \infty$. Действительно, в этом случае при любом $\varepsilon > 0$ должно выполняться асимптотическое неравенство $\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_i}\right) < \frac{1}{|g_i|}$, или $\sigma_i \ln |g_i| < \varepsilon$. Таким образом, условие (1.6) близко к необходимому.

2. Если выполняется условие

$$\lim_{r \to \infty} \varepsilon(r) \ln \ln r = 0, \tag{1.8}$$

то при любом $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_i}\right). \tag{1.9}$$

Действительно, имеем

$$\sum \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_i}\right) < B_8 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{|g_i| \geqslant r_6} \sigma_i \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2\sigma_i}\right) = B_8 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{|g_i| \geqslant r_6} \frac{\mu(A_i)}{|\tilde{g}_i|} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2\sigma_i}\right) \leqslant B_9 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{|g_i| \geqslant r_7} \frac{\mu(A_i)}{|\tilde{g}_i| \ln^2 |g_i|} = B_9 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_7}^{\infty} \frac{d\nu_1(t)}{t^{\rho(t)} \ln^2 t}.$$

Интегрированием по частям можно показать, что последний интеграл сходится.

Смысл введенных констант ясен. Отметим лишь, что r_7 такое число, что при $|g_i| \geqslant r_7$ выполняется неравенство $\sigma_i \ln \ln |g_i| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Из сходимости ряда (1.9) при любом $\varepsilon > 0$ следует существование последовательности $\gamma_i \to 0$ такой, что ряд $\sum \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\sigma_i}\right)$ также сходится.

Заметим, что условие (1.8) не является необходимым. Например, ряд (1.9) будет сходиться при как угодно медленном стремлении к нулю функции $\varepsilon(r)$, если мера μ принадлежит классу сходимости, т. е.

$$\int\limits_{|\zeta| \geqslant 1} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta|} < \infty. \tag{1.10}$$

Но могут быть и промежуточные случаи, когда не выполняется условие (1.8) и расходится интеграл (1.10). Например, ряд (1.9) будет сходиться при любом $\varepsilon > 0$, если выполняются условия

$$\lim_{r \to \infty} \varepsilon(r) \ln \ln \ln r = 0, \quad \int\limits_{|\zeta| > e^e} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta| (\ln \ln |\zeta|)^p} < \infty \tag{1.11}$$

хотя бы при каком-нибудь p.

Продолжим выделение исключительных множеств. Для этого воспользуемся обобщенной теоремой Картана, которую докажем ниже. Правда, для наших целей было бы достаточно теоремы Альфорса.

Рассмотрим функцию

$$L_i(z) = \int\limits_{\zeta \in A_i} \ln \left| \frac{\zeta - z - hz}{\zeta - z} \right| d\mu(\zeta).$$

По обобщенной теореме Картана вне кругов $G_{k,i}$ с суммой радиусов $2\eta_i |g_i|$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\zeta \in A_i} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\mu(\zeta) \leqslant \mu(A_i) \ln \frac{e}{\eta_i |g_i|}.$$

Для z и h таких, что $|\zeta - z - hz| \leqslant |g_i|$ $\left(\text{а это выполняется при } |z - g_i| \leqslant \frac{1}{4}|z|,\ |h| < \frac{1}{4},\ \zeta \in A_i\right)$, будем иметь

$$\int\limits_{\zeta \in A_i} \ln |\zeta - z - hz| \, d\mu(\zeta) \leqslant \mu(A_i) \ln |g_i|.$$

Поэтому вне кругов $G_{k,i}$ с суммой радиусов $2\eta_i |g_i|$ при $|z - g_i| \leqslant \frac{1}{4}|z|$ выполняется неравенство

$$L_i(z) \leqslant \mu(A_i) \ln \frac{e}{\eta_i}.$$

Аналогично оценивается $-L_i(z)$. Поэтому при тех же условиях имеет место неравенство

$$|L_i(z)| \leqslant \mu(A_i) \ln \frac{e}{\eta_i} = \sigma_i |\tilde{g}_i| \ln \frac{e}{\eta_i}.$$

Если взять $\eta_i = \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\sigma_i}\right)$, то получим

$$|L_i(z)| \leqslant (\sigma_i + \gamma_i) |\tilde{g}_i|.$$

Выше были указаны условия, обеспечивающие сходимость рядов (1.7) и (1.9) для некоторой последовательности $\gamma_i \to 0$.

Отметим, что сходимость ~~первого~~ второго ряда обозначает, что круги $G_{k,\,i}$ видны из начала координат под конечным углом, а сходимость ~~второго~~ ряда означает, что сумма радиусов кругов $G_{k,\,i}$ конечна.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ В СЛУЧАЕ ОБЛАСТИ Z

Теорема 1. *Пусть мера* μ имеет формальный уточненный порядок $\rho(r)$. Тогда

1) мера μ принадлежит классу *а'*;

2) если функция плотности $\Phi(\alpha)$ удовлетворяет условию (1.1), то мера μ принадлежит классу *б'*;

3) если сходится ряд (1.9) (достаточными условиями сходимости являются условия (1.8), (1.10), (1.11)), то мера μ принадлежит классу *в'*;

4) если выполняется условие (1.7), то мера μ принадлежит классу *г'*.

Исключительные множества уже построены. В первом случае исключительным множеством C будет множество кругов G_i, если выделение множества A производить с помощью функции $\psi(t) = M_5 t$. За счет уменьшения δ можно сделать величину $\rho^*(C)$ как угодно малой. Во втором случае исключительным множеством снова будут круги G_i, но выделение множества A нужно производить с помощью функции $\psi_1(t)$. В третьем и четвертом случаях исключительное множество C будут образовывать круги $G_{k,\,i}$, а выделение множества A нужно производить с помощью функции $\psi_2(t)$. Отметим, что каждая из функций $\psi(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ удовлетворяет условию (1.1). В дальнейшем у этих функций будет общее обозначение $\psi(t)$.

Соответствующие оценки названных множеств уже произведены. Осталось показать, что вне этих множеств функция $v_h(z) \rightrightarrows 0$ при $h \to 0$.

Сначала проведем оценки для случая, когда z не принадлежит множеству A. Тогда должно выполняться неравенство для всех $\alpha \in [0, 1]$:

$$\psi(\alpha) \geqslant \frac{\mu(C(z, \alpha r))}{\tilde{r}}. \tag{1.12}$$

В противном случае круг C_z имел бы ненулевой радиус и точка z попала бы во множество A.

Имеем

$$v_h(z) = \frac{1}{\tilde{r}} \int\limits_{C\left(z,\, \frac{1}{4} r\right)} \ln\left|\frac{\zeta - z - hz}{\zeta - z}\right| d\mu(\zeta) \leqslant \frac{1}{\tilde{r}} \int\limits_{C\left(z,\, \frac{1}{4} r\right)} \ln\left(1 + \frac{|h|\, r}{|\zeta - z|}\right) d\mu(\zeta),$$

Введем переменную t: $|\zeta - z| = tr$ и меру $\mu_z(t) = \mu(C(z, tr))$. Тогда получим

$$v_h(z) \leqslant \frac{1}{\tilde{r}} \int\limits_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1 + \frac{|h|}{t}\right) d\mu_z(t) \leqslant \int\limits_0^{t_0} \ln\left(1 + \frac{|h|}{t}\right) d\psi(t), \tag{1.13}$$

где величина t_0 определяется из уравнения $\psi(t_0)\,\tilde{r} = \mu_z\left(\frac{1}{4}\right)$.

Последнюю оценку можно получить, если проинтегрировать по частям, применить оценку (1.12) и проинтегрировать по частям в обратном направлении. Полученный интеграл сходится равномерно относительно $|h|$ при $|h| < \frac{1}{4}$, а подынтегральная функция стремится к нулю при $|h| \to 0$. Поэтому и сам интеграл стремится к нулю при $|h| \to 0$, Обозначив $z_1 = z + hz$, получим

$$-v_h(z) = \frac{1}{r} \int\limits_{C\left(z, \frac{1}{4}r\right)} \ln \left| \frac{\zeta - z_1 - \frac{h}{1-h} z_1}{\zeta - z_1} \right| d\mu(\zeta),$$

откуда аналогичным образом следует оценка $v_h(z)$ снизу.

Поэтому вне множества A функция $v_h(z) \rightrightarrows 0$ при $h \to 0$.

Осталось рассмотреть случай, когда исключительное множество не совпадает с A. Именно, рассмотрим случай, когда $z \in A_i$, $z \overline{\in} G_{k,i}$. Интеграл, определяющий $v_h(z)$, разобьем на два:

$$v_h(z) = \frac{1}{r} \int\limits_{A_i} \ln \left| \frac{\zeta - z - hz}{\zeta - z} \right| d\mu(\zeta) + \frac{1}{r} \int\limits_{C\left(z, \frac{1}{4}r\right) \setminus A_i} \ln \left| \frac{\zeta - z - hz}{\zeta - z} \right| d\mu(\zeta).$$

Первый интеграл совпадает с функцией $L_i(z)$, оценка которой уже произведена. Если из всей массы исключить массу, расположенную на A_i, то для точек $z \in A_i$ уже будет верна оценка (1.12). Поэтому для второго интеграла верны предыдущие оценки.

Из сказанного следует, что по любому $\varepsilon > 0$ найдутся $R(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon) > 0$ такие, что при $|z| > R(\varepsilon)$, $|h| < h(\varepsilon)$ вне исключительного множества будет верно неравенство

$$|v_h(z)| < \varepsilon.$$

Завершение доказательства следует из утверждения, что для любой меры μ, для которой величина $\mu(C(0, r))$ конечна при любом r, можно построить множество кругов C с конечной суммой радиусов, вне которого функция $v_h(z) \rightrightarrows 0$ при $h \to 0$ на любом ограниченном множестве. Это утверждение будет доказано в третьей части работы.

§ 4. СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТИ Z

Из результатов Брело [16] следует:

1. Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция формального порядка $\rho(r)$, а μ — ее риссовская мера, тогда $\mu(C(0, r)) \leqslant M_\rho r$.

2. Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция формального порядка $\rho(r)$, а $q = [\rho]$. Тогда

$$u(z) = \int\limits_{C(0,1)} \ln|z - \zeta|\, d\mu(\zeta) + \int\limits_{Z \setminus C(0,1)} \operatorname{Re}\left[\ln\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \frac{z}{\zeta} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{z^q}{q\zeta^q}\right] d\mu(\zeta) + \operatorname{Re} P_q(z) = u_0(z) + \int\limits_{Z \setminus C(0,1)} \operatorname{Re} g_q\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\mu(\zeta) + \operatorname{Re} P_q(z),$$

где $P_q(z)$ — полином степени q.

Для субгармонических функций целого порядка верна уточненная теорема Линделефа.

Теорема. *Пусть $u(z)$ имеет формальный порядок $\rho(r)$, $q = \rho$, а*

$$\delta_u(r) = c_q + \frac{1}{q} \int\limits_{C(0,r) \setminus C(0,1)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^q}.$$

Тогда

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{|\delta_u(r)|}{r^{\rho(r) - \rho}} < \infty, \tag{1.14}$$

Доказать эту теорему можно так же, как и теорему 18 [1, стр. 65]. Все нужные оценки уже произведены.

Теперь нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в плоскости Z, $\rho(r)$ — ее формальный порядок, а μ — соответствующая ей мера Рисса. Пусть пара $(\mu, \rho(r))$ принадлежит какому-нибудь из введенных нами классов. Тогда пара $(u(z), \rho(r))$ также принадлежит этому классу.*

Мы проведем доказательство в более трудном случае, когда $q=\rho$. Не ограничивая общности, будем считать, что $|z|\geqslant 2$. Представим $u(z)$ в виде

$$u(z)=\sum_{i=1}^{6} a_i(z)=R_{r,\frac{1}{4}}(z)+S_{r,\frac{1}{4}}(z),$$

где $S_{r,\frac{1}{4}}(z)=a_5(z)$, а $R_{r,\frac{1}{4}}(z)$ — сумма всех остальных слагаемых, причем

$$a_1(z)=\operatorname{Re}P_{q-1}(z),\quad P_q(z)=c_qz^q+P_{q-1}(z);$$

$$a_2(z)=\operatorname{Re}z^q\delta_u(r),$$

$$a_3(z)=\int\limits_{C(0,\,1)}\ln|z-\zeta|\,d\mu(\zeta)+\int\limits_{C(0,\,r)\setminus C(0,\,1)\setminus C\left(z,\,\frac{1}{4}r\right)}\operatorname{Re}g_{q-1}\left(\frac{z}{\zeta}\right)d\mu(\zeta),$$

$$a_4(z)=\int\limits_{C\left(z,\,\frac{1}{4}r\right)\cap C(0,\,r)}\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\zeta}+\cdots+\frac{z^{q-1}}{(q-1)\,\zeta^{q-1}}\right)d\mu(\zeta)+$$

$$+\int\limits_{C\left(z,\,\frac{1}{4}r\right)\setminus C(0,\,r)}\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\zeta}+\cdots+\frac{z^q}{q\zeta^q}\right)d\mu(\zeta),$$

$$a_5(z)=\int\limits_{C\left(z,\,\frac{1}{4}r\right)}\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\mu(\zeta),$$

$$a_6(z)=\int\limits_{Z\setminus C(0,\,r)\setminus C\left(z,\,\frac{1}{4}r\right)}\operatorname{Re}g_q\left(\frac{z}{\zeta}\right)d\mu(\zeta).$$

Очевидно, неравенство

$$|a_1(z+hz)-a_1(z)|<B_{10}|h|\tilde{r}.$$

Далее оцениваем

$$|a_2(z+hz)-a_2(z)|=r^q|\delta_u(r)|\,|(1+h)^q-1|\leqslant B_{11}|h|\tilde{r}.$$

Тут мы использовали неравенство (1.14). Теперь оценим разность

$$|a_4(z+hz)-a_4(z)|\leqslant\int\limits_{C\left(z,\,\frac{1}{4}r\right)}\sum_{k=1}^{q}\left|\frac{z}{\zeta}\right|^k\frac{|(1+h)^k-1|}{k}\,d\mu(\zeta)<$$

$$<|h|\,q\left(\frac{1+|h|}{1-\frac{1}{4}}\right)^q\mu\left(C\left(z,\,\frac{1}{4}r\right)\right).$$

Рассмотрим разность

$$g_p\left(\frac{z(1+h)}{\zeta}\right) - g_p\left(\frac{z}{\zeta}\right) = \ln\left(1 - \frac{hz}{\zeta - z}\right) + \sum_{n=1}^{p} \frac{z^n[(1+h)^n - 1]}{n\zeta^n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}\left(\frac{hz}{\zeta - z}\right)^n + 0\,(1)\left|\frac{hz}{\zeta - z}\right|^{p+1} + \sum_{n=1}^{p} \frac{z^n[(1+h)^n - 1]}{n\zeta^n}.$$

Коэффициент δ_k при h^k равен

$$\delta_k = -\frac{1}{k}\,\frac{z^k}{(\zeta - z)^k} + \frac{z^k}{k\zeta^k} + \frac{C^1_{k+1} z^{k+1}}{(k+1)\,\zeta^{k+1}} + \cdots + \frac{C_p^{p-k} z^p}{p\zeta^p} = \frac{1}{k!}\,\frac{z^k}{\zeta^p}\,\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\,\frac{z^p}{z - \zeta}.$$

Последнее равенство легко получается, если в числителе выражения, стоящего под знаком производной, добавить и вычесть ζ^p. Из полученного равенства следует, что

$$\delta_k = \frac{z^{p+1}\,Q(z, \zeta)}{\zeta^p (z - \zeta)^k},$$

где $Q(z, \zeta)$ — однородный многочлен степени $k - 1$. Обозначим через $\overline{Q}$ многочлен, коэффициенты которого равны модулям коэффициентов многочлена Q. Оценим теперь величину

$$\Delta_k = \left|\int\limits_{C(0,\, r)\setminus C(0,\, 1)\setminus C\left(z,\, \frac{1}{4} r\right)} \frac{z^{p+1} Q(z, \zeta)}{\zeta^p (z - \zeta)^k}\, d\mu(\zeta)\right| \leqslant \frac{4^k r^{p+1}}{r^k} \int\limits_{C(0,\, r)\setminus C(0,\, 1)} \frac{\overline{Q}(r, |\zeta|)}{|\zeta|^p}\, d\mu(\zeta).$$

Интегрируя по частям и используя свойства уточненного порядка [1, стр. 58], получим оценку $\Delta_k < B_{13}\tilde{r}$.

Очевидно, что

$$\int\limits_{C(0;\, r)\setminus C\left(z,\, \frac{1}{4} r\right)} \left|\frac{z}{z - \zeta}\right|^{p+1} d\mu(\zeta) < B_{14}\tilde{r}.$$

Из этих оценок следует, что

$$|a_3(z + hz) - a_3(z)| < B_{15}\,|h|\,\tilde{r}.$$

Аналогично оценивается разность

$$|a_6(z + hz) - a_6(z)| < B_{16}\,|h|\,\tilde{r}.$$

Оценка разности

$$a_5(z + hz) - a_5(z)$$

уже произведена в теореме 1. Эта разность равномерно стремится к нулю при $h \to 0$ вне соответствующих исключительных множеств. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Отметим, что в процессе доказательства теоремы мы получили неравенство

$$\left|R_{r,\, \frac{1}{4}}(z + hz) - R_{r,\, \frac{1}{4}}(z)\right| < B_{17}\,|h|\,\tilde{r}.$$

Если к этому еще присоединить неравенство (1.13) и аналогичную оценку снизу, то у нас получится удовлетворительная оценка по h вне исключительного множества функции $u_h(z)$, если производить выделение исключительных множеств с помощью функции $\psi(t)$ или $\psi_1(t)$. В первом из этих случаев мы получим оценку, аналогичную (1). Чтобы получить саму эту оценку, достаточно заметить, что для нецелого порядка во всех оценках, которые мы проводили, можно считать, что h не константа, а функция от ζ такая, что $|h(\zeta)| \leqslant |h|$. Для целого порядка в этом случае пройдут все оценки, кроме оценки $a_2(z)$.

Вне исключительных множеств кругов, видимых из начала координат под конечным углом или с конечной суммой радиусов, кроме утверждения, что $u_h(z) \rightrightarrows 0$ при $h \to 0$, ничего не удалось получить.

Замечание 2. Пусть $f(z)$ — целая функция. Тогда $\ln|f(z)|$ — функция субгармоническая и для нее верны утверждения теоремы 2. Причем в этом случае мера $\mu(D)$ некоторой области D равна числу корней целой функции $f(z)$ в области D. Мы будем говорить, что целая функция $f(z)$ принадлежит к какому-либо классу, если субгармоническая функция $\ln|f(z)|$ принадлежит этому классу.

Замечание 3. Теорема 1 остается верной в случае, когда мера μ не положительна, но $|\mu|$ имеет формальный порядок $\rho(r)$. Следовательно, теорема 2 верна для функций, представимых в виде разности субгармонических функций формального порядка $\rho(r)$.

Замечание 4. Рассмотрим функцию $m(t) = \mu(C(0, t))$. В случае целых функций $m(t) = n(t)$. Построим по этой функции функцию плотности $\varphi(\alpha)$ и функцию $\varepsilon_\varphi(r)$ следующим образом:

$$\varphi(\alpha) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{m(t) - m(t - \alpha t)}{\tilde{t}},$$

$$\varepsilon_\varphi(r) = \sup_\alpha \left[\frac{m(r) - m(r - \alpha r)}{\tilde{r}} - \varphi(\alpha)\right].$$

Тогда верна такая

Теорема 1′. *Пусть мера μ имеет формальный порядок $\rho(r)$, тогда*

1. *Мера μ принадлежит классу а′.*

2. *Если функция плотности $\varphi(\alpha)$ удовлетворяет условию* (1.1), *то мера μ принадлежит классу б′.*

3. *Если* $\varepsilon_\varphi(r) = o\left(\frac{1}{\ln\ln r}\right)(\ln\ln r)$, *то мера μ принадлежит классу в′.*

4. *Если* $\varepsilon_\varphi(r) = o\left(\frac{1}{\ln r}\right)(\ln r)$, *то μ принадлежит классу г′.*

Функции $\varphi(\alpha)$ и $\varepsilon_\varphi(r)$ не учитывают распределение массы по аргументам и поэтому теорема 1′ слабее теоремы 1. Однако функция $\varphi(\alpha)$ обладает многими свойствами, которыми не обладает ранее введенная нами функция плотности $\Phi(\alpha)$. Функция $\varphi(\alpha)$, во-первых, непрерывна и, во-вторых, допускает оценку

$$\varphi(\alpha_1 + \alpha_2) \leqslant \varphi(\alpha_1) + (1 - \alpha_1)^\rho \varphi\left(\frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}\right),$$

которая заменяет оценку для функции $\Phi_2(\alpha)$

$$\Phi_2(\alpha_1 + \alpha_2) \leqslant \Phi_2(\alpha_1) + \Phi_2(\alpha_2),$$

выполнение которой, хотя и с оговорками, мы требовали. Поэтому функцию $\varphi(\alpha)$ не нужно заменять мажорантой. Отметим еще, что условия теоремы 1′ более легко проверяемы.

Замечание 5. Легко показать, что если функция $u(z)$ принадлежит классу *в* (*г*), то для нее существуют исключительные множества из кружков, видимых из начала координат под сколь угодно малым углом (со сколь угодно малой суммой радиусов).

§ 5. СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С КОНЕЧНОЙ МЕРОЙ

Для таких функций докажем две теоремы.

Метод их доказательства такой же, как и для предыдущих теорем, но доказательство будет проведено значительно быстрее. Вторая из доказываемых ниже теорем — обобщенная теорема Картана.

Теорема 3. *Пусть*

$$u(z) = -\int\limits_{Z} \ln \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta),$$

где $\mu(Z) = S$.

Пусть

$$u_h(z) = \frac{1}{S}\left(u(z + hz) - u(z)\right).$$

Тогда вне множества C *кругов* $G_i = C(g_i, R_i)$ *таких, что*

$$\frac{1}{r} \sum_{|g_1| \leqslant r} R_i < \eta \quad (0 < \eta < 1),$$

выполняется неравенство

$$|u_h(z)| < \int\limits_0^1 \ln\left(1 + \frac{4|h|}{\eta t}\right) dt.$$

Доказательство. Для всякой точки z строится система открытых кругов $C(z, \alpha r)$, для которых выполняется неравенство

$$\alpha < \frac{1}{N}\, \frac{\mu(C(z, \alpha r))}{S}.$$

Круг с максимальным α обозначим C_z. Объединение кругов C_z назовем A. Открытое множество A распадается на связные компоненты A_i. Для каждой компоненты A_i строим круг $G_i = C(g_i, R_i)$ наименьшего радиуса, который содержит A_i. В каждом круге G_i выделяем обобщенную цепочку, такую, что выполняется неравенство

$$2R_i \leqslant \sum_{k=1}^{m_i} d c_{i,k}.$$

Тогда

$$l_r = \sum_{|g_i| \leqslant r} R_i \leqslant \sum_{i,k} \alpha_{i,k} |z_{i,k}| \leqslant (r + l_r) \sum_{i,k} \alpha_{i,k} \leqslant$$

$$\leqslant (r + l_r) \sum_{i,k} \frac{1}{N}\, \frac{\mu(C_{i,k})}{S} \leqslant \frac{2}{N}(r + l_r).$$

Отсюда $l_r \leqslant \frac{2}{N-2}$. Для точек, не вошедших в круги G_i, при любых α выполняется неравенство $\mu(C(z, \alpha r)) < SN\alpha$. Поэтому для таких z имеем

$$u_h(z) = -\frac{1}{S}\int \ln\left|1 - \frac{hz}{\zeta - z}\right| d\mu(\zeta) = -\frac{1}{S}\int \ln\left(1 + \frac{|h|}{\alpha}\right) \times$$

$$\times\, d\mu(z, \alpha r) \geqslant -N \int\limits_0^{\frac{1}{N}} \ln\left(1 + \frac{|h|}{\alpha}\right) d\alpha = -\int\limits_0^1 \ln\left(1 + \frac{N|h|}{\alpha}\right) d\alpha,$$

Если взять $N = \frac{4}{\eta}$, то для l_r будет верна оценка $l_r < \eta r$, а для $u_h(z)$

$$u_h(z) > -\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{4|h|}{\eta t}\right) dt.$$

Аналогично получается оценка сверху. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть функция $u(z)$ та же, что и в теореме 3. Тогда вне множества кругов с общей суммой радиусов $2H$ выполняется неравенство*

$$-u(z) < S \ln \frac{e}{H}.$$

Доказательство. Для каждой точки z строим множество открытых кругов $C(z, R)$, для которых выполняется неравенство

$$R < \frac{H}{S} \mu(C(z, R)).$$

Круг, для которого R принимает наибольшее значение, обозначим C_z. Объединение кругов C_z назовем A. Открытое множество A состоит не более, чем из счетного числа связных компонент A_i. Погрузим каждую компоненту A_i в круг $G_i = C(g_i, R_i)$ наименьшего радиуса. Выберем в A_i такую обобщенную цепочку $C_{i,k}$, чтобы выполнялось неравенство

$$2R_i \leqslant \sum_{k=1}^{m_i} d_{C_{i,k}}.$$

Оценим сумму радиусов кругов G_i

$$\sum_i R_i \leqslant \sum_{i,k} R_{i,k} \leqslant \frac{H}{S} \sum \mu(C_{i,k}) \leqslant 2H,$$

где $R_{i,k} = \frac{1}{2} d_{C_{i,k}}$ — радиус круга $C_{i,k}$.

Оценим теперь функцию $u(z)$ вне множества A. Если $z \bar{\in} A$, то для всех R имеет место неравенство

$$\mu(C(z, R)) \leqslant \frac{S}{H} R.$$

Поэтому

$$\int \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\mu(\zeta) = \int_0^\infty \ln \frac{1}{R} d\mu(C(z, R)) \leqslant \frac{S}{H} \int_0^H \ln \frac{1}{t} dt = S \ln \frac{e}{H}.$$

ЧАСТЬ II

Исследуем точность полученных в первой части утверждений. В основном будем рассматривать условие (1.1). Наряду с этим введем условие

$$\lim_{\alpha \to 0} \Phi(\alpha) \ln \frac{1}{\alpha} = 0. \tag{2.1}$$

Условие (2.1) слабее условия (1.1), из которого оно следует, но из которого не следует (1.1). Сейчас мы сформулируем и докажем утверждение, в известном смысле обратное утверждению 2 теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть мера* μ *имеет формальный порядок* $\rho(r)$. *Если функция плотности* μ *этой меры не удовлетворяет условию* (2.1), *то мера* μ *не принадлежит классу* $\mathcal{6}'$.

Доказательство. Эту теорему мы вначале будем доказывать в предположении, что $\Phi(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$. После будет указано, как освободиться от этого предположения,

Из условия теоремы следует, что существует число $\delta > 0$ и последовательность $\alpha_n \to 0$ такие, что $\Phi(\alpha_n) \ln \frac{1}{\alpha_n} > \delta$. Выберем некоторое α_n. Существует последовательность кругов $O_k = C(z_k, \alpha_n r_k)$, $z_k \to \infty$ такая, что $\mu(O_k) \geqslant \frac{1}{2} \Phi(\alpha_n) \tilde{r}_k$. Пусть $|h| \geqslant \alpha_n^{\frac{1}{1-a}}$.

Будем оценивать функцию $v_h(z)$ при $z \in O_k$. Оценим сначала интеграл по кругу O_k

$$R_1(z) = \int\limits_{O_k} \ln\left|1 - \frac{hz}{\zeta - z}\right| d\mu(\zeta) \geqslant \int\limits_{O_k} \ln\left(\left|\frac{hz}{\zeta - z}\right| - 1\right) d\mu(\zeta).$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\alpha_n < 16^{-\frac{1}{a}}$. Так как при $\zeta \in O_k$, $z \in O_k$ модуль $|\zeta - z| \leqslant 2\alpha_n r_k$, а $|z| \geqslant r_k(1 - \alpha_n)$, то получим при таких z и ζ, что

$$\left|\frac{hz}{\zeta - z}\right| > \frac{15}{32} \frac{1}{\alpha_n^a}, \quad \left|\frac{hz}{\zeta - z}\right| - 1 > \frac{1}{4\alpha_n^a},$$

а следовательно,

$$R_1(z) > a \int\limits_{O_k} \left(\ln \frac{1}{4^{\frac{1}{a}}} + \ln \frac{1}{\alpha_n}\right) d\mu(\zeta) \geqslant \frac{a}{2} \ln \frac{1}{\alpha_n} \mu(O_k) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a}{4} \ln \frac{1}{\alpha_n} \Phi(\alpha_n) \tilde{r}_k \geqslant \frac{\delta a}{4} \left(\frac{16}{17}\right)^{\rho+1} \tilde{r} = a_\rho \tilde{r}.$$

Оценим теперь интеграл по кольцу $K_1 = C\left(z_k, \frac{1}{5}|h| r_k\right) \setminus O_k$. Для ζ, принадлежащих этому кольцу, выполняется неравенство

$$\left|\frac{hz}{\zeta - z}\right| - 1 > 1.$$

Поэтому

$$R_2(z) = \int\limits_{K_1} \ln\left|1 - \frac{hz}{\zeta - z}\right| d\mu(\zeta) > 0.$$

Оценим интеграл по кольцу $K_2 = \left\{z : \frac{1}{5}|h| r_k \leqslant |\zeta - z_k| < |h|^{\frac{1}{2}} r_k\right\}$. Пусть $\mu(K_2) = \gamma(|h|) \tilde{r}_k$. Функция $\gamma(|h|) \to 0$ при $|h| \to 0$, так как $\Phi(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$. По теореме 3 вне множества кругов с суммой радиусов, не превышающей $\eta r_k \left(1 + |h|^{\frac{1}{2}}\right)$, выполняется неравенство

$$|R_3(z)| = \left|\int\limits_{K_2} \ln\left|1 - \frac{hz}{\zeta - z}\right| d\mu(\zeta)\right| \leqslant \int\limits_0^{\gamma(|h|)\tilde{r}_k} \ln\left(1 + \frac{4|h|\gamma(|h|)\tilde{r}_k}{\eta t}\right) dt =$$

$$= \tilde{r}_k \int\limits_0^{\gamma(|h|)} \ln\left(1 + \frac{4|h|\gamma(|h|)}{\eta t}\right) dt.$$

Если взять $\eta = \frac{|h|}{25}$, то круг O_k не будет пересекаться с исключительным множеством, так как оно пересекается с кольцом K_2. Поэтому при $z \in O_k$ будет выполняться неравенство

$$|R_3(z)| < \tilde{r}_k \int_0^{\gamma(|h|)} \ln\left(1 + \frac{100\gamma(|h|)}{t}\right) dt < \varepsilon\tilde{r}$$

при $|h| < h_1(\varepsilon)$. Очевидно, что $h_1(\varepsilon)$ можно найти. Пусть $R_4(z)$ — интеграл по оставшейся части. По теореме 3 вне множества кругов с суммой радиусов, не превышающей $|h|^{3/4} r_k \left(1 + \frac{1}{4}\right)$, выполняется неравенство

$$|R_4(z)| < \mu\left(C\left(z, \frac{1}{4}r\right)\right) \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{4|h|^{\frac{1}{4}}}{t}\right) dt.$$

При $|h| < \frac{1}{4}$ круг O_k не пересекается с исключительным множеством, а поэтому по числу $\varepsilon > 0$ можно найти число $h_2(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|h| < h_2(\varepsilon)$ в круге O_k будет выполняться оценка

$$|R_4(z)| < \varepsilon\tilde{r}.$$

Из полученных оценок следует, что при $|h| < h_3$, $h_3 = \min\left(h_1\left(\frac{a_\rho}{4}\right), h_2\left(\frac{a_\rho}{4}\right)\right)$, $z \in O_k$ выполняется неравенство

$$v_h(z) > \frac{a_\rho}{2}. \qquad (2.2)$$

Условие $\Phi(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$ мы использовали лишь в том месте, где утверждалось, что функция $\gamma(|h|) \to 0$ при $h \to 0$. Если это условие не выполнено, то можно утверждать только ограниченность функции $\frac{1}{\tilde{r}} R_3(z)$ в круге O_k. Однако в этом случае в круге O_k для функции $R_1(z)$ выполняется оценка $R_1(z) > B_{1\varepsilon}\tilde{r} \ln \frac{1}{\alpha_n}$. Так что если взять α_n достаточно малым, то из приведенных выше рассуждений следует, что неравенство (2.2) будет выполняться и в этом случае. Предположим теперь, что выделено исключительное множество C кругов линейной плотности нуль. Тогда найдется число $h_4 > 0$ такое, что при $|h| < h_4$ вне множества C будет выполняться неравенство

$$v_h(z) < \frac{1}{4} a_\rho. \qquad (2.3)$$

Пусть $h_5 = \min(h_3, h_4)$. Выберем $\alpha_n < h_5^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Найдем R такое, чтобы при $r > R$ выполнялось неравенство

$$\frac{1}{r} \sum_{|g_i| < r} R_i < \frac{1}{2} \alpha_n. \qquad (2.4)$$

Выберем круг O_k, не пересекающийся с кругом $C(0, R)$. Тогда можно найти точку z_0 такую, что $z_0 \in O_k$, $z_0 \bar{\in} C$, так как иначе весь круг O_k входил бы во множество C, и неравенство (2.4) не выполнялось бы. Теперь можно найти угол такой, чтобы точка $z_0+\alpha_n^{\frac{1}{1-\alpha}}e^{i\varphi}z_0=z_0+h_0z_0\bar{\in}C$, иначе снова бы нарушалось неравенство (2.4). Для величины $v_{h_0}(z_0)$ должны одновременно выполняться неравенства (2.2) и (2.3). Полученное противоречие доказывает теорему. Сравнивая пункт 2 теоремы 1 и теорему 5, убеждаемся, что остался неисследованным случай, когда функция плотности не удовлетворяет условию (1.1), но удовлетворяет условию (2.1). Оказывается, что в этом случае по функции плотности нельзя узнать, принадлежит или не принадлежит мера классу $б'$. Для этого случая сделаем два замечания.

Замечание 6. Пусть $\Phi(\alpha)\ln\frac{1}{\alpha}\to 0$ при $\alpha\to 0$. Тогда существует мера μ из класса $г'$ такая, что ее функция плотности $\Phi_\mu(\alpha)$ удовлетворяет неравенству $\Phi_\mu(\alpha)\geqslant\Phi(\alpha)$.

Доказательство. Обозначим через E множество рациональных чисел интервала $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, причем каждое число взято счетное число раз. Перенумеруем это множество $E=\{q_n\}$. Возьмем последовательность $R_n\to\infty$ такую, что $R_{n-1}^2=\frac{1}{4}R_n$, $R_1=8$. Построим меру μ, разместив в точках

$$R_{n,k}=R_n(1-\alpha_k),\quad k=1,\ 2\ \ldots[\Phi(q_n)\tilde{R}_n],\ \alpha_k=\frac{kq_n}{[\Phi(q_n)\tilde{R}_n]}$$

единичные массы. Функция плотности построенной меры не меньше $\Phi(\alpha)$ при $\alpha\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. Действительно, $\mu(C(R_n,\ q_nR_n))=[\Phi(q_n)\tilde{R}_n]$.

В качестве исключительного множества C возьмем объединение кругов $C_{n,k}=C(R_{n,k},\rho_{n,k}R_{n,k})$, $\rho_{n,k}=\exp\left(-\tilde{R}_{n,k}^{\frac{1}{2}}\right)$.

Оценим сумму радиусов названных кругов

$$\sum R_{n,k}\exp\left(-\tilde{R}_{n,k}^{\frac{1}{2}}\right)<B_{19}+\sum_{n\geqslant n_1}R_{n,k}^{-\rho-1}<\infty,$$

где n_1 выбрано таким образом, чтобы при $n<n_1$ выполнялось неравенство

$$R_{n,k}\exp\left(-\tilde{R}_{n,k}^{\frac{1}{2}}\right)<R_{n,k}^{-\rho-1}.$$

Оценим функцию

$$a_n(z)=\frac{1}{\tilde{r}}\ln\left|\frac{R_{n,k}-z-hz}{R_{n,k}-z}\right|$$

вне круга $C_{n,k}$ при $|z-R_{n,k}|<\frac{1}{4}r$. Имеем

$$a_n(z)<\frac{1}{\tilde{r}}\ln\left(1+\frac{3|h|}{\rho_{n,k}}\right)<\frac{1}{\tilde{r}}\left(2+\tilde{R}_{n,k}^{\frac{1}{2}}\right)<2\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\rho+1}{2}}\tilde{r}^{-\frac{1}{2}}.$$

Если r таково, что

$$2\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\rho+1}{2}}\tilde{r}^{-\frac{1}{2}}<\varepsilon,$$

то получим, что $a_n(z)<\varepsilon$. В противном случае

$$a_n(z)<\frac{1}{\tilde{r}}\ln\left(1+\frac{3|h|}{\rho_{n,k}}\right)<\varepsilon$$

при $|h| < h_6(\varepsilon)$. Очевидно, что $h_6(\varepsilon)$ можно выбрать указанным способом. Аналогично оценивается $a_n(z)$ снизу.

Функция $v_h(z)$ для нашей меры обращается в нуль, когда z находится вне множеств $D_n = \left\{z : \frac{1}{4} R_n \leqslant |z| \leqslant 2R_n, \ -\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{tg}\theta \leqslant \frac{1}{2}\right\}$. Поэтому нам нужно оценить $v_h(z)$ лишь при $z \in D_n$, $z \overline{\in} C$

$$v_h(z) = \frac{1}{\tilde r} \sum_{|z - R_{n,k}| \leqslant \frac{1}{4} r} \ln\left|1 - \frac{hz}{R_{n,k} - z}\right| \leqslant \frac{1}{\tilde r} \sum_{|z - R_{n,k}| \leqslant \frac{1}{4} r} \ln\left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{h|x\left|1 + i\frac{y}{x}\right|}{|R_{n,k} - z|}\right) < \frac{1}{\tilde r} \sum{}' \ln\left(1 + \frac{3|h|x}{|R_{n,k} - x|}\right) + 2\varepsilon, \quad |h| < h_6(\varepsilon).$$

Штрих означает, что пропущены те слагаемые, для которых числа $R_{n,k}$ удовлетворяют соотношению $R_{n,m} < x \leqslant R_{n,m+1}$. Оценка каждого из выброшенных слагаемых была произведена раньше.

Для точки $R_{n,m+1+k}$ выполняется неравенство

$$|x - R_{n,m+1+k}| \geqslant \frac{kq_n R_n}{[\Phi(q_n)\tilde R_n]}.$$

Аналогичная оценка имеет место для $R_{n,m-k}$. Поэтому для $v_h(z)$ получается оценка

$$v_h(z) - 2\varepsilon < 2\frac{1}{\tilde r} \sum_{k=1}^{[\Phi(q_n)\tilde R_n]} \ln\left(1 + \frac{3|h|x[\Phi(q_n)\tilde R_n]}{kq_n R_n}\right) <$$

$$< \frac{2}{\tilde r} \int_0^{[\Phi(q_n)\tilde R_n]} \ln\left(1 + \frac{6|h|[\Phi(q_n)\tilde R_n]}{tq_n}\right) dt = \frac{2}{\tilde r} \frac{[\Phi(q_n)\tilde R_n]}{q_n} \int_0^{q_n} \ln\left(1 + \frac{6|h|}{t}\right) dt.$$

В силу условия (2.1) полученное выражение равномерно относительно q_n стремится к нулю при $h \to 0$. Поэтому найдется h_7 такое, что при $h \to 0$ будет выполняться неравенство $v_h(z) < 3\varepsilon$. Аналогично получается оценка снизу для $v_h(z)$. Теперь заметим, что $\Phi_{k\mu}(\alpha) = k\Phi_\mu(\alpha)$ и $v_{k\mu,h}(z) = kv_{\mu,h}(z)$. Возьмем

$$k = \left[\frac{\Phi(1)}{\Phi\left(\frac{1}{2}\right)}\right] + 1.$$

Тогда неравенство $\Phi_{k\mu}(\alpha) > \Phi(\alpha)$ будет выполняться на всем сегменте $[0, 1]$ и мера $k\mu$ — искомая.

Мы строили исключительное множество, размещая единичные массы в отдельных точках. Аналогично могли бы построить меру μ, $\Phi_\mu(\alpha) \geqslant \Phi(\alpha)$ вида $d\mu = \rho(x, y)\,dx\,dy$ с непрерывной функцией $\rho(x, y)$, для которой пустое множество было бы исключительным.

Прежде чем переходить к следующему замечанию, докажем одно свойство функций плотности.

Лемма 4. Пусть μ — функция плотности некоторой меры. Тогда существует такая константа k, что

$$\frac{\Phi(\alpha)\beta^2}{\Phi(\beta)\alpha^2} \geqslant \frac{1}{k}, \quad \alpha < \beta \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть имеется круг C радиуса b и число $a < b$. Тогда, очевидно, этот круг можно покрыть $6\frac{b^2}{a^2}$ кругами радиуса a.

Возьмем $\beta > 0$ и $\varepsilon > 0$. Существует такой круг $C(z, \beta r)$, что $\mu(C(z, \beta r)) \geqslant (\Phi(\beta) - \varepsilon)\tilde{r}$. Пусть $\zeta \in C(z, \beta r)$. Тогда $(1-\beta) r < |\zeta| < (1+\beta) r$. Круг $C(z, \beta r)$ покрывается менее чем

$$6\left(\frac{\beta r}{\alpha|\zeta|}\right)^2 < 24\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

кругами $C(\zeta, \alpha|\zeta|)$. Следовательно, существует круг $C(\zeta, \alpha|\zeta|)$, для которого верно неравенство

$$\mu(C(\zeta, \alpha|\zeta|)) \geqslant \frac{\alpha^2}{24\cdot\beta^2}(\Phi(\beta) - \varepsilon)\frac{\tilde{r}}{|\tilde{\zeta}|}|\tilde{\zeta}|.$$

Поэтому

$$\Phi(\alpha) \geqslant \frac{\alpha^2}{24\cdot 2^{\rho}\cdot\beta^2}\Phi(\beta).$$

В качестве константы k можно взять $k = 24\cdot 2^{\rho}$.

Замечание 7. Пусть функция $\Phi(\alpha)$ удовлетворяет условию (2.5) и условию

$$\int\limits_0 \ln\frac{1}{\alpha}\,d\Phi(\alpha) = \infty, \qquad (2.6)$$

тогда существует мера μ, не принадлежащая классу $б'$, для которой выполняется неравенство $\Phi_\mu(\alpha) \leqslant \Phi(\alpha)$.

Доказательство. Подчеркнем, что требование, чтобы выполнялось условие (2.5), отбросить нельзя.

Рассмотрим функцию $\varphi(\alpha) = (k\cdot 54\cdot 3^{\rho})^{-1}\Phi(\alpha)$. Эта функция также удовлетворяет условиям (2.5) и (2.6). Пусть

$$\varphi_\gamma(\alpha) = \frac{\varphi(\gamma)}{\gamma^2}\alpha^2,$$

$$\psi(\alpha) = \begin{cases} \max\limits_{\alpha\leqslant\gamma\leqslant\frac{1}{2}} \varphi_\gamma(\alpha) & \alpha \leqslant \frac{1}{2} \\ \psi\left(\frac{1}{2}\right) & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Функция $\psi(\alpha)$ удовлетворяет условию (2.6), неравенству $\psi(\alpha) < (54\times 3^{\rho})^{-1}\Phi(\alpha)$ и неравенству

$$\frac{\psi(\alpha)\beta^2}{\psi(\beta)\alpha^2} \geqslant 1 \quad \alpha \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (2.7)$$

Действительно, имеем

$$\psi(\alpha) = \frac{\varphi(\gamma_1)}{\gamma_1^2}\alpha^2 \quad \alpha \leqslant \gamma_1 \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\psi(\beta) = \frac{\varphi(\gamma_2)}{\gamma_2^2}\beta^2 \quad \beta \leqslant \gamma_2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

И если бы выполнялось неравенство

$$\frac{\varphi(\gamma_1)}{\gamma_1^2} < \frac{\varphi(\gamma_2)}{\gamma_2^2},$$

то мы бы получили, что

$$\psi(\alpha) < \frac{\varphi(\gamma_2)}{\gamma_2^2}\alpha^2,$$

а это противоречит определению функции $\psi(\alpha)$.

Возьмем некоторое $\beta > 0$. Пусть $\psi(\alpha_0) = \tilde{R}^{-1}$. Разобьем круг $C(R, \beta R)$ на кольца

$$\alpha_n R = \alpha_0^{2^{-n}} R \leqslant |z - R| < \alpha_{n+1} R.$$

В круге $C(R, \alpha_0 R)$ равномерно распределим массу $\psi(\alpha_0)\tilde{R} = 1$.

Возьмем круг $C(R, \alpha_1 R)$. В этом круге равномерно распределим массу $\psi(\alpha_1)\tilde{R}$ и оставим только ту часть массы, которая размещена в кольце $K_1 = \{z : \alpha_1' R \leqslant |z - R| \leqslant \alpha_1 R\}$, где α_1' определяется из уравнения $\psi_{\alpha_1}(\alpha_1') = \psi(\alpha_0)$. Из условия (2.7) следует, что $\alpha_1' \geqslant \alpha_0$. В круге $C(R, \alpha_m R)$ равномерно распределим массу $\psi(\alpha_m)\tilde{R}$ и оставим только ту часть, которая распределена в кольце $K_m = \{z : \alpha_m' R \leqslant |z - R| \leqslant \alpha_m R\}$, где α_m' определяется из уравнения $\psi_{\alpha_m}(\alpha_m') = \psi(\alpha_{m-1})$. Так продолжаем до тех пор, пока не станет $\alpha_n \geqslant \beta$.

Оценим теперь $\mu(C(R, \alpha R))$. Известно, что $\mu(C(R, \alpha_0 R)) = \psi(\alpha_0)\tilde{R}$. По индукции легко доказывается, что $\mu(C(R, \alpha_m R)) = \psi(\alpha_m)\tilde{R}$. Пусть теперь $\alpha_m \leqslant \alpha < \alpha_{m+1}$. Если $\alpha_m \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{m+1}'$, то $\mu(C(R, \alpha R)) = \mu(C(R, \alpha_m R) = \psi(\alpha_m)\tilde{R} \leqslant \psi(\alpha)\tilde{R}$. Если же $\alpha_{m+1}' < \alpha < \alpha_{m+1}$, то

$$\mu(C(R, \alpha R)) = \psi(\alpha_m)\tilde{R} + \frac{\alpha^2 - \alpha_{m+1}'^2}{\alpha_{m+1}^2}\psi(\alpha_{m+1})\tilde{R} = \frac{\alpha^2}{\alpha_{m+1}^2}\psi(\alpha_{m+1})\tilde{R} \leqslant \psi(\alpha)\tilde{R}.$$

Последнее неравенство следует из (2.7). Из этого же условия следует, что плотность распределения массы в кольце K_m не больше, чем $\frac{\psi(\alpha)\tilde{R}}{\pi\alpha^2 R^2}$ для $\alpha \leqslant \alpha_m$.

Рассмотрим круг $C(z, \alpha R)$. Оценим меру области $D = C(z, \alpha R) \setminus C(R, \alpha R)$. Из предыдущего рассуждения видно, что

$$\mu(D) \leqslant \text{пл. } D \cdot \frac{\psi(\alpha)\tilde{R}}{\pi\alpha^2 R^2} \leqslant \psi(\alpha)\tilde{R},$$

$$\mu(C(z, \alpha R) \cap C(R, \alpha R)) \leqslant \mu(C(R, \alpha R)) \leqslant \psi(\alpha)\tilde{R}.$$

Следовательно,

$$\mu(C(z, \alpha R)) < 2\psi(\alpha)\tilde{R}. \tag{2.8}$$

Пусть теперь $\alpha \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}$. Если круги $C(z, \alpha R)$ и $C(R, \alpha R)$ не пересекаются, то $\mu(C(z, \alpha R)) = 0$. Если же названные круги пересекаются, то

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{r}{R} \leqslant 3.$$

Поэтому, используя неравенство (2.8) и неравенство $\psi(3\alpha) < 9\psi(\alpha)$, вытекающее из (2.8), получим, что

$$\mu(C(z, \alpha r)) < 2\psi\left(\alpha\frac{r}{R}\right)\tilde{R} < 18 \cdot 3^{\rho+1}\psi(\alpha)\tilde{R}. \tag{2.9}$$

Отметим еще, что

$$\mu(C(R, \alpha R)) \geqslant \mu(C(R, \alpha_m R)) = \psi(\alpha_m)\tilde{R} > \psi(\alpha^2)\tilde{R} = 2y(\alpha)\tilde{R},$$

$$\alpha_m \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{m+1}.$$

Так определенная функция $y(\alpha)$ удовлетворяет условию (2.6). Действительно,

$$\int_0 \ln\frac{1}{t}\,dy(t) = \frac{1}{2}\int_0 \ln\frac{1}{t}\,d\psi(t^2) = \frac{1}{4}\int_0 \ln\frac{1}{t}\,d\psi(t) = \infty.$$

Возьмем теперь множество $E = \{q_n\}$ такое же, как в замечании 6, и последовательность R_n, $R_{n-1}^2 = \frac{1}{4}R_n$, $R_1 = 8$. Построим круги $C(R_n, q_nR_n)$. В каждом круге распределим массу указанным выше способом. Пусть $x(\alpha)$ — функция плотности полученной меры. Из неравенства (2.9) следует, что

$$x(\alpha) < 18\cdot 3^{\rho+1}\psi(\alpha) < \Phi(\alpha).$$

Каждый круг диаметром, перпендикулярным вещественной оси, рассечем на два полукруга. Оставим лишь массу, расположенную в правом полукруге. Для вновь полученной меры μ_1 и ее функции плотности $x_1(\alpha)$ выполняются неравенства

$$x_1(\alpha) < \Phi(\alpha), \quad \mu_1(R_n, \alpha R_n) > y(\alpha)\tilde{R}_n, \text{ при } \alpha < q_n.$$

Оценим теперь функцию

$$v_h(z) = \int\limits_{C\left(z,\, \frac{1}{4}r\right)} \ln\left|1 - \frac{hz}{\zeta - z}\right| d\mu_1(\zeta).$$

Возьмем $z = (1-\delta_n)R_n$, $h = -a$, где $a > 0$. Получим

$$v_h(z) = \frac{1}{r}\int \ln\left|1 + \frac{a(1-\delta_n)R_n}{\zeta - z}\right| d\mu_1(\zeta).$$

Из взаимного расположения точек z и ζ следует, что $\frac{\pi}{2} < \arg(\zeta - z) < < \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$v_h(z) > \frac{1}{r}\int \ln\left|1 + i\frac{a(1-\delta_n)R_n}{|\zeta - z|}\right| d\mu_1(\zeta) > \frac{1}{r}\int \ln\left|1 + i\frac{a(1-\delta_n)R_n}{|\zeta - R_n| + \delta_nR_n}\right| d\mu_1(\zeta).$$

Введем новую переменную $t: |\zeta - R_n| = tR_n$ и обозначим $t_n = = \min\left(q_n, \frac{1}{4} - \delta_n\right)$. Тогда получим

$$v_h(z) > \frac{1}{r}\int_0^{t_n} \ln\left|1 + i\frac{a(1-\delta_n)}{t + \delta_n}\right| d\mu_1(R_n, tR_n) > \int_0^{t_n} \ln\left|1 + i\frac{a(1-\delta_n)}{t_n + \delta_n}\right| dy(t).$$

Из выполнения условия (2.6) для функции $y(t)$ следует, что для того чтобы функция $v_h(z)$ была ограниченной вне некоторого множества C, необходимо, чтобы это множество содержало все интервалы вида $[(1-\delta)R_n, R_n]$, где n такое, что $q_n \geqslant \frac{1}{4}$, при некотором фиксированном δ. Такое множество C не может покрываться системой кругов линейной плотности нуль. Поэтому построенная мера μ_1 не принадлежит классу σ' и $\Phi\mu_1(\alpha) = = x_1(\alpha) \leqslant \Phi(\alpha)$.

Отметим, что некоторым усложнением рассуждений можно добиться того, чтобы мера μ_1 была сосредоточена лишь на последовательности точек z_n, причем $\mu_1(z_n) = 1$. Для этого круги $C(R, \alpha_mR)$ нужно разбить сеткой квадратов с соответствующей длиной стороны и помещать в вершинах квадратов единичные массы, а не распределять массу равномерно, как это делали мы. В этом случае все оценки усложняются, однако их можно провести. Так построенная мера будет соответствовать некоторой субгармонической функции вида $\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция.

Покажем еще точность утверждений 3 и 4 теоремы 1. Для этого рассмотрим меры μ_1 и μ_2, сосредоточенные в точках e^n $(n > 2)$,

$$\mu_1(e^n) = \frac{1}{\ln n} e^{\frac{n}{2}}, \quad \mu_2(e^n) = \frac{1}{n} e^{\frac{n}{2}},$$

$\rho(r) = \frac{1}{2}$ является формальным порядком для обеих мер, причем для первой меры выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \varepsilon_1(r) \ln \ln r = 1,$$

а для второй —

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \varepsilon_2(r) \ln \ln r = 1.$$

Легко проверить, что мера μ_1 не принадлежит классу $в'$, а мера μ_2 — классу $г'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, 1956.
2. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. «Наука», 1966.
3. Н. С. Ландкоф. Емкости и мера Хаусдорфа. Оценки потенциалов. УМН, 20 (1965).
4. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. ГИТТЛ, 1941.
5. L. Ahlfors. Ein Satz von H. Cartan und seine Anwendung auf die Teorie der meromorphen Functionen. Soc. sci. fenn. Comment. Phys.— math., 5, 16, (1931).
6. L. Ahlfors and M. Heins. Questions of regularity connected with Phragmen — Lindelöf principle. Ann. of Math. (2), 50, 341—346, (1949)
7. A. Pfluger. Die wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analischer Funktionen. Comm. Math. Helv. 12, 25—69, (1939).
8. W. Hayman. Questions of regularity connected with Phragmen — Lindelöf principle. J. math. pures and appl., 35, 115—126, (1956).
9. Н. В. Говоров. Автореф. канд. дисс. Ростов-на-Дону, 1966.
10. Н. В. Говоров. Об индикаторе функций нецелого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости. ДАН СССР, 162, 495—498, (1966).
11. Н. В. Говоров. Об индикаторе функций целого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости. ДАН СССР, 172, 763—766, (1967).
12. И. Ф. Красичков-Терновский. Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней. Матем. сб., 70 (112), 198—230, (1966).
13. И. Ф. Красичков-Терновский. Сравнение целых функций целого порядка по распределению их корней. Матем. сб., 71 (113), 406—419, (1966).
14. И. В. Ушакова. Некоторые оценки субгармонических функций в круге. Зап. мех-матем. ф-та ХГУ и ХМО, 29, серия 4 (1963).
15. H. Cartan. Sur les systemes des fonctions holomorphes a variete lineares et leurs applications. Ann. Ec. Norm. Sup., 3, 255—346, (1928).
16. M. Brelot. Etude des fonctions sous — harmoniques au voisinage d'un point singulier. Annales de l'institut Fourier, I, 1950.
17. С. Стоилов. Теория функций комплексного переменного. т. 2. Изд-во иностр. лит., 1962.
18. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций. ГИТТЛ, 1950.
19. А. Ф. Гришин. О функциях, голоморфных внутри угла и имеющих там нулевой порядок. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.
20. H. W. E. Jung. Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. J. reine angew. Math, 123, 241—257, (1901).
21. Г. Хадвигер, Г. Дебруннер. Комбинаторная геометрия плоскости. «Наука», 1965.

Поступила 17 июня 1967 г.