СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУОСИ

В. П. Гурарий

Обозначим через $L(R)$ пространство суммируемых на вещественной оси R функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\|_L = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt.$$

Это пространство является нормированным кольцом относительно операции свертывания. Пусть $L^\infty(R)$ — пространство, сопряженное пространству $L(R)$. Это пространство состоит из (в существенном ограниченных на всей оси) функций $g(t)$ с нормой.

$$\|g\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{-\infty<t<\infty} |g(t)|.$$

С каждой функцией $g(t) \in L^\infty(R)$ свяжем систему $\{g(t-\tau)\}$ всех ее сдвигов и введем в рассмотрение слабое замыкание B_g линейной оболочки этой системы*.

В [1] Берлинг определил спектр Λ_g функции $g(t) \in L^\infty(R)$ как множество всех вещественных чисел x, таких что $e^{-ixt} \in B_g$ и доказал, что каждая нетривиальная функция из $L^\infty(R)$ имеет непустой спектр. Берлинг доказал также, что если спектр функции $g(t)$ состоит из единственной точки x вещественной оси, то с точностью до постоянного множителя эта функция имеет вид e^{-ixt}, и поставил вопрос о спектральном синтезе в пространстве $L^\infty(R)$, т. е. вопрос о возможности аппроксимировать в слабом смысле функцию $g(t)$ линейными комбинациями экспонент e^{-ixt} с показателями из спектра Λ_g. При этом оказалось, что вопросы спектральной теории тесно связаны с вопросом описания замкнутых идеалов в кольце $L(R)$. Теорема о непустоте спектра эквивалентна аппроксимационной теореме Винера. Тот факт, что функции с единственной точкой спектра x имеют вид e^{-ixt}, эквивалентен отсутствию примарных идеалов в кольце $L(R)$. Вопрос о возможности спектрального синтеза эквивалентен вопросу о представлении замкнутого идеала I кольца $L(R)$ в виде пересечения максимальных идеалов, содержащих I.

---

* Всюду в дальнейшем последовательность функций $\{g_n(t)\}_1^\infty$, $g_n \in L^\infty(a, b)$ называется слабо сходящейся к функции $g(t) \in L^\infty(a, b)$ на интервале (a, b), если для любой функции $f(t) \in L(a, b)$

$$\int_a^b f(t)\,g_n(t)\,dt \to \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \quad (n \to \infty),$$

Заметим, что спектр Λ_g функции $g(t)$ — замкнутое множество вещественной оси и что для любого замкнутого множества E на вещественной оси существует функция $g(t) \in L^\infty(R)$, спектр которой $\Lambda_g = E$.

Отметим еще один факт, позволяющий сводить ряд задач спектральной теории к задачам теории аналитических функций.

Спектр Λ_g функции $g(t)$ совпадает с особенностями ее двухстороннего преобразования Лапласа $G(z)$ в комплексной плотности z ([2], [3])*,

$$G(z) = \begin{cases} G^+(z) = \int\limits_0^\infty g(t)\, e^{itz}\, dt, & \operatorname{Im} z > 0 \\ G^-(z) = -\int\limits_{-\infty}^0 g(t)\, e^{itz}\, dt, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Таким образом, если некоторый интервал (a, b) вещественной оси свободен от точек спектра функции $q(t)$, то функции $G^+(z)$ и $G^-(z)$ являются аналитическим продолжением друг друга через интервал (a, b).

Последний факт в несколько иной формулировке был впервые установлен Карлеманом [5], (см. также [6]).

Мы не будем здесь останавливаться на других задачах спектральной теории ограниченных на оси функций и отсылаем читателя к обзору Герца [7] обширной литературы, посвященной этой теории. Упомянем только весьма важный результат Маливена [8], который доказал, что существуют функции из $L^\infty(R)$, не аппроксимирующиеся в слабом смысле линейными комбинациями экспонент с показателями из спектра.

Обратим теперь внимание на то обстоятельство, что спектр Берлинга функции $q(t)$, равной нулю на левой полуоси, совпадает со всей вещественной осью, потому что $G^-(z) \equiv 0$ и, следовательно, множество особенностей $G(z)$ (1) заполняет всю вещественную ось. Поэтому спектр Берлинга не позволяет различать функции пространства $L^\infty(R)$, равные нулю на левой полуоси.

В настоящей статье определяется спектр для ограниченных в существенном функций, равных нулю на левой полуоси, и рассматривается ряд задач спектрального анализа и синтеза, вполне аналогичных соответствующим задачам на всей оси. При этом оказывается, что определяемый здесь спектр, естественно связанный с полуосью, в отличие от случая всей оси может быть комплексным и кратным и что существуют функции с пустым спектром. Тем не менее можно построить спектральную теорию ограниченных функций на полуоси, продвинув ее в такой же степени, как это было сделано для всей вещественной оси [7].

Обозначим $L(R^+)$ подпространство кольца $L(R)$, состоящее из функций, равных нулю на левой полуоси.

Преобразование Фурье $F(z)$ функции $f(t) \in L(R^+)$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-itz}\, dt \tag{2}$$

аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, непрерывная в замкнутой полуплоскости.

---

* См. также исследование Б. И. Коренблюма по гармоническому анализу функций, экспоненциально растущих на всей оси [4].

Хорошо известно, что после введения умножения в пространстве $L(R^+)$ как операции свертывания

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau.$$

$L(R^+)$ становится коммутативным нормированным кольцом без единицы, максимальные идеалы которого отождествляются с точками замкнутой нижней полуплоскости в том смысле, что каждый максимальный идеал $M(z_0)$, $\operatorname{Im} z_0 \leqslant 0$ состоит из всех функций $f(t) \in L(R^+)$, у которых $F(z_0) = 0$, [9].

Пусть $L^\infty(R^+)$ — пространство, сопряженное пространству $L(R^+)$. Это пространство можно отождествить с пространством ограниченных в существенном на полуоси R^+ функций $g(t)$ с нормой

$$\|g\|_{L^\infty} = \operatorname*{esssup}_{t \in R^+} |g(t)|. \tag{3}$$

Определение. Функция $g_\tau(t)$, $\tau > 0$,

$$g_\tau(t) = \begin{cases} g(t+\tau), & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

называется левым сдвигом функции $g(t)$.

Для каждой функции $g(t) \in L^\infty(R^+)$ введем в рассмотрение слабое замыкание B_g на правой полуоси линейной оболочки системы ее левых сдвигов $\{g_\tau(t)\}$, $\tau > 0$.

Определение. Спектром функции $g(t) \in L^\infty(R^+)$ называется множество Λ_g точек z, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, таких что $e^{-izt} \in B_g$.

Легко видеть, что точка z принадлежит Λ_g в том и только в том случае, если для любой функции $f(t) \in L(R)$ из равенства

$$\int_0^\infty f(t)\, g(t+\tau)\,dt = 0, \quad \tau \geqslant 0, \tag{4}$$

следует

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-itz} dt = 0, \tag{5}$$

т. е. обращение в нуль в точке z преобразования Фурье функции $f(t)$.

В самом деле, если некоторая функция $f(t)$ удовлетворяет равенству (4), то для любой функции $\tilde{g}(t) \in B_g$

$$\int_0^\infty f(t)\,\tilde{g}(t)\,dt = 0,$$

в частности, если $z \in \Lambda_g$, имеет место равенство (5). С другой стороны, если $e^{-itz} \in B_g$, то существует функция $f(t)$, ортогональная всем функциям из B_g, но не удовлетворяющая равенству (5). Поэтому спектр Λ_g функции $g(t) \in L^\infty(R^+)$ совпадает с множеством общих нулей преобразований Фурье функций из $L(0, \infty)$, для которых справедливо равенство (4).

Обозначим I_g множество всех функций $f(t) \in L(R^+)$, удовлетворяющих равенству (4). Так как I_g — подпространство $L(R^+)$ и с каждой функцией $f_1(t) \in L(R^+)$ свертка $f_1 * f \in I_g$, то I_g — замкнутый идеал кольца $L(R^+)$.

Обозначим J_g пересечение всех максимальных идеалов, содержащих I_g. Так как спектр Λ_g совпадает с множеством общих нулей преобразований Фурье функций из I_g, то

$$J_g = \bigcap_{z \in \Lambda_g} M(z).$$

Позже мы покажем, что, как и в случае всей оси, вопросы спектрального анализа и синтеза тесно связаны с задачами описания замкнутых идеалов кольца $L(R^+)$ и что, в частности, задачи спектрального анализа, состоящие в описании множества функций, имеющих пустой спектр или одноточечный спектр, двойственны задачам описания примарных идеалов кольца $L(R^+)$.

Прежде чем перейти к описанию примарных идеалов кольца $L(R^+)$, заметим, что собственное подпространство I кольца $L(R^+)$ является замкнутым идеалом в том и только в том случае, если оно инвариантно относительно всех правых сдвигов, т. е. вместе с каждой функцией $f(t)$ содержит все функции вида $f(t-\tau)$, $\tau > 0$.

Действительно, если I — замкнутый идеал, а $I^{\perp} \subset L^{\infty}(R^+)$ — аннулятор I, то для любых функций $f(t) \in I$, $f_1(t) \in L(R^+)$, $g(t) \in I^{\perp}$ справедливо равенство

$$0 = \int_0^{\infty} (f_1 * f)(t)\, g(t)\, dt = \int_0^{\infty} f_1(\tau) \int_0^{\infty} f(t-\tau)\, g(t)\, dt.$$

В силу произвольности $f_1(\tau) \in L(R^+)$ для всех $\tau \geqslant 0$

$$\int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)\, g(t)\, dt = 0, \tag{6}$$

а последнее равенство означает, что $f(t-\tau) \in I$ при всех $\tau > 0$.

Если же с другой стороны I — подпространство, инвариантное относительно всех правых сдвигов, то для любых функций $f \in I$ и $g \in I^{\perp}$ справедливо равенство (6), из которого для любой функции $f_1(t) \in L(R^+)$ следует

$$\int_0^{\infty} (f_1 * f)(t)\, g(t)\, dt = 0.$$

Таким образом, $f_1 * f \in I$ и, следовательно, I — замкнутый идеал.

Как было уже отмечено в [10], естественно выделяются три типа примарных идеалов: примарные идеалы $I(\infty)$, отвечающие бесконечно удаленной точке полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ (так мы называем замкнутые идеалы, не содержащиеся ни в одном максимальном), примарные идеалы $I(z)$, отвечающие точке z открытой полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ (так называются замкнутые идеалы, не содержащиеся ни в одном максимальном идеале, отличном от $M(z)$, и ни в одном примарном идеале, отвечающем бесконечно удаленной точке); примарные идеалы, отвечающие точке вещественной оси.

Определение. *Множество замкнутых идеалов будем называть цепочкой, если оно совершенно упорядочено по вложению. Цепочка примарных идеалов, принадлежащих некоторому замкнутому идеалу I, называется максимальной в I, если любой примарный идеал, принадлежащий I, совпадает с одним из идеалов цепочки.*

1. Примарные идеалы, отвечающие бесконечно удаленной точке и точкам открытой полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое семейство функций $\{f_\alpha(t)\}$ пространства $L(R^+)$, $I_{\mathfrak{M}}$ — замыкание множества всех конечных линейных комбинаций вида

$$\sum_{\alpha, \beta} f_\alpha(t - \tau_{\alpha\beta}) \cdot c_{\alpha\beta}, \quad \tau_{\alpha\beta} \geqslant 0$$

в пространстве $L(R^+)$.

Подпространство $I_{\mathfrak{M}}$ инвариантно относительно правых сдвигов и, значит, замкнутый идеал кольца $L(R^+)$.

В [11] доказана следующая аппроксимационная теорема. Для того, чтобы $I_{\mathfrak{M}}$ совпадало со всем пространством $L(R^+)$ необходимо и достаточно выполнение двух условий:

а) Нет примыкающего к нулю интервала $(0, \gamma)$, на котором каждая функция из $\mathfrak{M}$ равна нулю почти всюду.

б) Преобразования Фурье всех функций из $\mathfrak{M}$ одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant 0$.

С помощью этой теоремы легко получить описание примарных идеалов, отвечающих бесконечно удаленной точке и примарных идеалов, отвечающих точкам открытой нижней полуплоскости.

Обозначим $I_\gamma(\infty)$ $(\gamma > 0)$ подпространство $L(R^+)$, состоящее из функций, равных нулю почти всюду на интервале $(0, \gamma)$.

Теорема 1. $\{I_\gamma(\infty)\}$ $(\gamma > 0)$ — *упорядоченная максимальная цепочка примарных идеалов, отвечающих бесконечно удаленной точке.*

Доказательство. Подпространство $I_\gamma(\infty)$ инвариантно относительно всех правых сдвигов и, следовательно, есть замкнутый идеал кольца $L(0, \infty)$. Так как $I_\gamma(\infty) = L(\gamma, \infty)$, то $I_\gamma(\infty)$ не содержится ни в одном максимальном идеале кольца $L(R^+)$, т. е. $I_\gamma(\infty)$ — примарный идеал, отвечающий бесконечно удаленной точке, а все множество $\{I_\gamma(\infty)\}_\gamma$, упорядоченное по включению, является цепочкой примарных идеалов. Пусть теперь $I(\infty)$ — какой-нибудь примарный идеал, отвечающий бесконечно удаленной точке. Обозначим через γ_f длину наибольшего интервала, на котором функция $f(t)$ равна нулю почти всюду и пусть

$$\gamma_I = \inf_{f \in I} \gamma_f. \tag{7}$$

Применяя приведенную выше аппроксимационную теорему к кольцу $L(\gamma, \infty)$, получим, что

$$I = L(\gamma_I, \infty) = I_{\gamma_I}(\infty).$$

Мы доказали, что цепочка $\{I_\gamma(\infty)\}_0^\infty$ — максимальная.

С каждой точкой z открытой нижней полуплоскости свяжем цепочку примарных идеалов $\{I_n(z)\}_{n=1}^\infty$,

$$I_n(z) = \{f(t) \in L(R^+):\ \ F^{(j)}(z) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n\},$$

принадлежащих максимальному идеалу $M(z) = I_0(z)$.

Теорема 2. *Цепочка примарных идеалов* $\{I_n(z)\}_1^\infty$ *максимальна.*

Доказательство. Заметим сначала, что если $F(x)$ — преобразование Фурье функции $f(t) \in L(R^+)$, то $\frac{F(x)}{x - z}$, $\operatorname{Im} z < 0$ является преобразованием Фурье некоторой функции из $L(R)$, которая на левой полуоси равна

$$\frac{e^{+itz}}{i}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-i\tau z}\,d\tau = \frac{\sqrt{2\pi}}{i}\,e^{+itz}F(z).$$

Поэтому, если $F(x)$ — преобразование Фурье функции $f(t)$ обращается в нуль в точке z, $\operatorname{Im} z < 0$, то $\frac{F(x)}{x-z}$ является преобразованием Фурье некоторой функции из $L(R^+)$, при этом если n — кратность нуля функции $F(x)$ в точке z, $\operatorname{Im} z < 0$ то $\frac{F(x)}{(x-z)^n}$ также является преобразованием Фурье некоторой функции из $L(R^+)$.

Пусть теперь I — какой-нибудь примарный идеал, содержащийся в максимальном идеале $M(z)$. Обозначим $1 + n_f(z)$ кратность нуля преобразования Фурье функции $f(t) \in I$ в точке z. Пусть далее $n_I = \min\limits_{f \in I} n_f$. Рассмотрим множество всех функций из $L(R^+)$, преобразования Фурье которых имеют вид $\frac{F(x)}{(x-z)^{1+n_I}}$, где $F(x)$ преобразования Фурье функции $f(t) \in I$ и $f(t)$ пробегает весь примарный идеал I. Легко видеть, что это множество функций не содержится ни в одном максимальном идеале, включая и максимальный идеал $M(z)$, и ни в одном примарном идеале, отвечающем бесконечно удаленной точке. В силу аппроксимационной теоремы это множество совпадает со всем пространством $L(R^+)$ и, значит, I совпадает с примарным идеалом $I_n(z)$ при $n = n_I$. Теорема доказана.

2. Примарные идеалы, отвечающие точке вещественной оси

Покажем теперь, что ситуация, в некотором смысле аналогичная отмеченной в теореме 1, сохраняется при описании примарных идеалов, отвечающих точкам вещественной оси.

Обозначим $B_{1/2,\,\alpha}$ подпространство $L^\infty(R^+)$, состоящее из функций, совпадающих почти всюду на положительной полуоси с функциями, которые продолжаются на всю комплексную плоскость как целые функции порядка 1/2 конечного типа, меньшего или равного α.

Для каждой точки x вещественной оси введем в рассмотрение множества функций $\{I_\alpha(x)\}_{\alpha \geqslant 0}$ пространства $L(R^+)$,

$$I_\alpha(x) = \left\{ f(t) \in L(R^+) : \int_0^\infty f(t) e^{-ixt} g(t)\,dt = 0_{\forall g(t) \in B_{1/2,\,\alpha}} \right\} \tag{8}$$

Теорема 3. *Каждой точке x вещественной оси отвечает максимальная цепочка примарных идеалов $\{I_\alpha(x)\}^{\alpha>0}$, где $I_\alpha(x)$ определяются формулой (8). При этом*

$$\overline{\bigcup_{\alpha>0} I_\alpha(x)} = I_0(x) = M(x), \quad \bigcap_{\alpha>0} I_\alpha(x) = \{0\},$$

Установим сначала ряд простых предложений, относящихся к множествам $I_\alpha(x)$, $\alpha \geqslant 0$.

1°. $I_\alpha(x)$ — замкнутый идеал, содержащийся в максимальном идеале $M(x)$.

Действительно, если $f(t)\in I_\alpha(x)$, то при $\tau>0$ для любой функции $g(t)\in B_{1/2,\alpha}$ справедливо равенство

$$\int_\tau^\infty f(t-\tau)\,e^{-ixt}g(t)\,dt=\int_0^\infty f(t)\,e^{-ixt}g(t+\tau)\,dt\,e^{-ix\tau}=0. \tag{9}$$
$$(\tau\geqslant 0),$$

так как $g(t+\tau)\in B_{1/2,\alpha}$ при $\tau>0$. Из равенства (9) получается, что $f(t-\tau)\in I_\alpha(x)$ при $\tau>0$. Таким образом, $I_\alpha(x)$ — подпространство, инвариантное относительно всех правых сдвигов и, так как $I_\alpha(x)\subset I_\beta(x)$ при $\alpha>\beta$, то множество $\{I_\alpha(x)\}\ \alpha\geqslant 0$ образует цепочку замкнутых идеалов. Функция $g(t)\equiv 1\in B_{1/2,\alpha}$ при любом α, поэтому для любой функции $f(t)\in I_\alpha(x)$

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-ixt}\,dt=0.$$

Это означает, что $I_\alpha(x)\subset M(x)$. Заметим также, что $M(x)=I_0(x)$, так как целая функция порядка $1/2$ нулевого типа, ограниченная на вещественной полуоси, есть постоянная.

2°. Отображение $f(t)\to f(t)\,e^{-itx}$ — изоморфное отображение идеала $I_\alpha(x)$ в идеал $I_\alpha(0)$. Это очевидное обстоятельство позволяет в дальнейшем ограничиться случаем $x=0$, так что все последующие предложения, справедливые для любой цепочки идеалов $I_\alpha(x)$, будут установлены для цепочки идеалов $I_\alpha(0)$, которые далее будут обозначаться I_α.

3°. Функция $f(t)\in I_\alpha$ в том и только в том случае, если $f(\lambda t)\in I_{\alpha\sqrt{\lambda}}$. В частности, $f(\lambda t)\in I_\alpha$ при $\lambda>1$. В самом деле, пусть $g(t)\in B_{1/2,\sqrt{\lambda}\alpha}$ и $f(t)\in I_\alpha$. Тогда

$$\int_0^\infty f(\lambda t)\,g(t)\,dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(t)\,g\left(\frac{t}{\lambda}\right)dt=0, \tag{10}$$

так как $g\left(\frac{t}{\lambda}\right)\in B_{1/2,\alpha}$. Из равенства (10) получается, что $f(\lambda t)\in I_{\alpha\sqrt{\lambda}}$ и что, если $f(t)\in I_{\alpha\sqrt{\lambda}}$, то $f\left(\lambda\cdot\frac{t}{\lambda}\right)\in I_\alpha$.

4°. Для каждого $\alpha>0$ существует функция, отличная от тождественного нуля и принадлежащая I_α. Это предложение нам удобно будет доказать несколько позже, хотя оно, вообще говоря, может быть доказано независимо от дальнейшего.

5°. Для каждой точки $z\neq 0\ (\operatorname{Im} z\leqslant 0)$ и каждого I_α существует функция $f(t)\in I_\alpha$, преобразование Фурье которой отлично от нуля в этой точке.

Действительно, в противном случае для всех функций $f(t)\in I_\alpha$

$$F(z)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-izt}\,dt=0,$$

и в силу 3° при $\lambda>1$

$$\int_0^\infty f(\lambda t)\,e^{-izt}\,dt=0.$$

Из последнего равенства следует, что $F\left(\frac{z}{\lambda}\right)=0$ при всех $\lambda>1$ т. е., что $F(z)\equiv 0$, а это противоречит 4°.

6°. Если функция $f(t) \in I_\alpha$, то и $f(t+\gamma_f) \in I_\alpha$. Поэтому I_α не содержится ни в одном примарном идеале, отвечающем бесконечно удаленной точке (см. теорему 1).

7°.

$$\bigcap_{\alpha<\alpha_0} I_\alpha = I_{\alpha_0}.$$

Действительно, если $f(t) \in I_\alpha$ при всех $\alpha < \alpha_0$ и $g(t) \in B_{1/2,\alpha_1}$, $\alpha_1 < \alpha_0$, то

$$\int_0^\infty f(t)\, g(\lambda t)\, dt = 0 \tag{11}$$

при любом λ, $\lambda < \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^2$. При переходе в (11) к пределу при $\lambda \to \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^2$, законном в силу теоремы Лебега, будем иметь

$$\int_0^\infty f(t)\, g\left(\frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^2}\, t\right) dt = 0.$$

Последнее равенство означает, что $f(t) \in I_{\alpha_0}$, т. е. $I_{\alpha_0} \supset \bigcap_{\alpha>\alpha_0} I_\alpha$. Справедливость же обратного включения очевидна.

8°.

$$\bigcap_{\alpha>0} I_\alpha = \{0\}.$$

Если бы существовала не тождественно равная почти всюду нулю функция $f(t) \in \bigcap_{\alpha>0} I_\alpha$, то, в частности, имело бы место равенство

$$\int_0^\infty f(t) \cos \alpha \sqrt{t}\, dt = 0 \quad (0 \leqslant \alpha < \infty),$$

откуда следовало бы что $f(t) = 0$ почти всюду.

9°. Идеал I_α строго содержится в идеале I_β при $\alpha > \beta$. Предположим, что $I_{\alpha_0} = I_{\beta_0} (\alpha_0 \neq \beta_0)$. Тогда в силу 3° $I_{\alpha_0\sqrt{\lambda}} = I_{\beta_0\sqrt{\lambda}}$ и, следовательно, $I_\alpha = I_\beta$ при любых α и β, а в этом случае $I_\alpha = \{0\}$ (8°), что противоречит 4°.

Предложения 1°, 5°, 6°, 9° показывают, что множество $\{I_\alpha\}$ является цепочкой примарных идеалов, содержащихся в максимальном идеале $M(0)$.

Доказательство теоремы 3 основано на леммах 1—4, которые, как нам кажется, представляют и самостоятельный интерес.

Введем предварительно следующие обозначения.

Пусть, как и раньше, I_g — множество всех функций $f(t) \in L(R^+)$, удовлетворяющих равенству (4) и $f \in I_g$.

Рассмотрим функцию

$$h(\tau) = \int_0^\infty f(t)\, g(t+\tau)\, dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)\, g(t)\, dt. \tag{12}$$

Эта функция равномерно непрерывна на всей вещественной оси, в силу равенства (4) равна нулю на правой полуоси и удовлетворяет следующему неравенству:

$$|h(\tau)| \leqslant \|f\|_L \|g\|_{L^\infty}. \tag{13}$$

Пусть $G^+(z)$ и $H(z)$ — преобразования Лапласа функций $g(t)$ и $h(t)$,

$$G^+(z) = \int_0^\infty g(t)\,e^{itz}\,dt,\ \operatorname{Im} z > 0, \tag{14}$$

$$H(z) = \int_{-\infty}^0 h(t)\,e^{itz}\,dt,\ \operatorname{Im} z < 0, \tag{15}$$

$G^+(z)$ и $H(z)$ — функции, аналитические в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$, соответственно, $\operatorname{Im} z < 0$.

Легко видеть, что отношение $\frac{H(z)}{F(z)}$, $H(z)$ и $F(z)$ определены (15) и (2), не зависит от функции $f \in I_g$. Действительно, если $f_1, f_2 \in I_g$ и

$$h_i(\tau) = \int_\tau^\infty f_i(t-\tau)\,g(t)\,dt,\ i = 1,2,$$

то

$$f_1(-t) * h_2(t) = f_2(-t) * h_1(t).$$

После применения преобразования Лапласа к обеим частям последнего равенства получим $F_1(z)\,H_2(z) = F_2(z)\,H_1(z)$, $\operatorname{Im} z<0$, или $\frac{H_1(z)}{F_1(z)} = \frac{H_2(z)}{F_2(z)}$. Таким образом, отношение $\frac{H(z)}{F(z)}$ зависит только от функции $g(t)$.

Оказывается, что имеет место гораздо более сильное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $g(t) \in L^\infty(R)$ и $f(t) \in I_g$. Функция*

$$G(z) = \begin{cases} G^+(z), & \operatorname{Im} z > 0 \\ \dfrac{H(z)}{F(z)}, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \tag{16}$$

где $G^+(z)$, $F(z)$ и $H(z)$ определены в (14), (2), (12), (15), однозначная аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением, быть может, множества точек, в которых одновременно обращаются в нуль преобразования Фурье всех функций из I_g.*

Доказательство. Если в некоторой точке x_0 вещественной оси $F(x_0) \neq 0$, то в некотором прямоугольнике

$$S_{\delta,h} = \{z = x + iy\colon\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ -h \leqslant y \leqslant 0\}$$
$$|F(z)| \geqslant a_{\delta,h} > 0. \tag{17}$$

Обозначим через $\varphi_\varepsilon(y, t)$ решение уравнения

$$e^{yt} f(t) * \varphi_\varepsilon(y, t) = \frac{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} t}{\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)^2}\,e^{ixt},\ z = x + iy \in S_{\delta,h}, \tag{18}$$

$$\varepsilon < \frac{\delta}{2},$$

которое существует и непрерывно зависит в метрике пространства $L(R)$ от параметра y, $0 \geqslant y \geqslant -h$ (см. [12, стр 125]. Умножим обе части

* Мы уже отмечали, что аналогичное утверждение для двухстороннего преобразования Лапласа было впервые доказано Карлеманом. Приводимое здесь доказательство несколько отличается от Карлемановского, а сама лемма является следствием более общего утверждения [11, стр. 182]

равенства (4) на $\varphi_\varepsilon(0, t)$ и проинтегрируем в пределах от $-\infty$ до ∞. После замены порядков интегрирования, законной в силу теоремы Фубини, получим, используя (18),

$$\int_0^\infty g(t)\frac{\sin^2\frac{\varepsilon t}{2}}{\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)^2}e^{ixt}\,dt=\int_{-\infty}^0\varphi_\varepsilon(0, t)\,h(t)\,dt=$$

$$=\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^0\varphi_\varepsilon(y, t)\,h(t)\,dt=\lim_{y\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{H(\lambda+z)}{F(\lambda+z)}\left(1-\frac{|\lambda|}{\varepsilon}\right)\frac{d\lambda}{\varepsilon}. \qquad (19)$$

Функция

$$G_\varepsilon(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty g(t)\frac{\sin^2\frac{\varepsilon t}{2}}{\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)^2}e^{itz}\,dt, & \operatorname{Im} z>0\\ \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{H(\lambda+z)}{F(\lambda+z)}\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{|\lambda|}{\varepsilon}\right)d\lambda, & \operatorname{Im} z<0\end{cases}$$

в силу равенства (19) — аналитическая в прямоугольнике

$$D_{\delta, h}=\left\{z=x+iy: x_0-\frac{\delta}{2}<x<x_0+\frac{\delta}{2},\ |y|\leqslant h\right\},$$

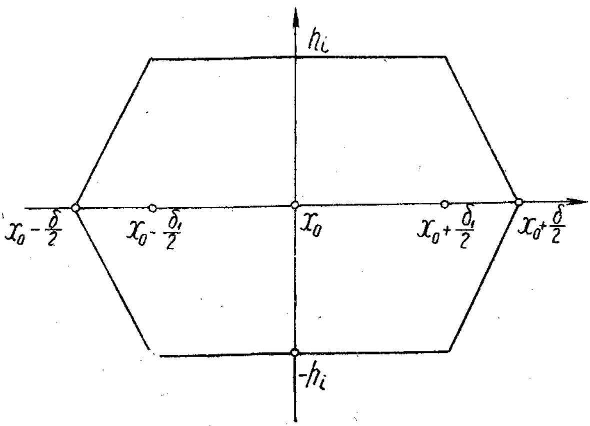
удовлетворяющая в этом прямоугольнике оценке

$$|G_\varepsilon(z)\leqslant\frac{C}{|y|}, \qquad (20)$$

где, [13], $C=\max\left\{\|g\|_L, \frac{1}{a_{\delta, h}}\|g\|_{L^\infty}\|f\|_z\right\}$.

Легко показать, что в прямоугольнике $D_{\delta_1, h}$, $\delta_1<\delta$, выполняется неравенство

$$|G_\varepsilon(z)|<C_{\delta_1}, \qquad (21)$$



причем постоянная C_{δ_1} не зависит от ε. (Хотя этот факт является следствием теоремы Левинсона [13], но из-за нетривиальности последней и простоты приведенного утверждения мы докажем его).

Действительно, в силу (20) функция $G_1(z)=G_\varepsilon(z)\left(z-x_0-\frac{\delta}{2}\right)\left(z-x_0+\frac{\delta}{2}\right)$ — аналитическая в области, изображенной на рисунке, симметричной относительно осей $x=x_0$, $y=0$, ограничена на границе области, постоянной, не зависящей от ε. Из принципа максимума следует, что в этой области $|G_1(z)|<C_{\delta_1}$ и, значит, в прямоугольнике $D_{\delta_1, h}$, $\delta_1<\delta$ $|G_\varepsilon(z)|<C_{\delta_1}$.

Поскольку в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ семейство $G_\varepsilon(z)$ сходится равномерно на каждом компакте, принадлежащем полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ или $\operatorname{Im} z < 0$, к функции $G(z)$, то функция $G(z)$ оказывается аналитической в прямоугольнике $D_{\delta_1, h}$ и следовательно, в окрестности любой точки z, в которой $F(z) \neq 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если I — какой-нибудь примарный идеал кольца $L(R^+)$, содержащийся в максимальном идеале $M(0)$, а $I^\perp$ аннулятор I, то существует $\alpha > 0$, такое что $I^\perp \subset B_{1/2, \alpha}$.*

Доказательство. Пусть $f(t) \in I$, $g(t) \in I^\perp$. Тогда $f(t-\tau) \in I$ при $\tau > 0$ и, значит, функция

$$h(t) = \int_\tau^\infty f(t-\tau) g(t)\, dt$$

равна нулю на правой полуоси. Так как I не содержится ни в одном максимальном идеале, отличном от $M(0)$, то функция

$$G(z) = \begin{cases} G^+(z), & \operatorname{Im} z > 0 \\ \dfrac{H(z)}{F(z)}, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

где $F(z)$, $G(z)$ и $H(z)$ определены равенствами (2), (14), (15), аналитическая и однозначная в силу леммы 1 во всей комплексной плоскости за исключением точек 0 и ∞. Оценим ее поведение в окрестности каждой из этих точек. В полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant h > 0$ справедливо следующее неравенство:

$$|G(z)| \leqslant \frac{\|g\|}{h}. \tag{22}$$

Для оценки функции $G(z)$ в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < -h$ заметим, что в этой полуплоскости функции $F(z)$ и $H(z)$ вполне регулярного роста, и поэтому индикатор функции $G(z)$ равен

$$h_G(\theta) = (K_H - K_F)|\sin\theta|, \quad 0 > \theta > -\pi, \tag{23}$$

где

$$K_H = \overline{\lim_{y\to\infty}} \frac{\ln|H(iy)|}{|y|}, \quad K_F = \overline{\lim_{y\to\infty}} \frac{\ln|F(iy)|}{|y|}.$$

Из ограниченности $F(z)$ и $H(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z < -h$ следует, что $K_H \leqslant 0$ и $K_F \leqslant 0$. С другой стороны, известно [14, стр. 607], что $K_F = -\gamma_f$, и так как определенное в (7) $\gamma_I = 0$, то γ_f может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора функции $f \in I$. Функция $G(z)$ не зависит от этого выбора, поэтому при $-\pi < \theta < 0$ из равенства (23) получается, что

$$h_G(\theta) \leqslant 0. \tag{24}$$

Неравенства (20), (22) показывают, что $G(z)$ имеет нулевую степень внутри углов $\left||\theta| - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$ при $|z| \to \infty$, причем $\delta > 0$ может быть сделано сколь угодно малым. Для оценки функции $G(z)$ внутри оставшихся углов воспользуемся следующим неравенством для $\ln\left|G\left(z - i\frac{h}{2}\right)\right|$ в нижней полуплоскости

$$\ln\left|G\left(z - i\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left|G\left(t - i\frac{h}{2}\right)\right|}{(t-x)^2 + y^2}\, dt + ky, \tag{25}$$

где $k = -h_G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ [14, стр. 311]. Из этого неравенства с учетом того, что (13)

$$|H(z)| \leqslant \frac{2\|f\|_L \|g\|_{L^\infty}}{h}, \quad y \leqslant -\frac{h}{2} \tag{26}$$

и что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left|F\left(t - i\frac{h}{2}\right)\right|}{1+t^2}\, dt > -\infty,$$

далее следует при $y \leqslant 0$, $h>0$

$$\ln\left|G\left(z - i\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\frac{C_1}{k} - \ln\left|F\left(t - i\frac{h}{2}\right)\right|}{(t-x)^2 + y^2}\, dt \leqslant \ln\frac{C_1}{h} + C_2\frac{1+|z|^2}{|y|}.$$

(Здесь и в дальнейшем C с индексами — положительные постоянные, не зависящие от z и h).

Таким образом, при $y \leqslant -\frac{h}{2}$ справедливо неравенство

$$\ln\left|G\left(z - i\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant \frac{C_3}{h^2} + C_4|z|^4 + C_5.$$

Последняя оценка показывает, что существуют постоянные C_6 и C_7 такие, что при $y \leqslant h$, $0 < h < 1$

$$\ln|G(z)| \leqslant \frac{C_6}{h^2} + C_7|z|^4. \tag{27}$$

Рассмотрим в полосе $|y| \leqslant 1$ функцию

$$G_1(z) = G(z)\, e^{-2C_7 z^4}.$$

Из оценок (22), (27) получается, что при $|y| \geqslant h$ $(0 < h < 1)$

$$|G_1(z)| \leqslant C_8 e^{\frac{C_6}{h^2}}.$$

Рассмотрим в прямоугольнике $D\,(|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant h)$ семейство аналитических функций $\{G_1(z \pm t)\}$, $1 < t < \infty$. Для всех функций этого семейства имеет место оценка

$$|G_1(z \pm t)| \leqslant C_8 e^{\frac{C_6}{|y|^2}}. \tag{28}$$

Из оценки (28) получается, что все функции семейства равномерно ограничены в прямоугольнике $D_1\,(|x| < 1 - \eta,\ |y| \leqslant h)$ при фиксированном η, $0 < \eta < 1$. Этот факт, являющийся следствием теоремы Левинсона легко доказывается непосредственно с помощью приема, аналогичного проведенному ранее. Только в этом случае в области, изображенной на рисунке, мы, полагая $x_0 = 0$, $\frac{\delta}{2} = 1$, $h < \frac{1}{2}$, h — фиксировано, и выбирая угол α при вершине шестиугольника, расположенной на оси x так, чтобы $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = k > 1$, рассмотрим семейство функций

$$G_t(z) = G(z \pm t)\, e^{\frac{C_6(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2(1-z^2)^2}}.$$

Тогда из оценки (28) получится, что на границе шестиугольника семейство $\{G_t(z)\}$ ограничено постоянной, не зависящей от t. Отсюда так же, как и раньше, следует, что семейство $\{G_t(z)\}$ равномерно ограничено в прямоугольнике $D\,(|x| \leqslant \eta,\ |y| \leqslant h)$, где $\eta = \frac{\delta_1}{2}$ (см. рисунок).

Поэтому в полосе $|y| \leqslant h$

$$G_1(z) = O(1),\ |z| \to \infty. \tag{29}$$

Объединяя неравенства (24), (29), получим для функции $G(z)$ оценку, справедливую внутри углов $\left||\theta| - \frac{\pi}{2}\right| > \frac{\pi}{2} - \delta$ при $|z| > r > 0$

$$|G(z)| < C_r e^{C_r |z|^4},$$

где C_r зависит только от $r > 0$.

После применения принципа Фрагмена—Линделефа оказывается, что функция $G(z)$ не выше минимального типа при порядке 1 при $z \to \infty$.

Представим теперь функцию $G(z)$ в виде суммы $G_1(z) + G_2(z)$, где $G_1(z)$ — главная часть лорановского разложения $G(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, $G_2(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

Функция $G_1(z)$ — целая, не выше минимального типа при порядке 1. Так как в полуплоскости $y > r > 0$ $G(z)$ равномерно стремится к нулю при $z \to \infty$, то функция $G_1(z)$ также стремится к нулю при $z \to \infty$ в полуплоскости $y > r > 0$.

Применяя к функции $G_1(z)$ принцип Фрагмена—Линделефа, получим, что $G_1(z) \equiv 0$ и, значит, $G(z) = G_2(z)$, т. е.

$$G(z) = o(1),\ z \to \infty. \tag{30}$$

Таким образом, единственная особая точка функции $G(z)$ — точка $z = 0$ и функция $G\left(-\frac{1}{z}\right)$ — целая.

Итак, рассмотрим целую функцию

$$G^*(z) = G\left(-\frac{1}{z}\right) = \begin{cases} G^{+*}(z) = G^+\left(-\frac{1}{z}\right), & \operatorname{Im} z > 0 \\ \dfrac{H^*(z)}{F^*(z)} = \dfrac{H\left(-\frac{1}{z}\right)}{F\left(-\frac{1}{z}\right)}, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Поскольку для функций $G^{+*}(z)$ и $H^*(z)$ имеют место неравенства

$$|G^{+*}(z)| \leqslant \frac{\|g\|_{L_\infty} |z|^2}{y},\ y > 0,\quad |H^*(z)| \leqslant \frac{\|f\|_L \|g\|_{L_\infty} |z|^2}{|y|}\ y < 0,$$

аналогичные неравенствам (22) и (26), то для $G^*(z)$ можно провести все предыдущие рассуждения и оценки с той только разницей, что из формулы для индикатора функции $G^*(z)$

$$h_{G^*}(\theta) = (K_{H^*} - K_{F^*})|\sin\theta|,\ 0 > \theta > -\pi,$$

вместо неравенства (24) получается неравенство

$$h_{G^*}(\theta) \leqslant -K_I |\sin\theta|,$$

где

$$K_I = \sup_{f \in I} K_{F^*} \leqslant 0, \tag{31}$$

$$K_{F^*} = \varlimsup_{|y| \to \infty} \frac{\ln|F^*(iy)|}{|y|} = \varlimsup_{y \to 0} |y| \ln|F(iy)|.$$

Поэтому в неравенстве (25) можно положить $k = K_I$ и получить вместо оценки (30) следующую:

$$|G^*(z)| < Ce^{-K_I|y|}.$$

Так как $G^*(z)$ — целая функция конечной степени, меньшей или равной $-K_I$, то коэффициенты ее разложения в ряд Тэйлора

$$G^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

оцениваются асимптотически:

$$|a_n| < \left(\frac{eA}{n}\right)^n, \quad A = -K_I \tag{32}$$

и в силу (30) $a_0 = 0$ (см. [14]).

По теореме Пойя функция $g(t)$ совпадает почти всюду на правой полуоси с функцией, продолжающейся на всю комплексную плоскость как целая функция нулевой степени, при этом

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^{n-1}.$$

Неравенства (32) показывают, что $g(t)$ — целая функция порядка 1/2 типа меньшего или равного $2\sqrt{A}$. Поскольку $g(t)$ — произвольная функция из $I^{\perp}$, то степени всех функций из $I^{\perp}$ равномерно ограничены $2\sqrt{A}$ и, значит, $I^{\perp} \subset B_{1/2,\,\alpha}$ при $\alpha = 2\sqrt{A} = 2\sqrt{-K_I}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть I — *примарный идеал, содержащийся в максимальном идеале* $M(0)$ *и пусть* $I^{\perp}$ *содержит хотя бы одну функцию* $g_0(t) \in B_{1/2,\,\alpha}$, *тип которой в точности равен* α. *Тогда* $B_{1/2,\,\alpha} \subset I^{\perp}$.

Доказательство. Нужно показать, что если $f(t) \in I$, то для любой функции $g(t) \in B_{1/2,\,\alpha}$ справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt = 0. \tag{33}$$

Докажем сначала, что равенство (33) выполняется при том дополнительном предположении, что $g(t) \in B_{1/2,\,\alpha} \cap L(0, \infty)$. Для этого введем функцию

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)\, g(t)\, dt \tag{34}$$

и докажем, что она равна нулю на левой полуоси.

Переходя в (34) к преобразованию Фурье, получим

$$H(x) = F(x)\, G(x), \tag{35}$$

где $F(x)$, $H(x)$, $G(x)$ определены равенствами (2), (14), (15), которые теперь имеют смысл и при вещественном значении аргумента. С другой стороны, как уже известно в силу леммы 1, определенное равенством (14) преобразование Лапласа функции $g_0(t)$, функция $G_0(z)$ — аналитическая во всей расширенной комплексной плоскости всюду за исключением точки $z = 0$ — представляется в нижней полуплоскости как отношение

$$G_0(z) = \frac{H_0(z)}{F(z)}, \quad \operatorname{Im} z < 0, \tag{36}$$

где $F(z)$ и $H_0(z)$ определены в (2) и (15),

$$h_0(\tau)=\int_\tau^\infty f(t-\tau)\,g_0(t)\,dt. \tag{37}$$

Из (35) и (36) получается, что

$$H(x)=\frac{H_0(x)\,G(x)}{G_0(x)},\quad H_0(x)=G_0(x)\,F(x),\quad x\neq 0$$

или, если функцию $H(x)$ представить в виде $H(x)=H^+(x)+H^-(x)$, где

$$H^+(z)=\int_0^\infty h(t)\,e^{itz}dt,$$

то

$$H^+(x)=\frac{H_0(\lambda)\,G(\lambda)}{G_0(\lambda)}. \tag{38}$$

Равенство (38) показывает, что функция $H^+(z)$, аналитическая и ограниченная в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, продолжается в нижнюю полуплоскость и является поэтому аналитической функцией во всей комплексной плоскости за исключением точек $z=0$ и $z=\infty$. Из равенства (35), если учесть, что $G(z)\to 0$ при $z\to\infty$, получается

$$\lim_{z\to\infty} H^+(z)=0$$

и, значит, $H^*(z)=H^+\left(-\frac{1}{z}\right)$ — целая функция.

Пусть, как в формуле (31), для функции $\Phi(z)$, аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$,

$$K_{\Phi^*}=\varlimsup_{y\to 0}|y|\ln|\Phi(iy)|.$$

Легко показать, что если $g(t)$ — целая функция порядка 1/2 конечной степени α и $G(z)$ ее преобразование Лапласа, то имеет место равенство

$$K_{G^*}=\frac{1}{4}\alpha^2.$$

Так как в нашем случае $K_{G_0^*}=\frac{1}{4}\alpha^2$, а $K_{G^*}\leqslant\frac{1}{4}\alpha^2$, то индикатор функции $H^*(z)$ при $-\pi<\theta<0$

$$h_{H^*}(\theta)=(K_{H_0^*}+K_{G^*}-K_{G_0^*}|\sin\theta|\leqslant 0.$$

Мы снова имеем возможность, учитывая, что $|H_0(z)|\leqslant\frac{c}{|y|}$ при $y<0$, так же, как при доказательстве леммы 2, показать, что $H^*(z)=o(1)$ при $z\to\infty$, т. е. $H^*(z)\equiv 0$. Таким образом,

$$\int_\tau^\infty f(t-\tau)\,g(t)\,dt=0$$

при $\tau\geqslant 0$.

В частности,

$$\int_0^\infty f(t)\,g(t)\,dt=0,$$

Пусть теперь $g(t)$ — произвольная функция из $B_{1/2,\alpha_1}$, $\alpha_1 < \alpha_0$, а функция $\psi(t)$ — какая-нибудь из $B_{1/2,\alpha}$, но такая, что $\psi(t) = t^2 + c_3t^3 + \ldots$. Тогда $g(t)\frac{\psi(\varepsilon t)}{(\varepsilon t)^2} \in B_{1/2,\alpha}$ при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ и, значит,

$$\int_0^\infty f(t)\, g(t) \frac{\psi(\varepsilon t)}{(\varepsilon t)^2}\, dt = 0. \tag{39}$$

Совершая предельный переход в (39) при $\varepsilon \to 0$, законный в силу теоремы Лебега, получим равенство

$$\int_0^\infty f(t)\, g(t)\, dt = 0,$$

из которого следует, что $f(t) \in I_{\alpha_1}$ при всех $\alpha_1 < \alpha$. В силу 7° $f(t) \in I_\alpha$, а отсюда немедленно получается, что $B_{1/2,\alpha} \subset I^\perp$, и лемма 3 доказана.

Леммы 2 и 3 показывают, что функции, принадлежащие примарному идеалу $I \subset M(0)$, характеризуются определенной скоростью стремления к нулю их преобразований Фурье $F(z)$ при условии, что $z \to 0$. Точный результат содержит следующая

Лемма 4. *Для того, чтобы $f(t) \in I_\alpha$, неоходимо и достаточно, чтобы*

$$K_{F^*} = \varlimsup_{y\to 0} |y| \ln |F(iy)| \leqslant -\frac{1}{4}\alpha^2. \tag{40}$$

Доказательство этой леммы мы опускаем, поскольку необходимость условия (40) очевидна, а доказательство достаточности совершенно аналогично приведенному выше доказательству леммы 3.

Лемма 4 дает возможность убедиться в справедливости предложения 4°, в котором утверждается, что каждый идеал I_α содержит нетривиальную функцию. В самом деле, функция

$$F(z) = \frac{z^4 e^{\frac{\alpha^2 i}{4z}}}{(z-i)^6} \tag{41}$$

и ее первые две производные при $z \to \infty$ равны $O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$ и аналитичны в нижней полуплоскости. Поэтому $F(z)$ является преобразованием Фурье некоторой функции $f(t)$ из $L(R^+)$. В силу леммы 4 $f(t) \in I_\alpha$, так как

$$\varlimsup_{y\to 0} |y| \ln |F(iy)| = -\frac{\alpha^2}{4}.$$

Таким образом, доказано предложение 4°.

Доказательство теоремы 3. Уже было показано, что $\{I_\alpha\}$ — упорядоченная цепочка примарных идеалов, содержащихся в максимальном идеале $M(0)$. Покажем, что эта цепочка максимальна, т. е. каждый примарный идеал I, содержащийся в $M(0)$, совпадает с I_α при некотором $\alpha > 0$. Из леммы 2 следует, что аннулятор $I^\perp$ этого примарного идеала содержится в $B_{\frac{1}{2},\alpha}$ при некотором α. Пусть α^* — верхняя грань типов целых функций порядка $\frac{1}{2}$, принадлежащих $I^\perp$. Ясно что $I^\perp \subset B_{\frac{1}{2},\alpha^*}$. Из леммы 3 следует что $I^\perp \supset B_{\frac{1}{2},\alpha_1}$ при каждом $\alpha_1 < \alpha^*$ и, значит, в силу 7° $I^\perp \supset B_{\frac{1}{2},\alpha^*}$. Поэтому $I^\perp = B_{\frac{1}{2},\alpha^*}$ и, следовательно, $I = I_{\alpha^*}$.

Теорема 3 доказана. В качестве функции, порождающей идеал I_α, можно взять, например, функцию, заданную формулой (41).

Теорема 3 позволяет получить аппроксимационную теорему винеровского типа для идеалов I_α, с помощью которой можно получить ряд тауберовых теорем отличающихся от приведенных в (12) и (14).

3. Аппроксимационная теорема для идеалов $I_\alpha(0)$

В этом пункте мы более подробно изучим функции, принадлежащие примарному идеалу $I_\alpha(0)$. Оказывается, что существует характеристика функций из I_α, отличная от приведенных в пункте 2 и позволяющая легко строить функции, принадлежащие идеалу I_α. Имеет место

Теорема 4. *Для того, чтобы функция $f(t) \in L(R^+)$ принадлежала примарному идеалу I_α, необходимо и достаточно, чтобы для функции*

$$\tilde{f}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f(t)}{t-\zeta}\,dt, \tag{42}$$

аналитической в комплексной плоскости, разрезанной по положительному лучу вещественной оси, выполнялось неравенство

$$|\tilde{f}(t)| < Ce^{-\alpha|t|^{1/2}}, \quad -\infty < t < 0. \tag{43}$$

При доказательстве теоремы 4 мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 5. *Пусть функция $\Phi(\zeta)$ — аналитическая* в комплексной плоскости ζ, разрезанной по положительному лучу вещественной оси. Пусть $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ — предельные значения функции $\Phi(z)$ на положительном луче вещестенной оси сверху ($\operatorname{Im} z \downarrow 0$) и снизу ($\operatorname{Im} z \uparrow 0$) существуют всюду на полуоси*, ограничены и принадлежат $L(R^+)$. Если во всей разрезанной плоскости функция $\Phi(\zeta)$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{gathered}\varlimsup_{|\zeta|\to\infty} \frac{\ln|\Phi(\zeta)|}{|\zeta|^{1/2}} < \infty,\\ \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln|\Phi(-x)|}{x^{\frac{1}{2}}} \leqslant 0,\end{gathered} \tag{44}$$

то для ее предельных значений $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty \Phi^+(t)\,dt = \int_0^\infty \Phi^-(t)\,dt. \tag{45}$$

Доказательство. Функция $\psi(z) = \Phi(z^2)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Предельные значения $\psi(t)$ функции $\psi(z)$ ограничены на вещественной оси, причем

$$\psi(t) = \begin{cases} \Phi^+(t^2), & t > 0\\ \Phi^-(t^2), & t < 0.\end{cases}$$

Из того, что $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ принадлежат $L(R^+)$, следует

$$\int_{-\infty}^\infty |t\psi(t)|\,dt < \infty,$$

* Требование ограниченности $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ несущественно.

а из неравенства (44)

$$\varlimsup_{\substack{s\to+\infty\\ s=\operatorname{Im}\zeta}} \frac{\ln|\psi(is)|}{|s|} \leqslant 0. \tag{46}$$

В силу принципа Фрагмена — Линделефа из ограниченности функции $\psi(t)$ на вещественной оси и неравенства (46) следует ограниченность $\psi(\zeta)$ во всей замкнутой верхней полуплоскости.

С помощью хорошо известной теоремы Винера — Пейли из того, что $t\psi(t)\in L(R)$ и $\zeta\psi(\zeta)=0(|\zeta|)$ при $|\zeta|\to\infty$, легко показать, что $\zeta\psi(\zeta)\in H^1$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(t+is)\,\psi(t+is)|\,dt < \text{const}$$

равномерно по $0\leqslant s<\infty$ и что, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\psi(t)\,dt = 0.$$

Таким образом, равенство (45) справедливо, и лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 4. *Необходимость.* Пусть $f(t)\in I_\alpha$. Тогда по определению примарного идеала I_α для любой функции $g(t)\in B_{1/2,\,\alpha}$ имеет место равенство

$$\int_{0}^{\infty} f(t)\,g(t)\,gt = 0.$$

Вместе с функцией $g(t)\in B_{1/2,\,\alpha}$ функция $\frac{g(t)-g(\zeta)}{t-\zeta}$ при любом ζ принадлежит $B_{1/2,\,\alpha}$. Поэтому

$$\tilde f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f(t)}{t-dt}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{g(\zeta)}\int_0^\infty \frac{f(t)\,[g(\zeta)-g(t)+g(t)}{t-\zeta}$$

$$dt = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{g(\zeta)}\int_0^\infty \frac{f(t)\,g(t)}{t-\zeta}\,dt. \tag{47}$$

Полагая в представлении (47) $g(t)=\cos\alpha\sqrt{t}$, получим, что на отрицательной полуоси функция $\tilde f(\zeta)$ удовлетворяет неравенству (43).

Достаточность. Пусть $f(t)\in L(R^+)$ и ее интеграл Коши (42) $\tilde f(\zeta)$ удовлетворяет неравенству (43). Покажем, что для интеграла Коши $(\widetilde{f*f_1})(\zeta)$ функции f_1*f, где $f_1\in L(R^+)$, на отрицательной полуоси также справедлива оценка (43). Действительно,

$$(\widetilde{f*f_1})(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\int_0^t f(t-\tau)\,f_1(\tau)\,d\tau}{t-\zeta}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty \frac{f(t-\tau)}{t-\zeta}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f_1(\tau)\,\tilde f(\tau-z)\,d\tau.$$

Из этого равенства при $-\infty < t < 0$ с учетом (43) вытекает справедливость оценки

$$|(\widetilde{f*f_1})(t)| \leqslant Ce^{-\alpha|t|^{1/2}} \|f_1\|_L. \tag{48}$$

Выберем теперь последовательность $\{f_{1,n}(t)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ гладких функций пространства $L(R^+)$ так, чтобы по норме пространства $L(R^+)$

$$f_n(t) = (f_{1,n} * f)(t) \to f(t), \ n \to \infty, \tag{49}$$

$$\|f_{1,n}\|_L \leqslant A < \infty \tag{50}$$

и

$$|f_{1,n}(t)| \leqslant C_n, \ (0 \leqslant t < \infty), \ n = 1, 2, \ldots . \tag{51}$$

Из (50) и (51) получается, что

$$|f_n(t)| \leqslant C_n \|f\|_L$$

и

$$\int_0^\infty |f_n(t)|^2 dt \leqslant C_n A \|f\|^2.$$

Таким образом, $f_n(t) \in L^2(R^+)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и поэтому из элементарных свойств преобразования Гильберта (см., например, [16]) следует, что функции

$$\tilde{f}_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_n(t)}{t-\zeta}\, dt$$

имеют всюду на вещественной оси предельные значения $\tilde{f}_n^+(t)$ и $\tilde{f}_n^-(t)$ при $\operatorname{Im}\zeta \downarrow 0$, соответственно, $\operatorname{Im}\zeta \uparrow 0$, эти предельные значения принадлежат $L^2(-\infty, \infty)$ и

$$\tilde{f}_n^+(t) - \tilde{f}_n^-(t) = f_n(t). \tag{52}$$

Кроме того, в силу (48)

$$|\tilde{f}_n(t)| \leqslant Ce^{-\alpha|t|^{1/2}} A \|f\| \quad (-\infty < t < 0).$$

Пусть $g(t) \in B_{1/2,\alpha} \cap L^2(0, \infty)$. Функция $\tilde{f}_n(\zeta)\, g(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям леммы 5 и, следовательно,

$$\int_0^\infty \tilde{f}_n^+(t)\, g(t)\, dt = \int_0^\infty \tilde{f}_n^-(t)\, g(t)\, dt.$$

Из последнего равенства и (52) получается, что

$$\int_0^\infty f_n(t)\, g(t)\, dt = 0, \ n = 1, 2, \ldots \tag{53}$$

и, так как $B_{1/2,\alpha} \cap L^2(0, \infty)$ слабо плотно в $B_{1/2,\alpha}$, равенство (53) имеет место с любой функцией $g(t) \in B_{1/2,\alpha}$.

Переходя в (53) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int_0^\infty f(t)\, g(t)\, dt = 0, \forall g \in B_{1/2,\alpha},$$

т. е. $f(t) \in I_\alpha$. Теорема 4 доказана.

Из теорем 3 и 4 получается следующая аппроксимационная теорема.

Теорема 5. *Пусть $f(t) \in I_\alpha$ при некотором α. Для того, чтобы множество всех конечных линейных комбинаций*

$$\sum_k c_k f(t - \tau_k)$$

было плотно в I_α, необходимо и достаточно выполнение условий

1. $\gamma_f = 0$*.

2. Преобразование Фурье $F(z)$ функции $f(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке полуплоскости $\operatorname{Im}_{z \neq 0} z \leqslant 0$.

3. Для функции $\tilde{f}(t)$, определенной формулой (42), справедливо равенство

$$\overline{\lim_{t \to -\infty}} \frac{\ln |\tilde{f}(t)|}{|t|^{1/2}} = -\alpha.$$

В заключение заметим, что если $\Phi(z)$ — функция аналитическая и ограниченная в плоскости, разрезанной по положительному лучу, а $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ — ее предельные значения на положительном луче принадлежат $L(R^+)$, то функция

$$f(t) = e^{i\alpha\sqrt{t}}\Phi^+(t) - e^{-i\alpha\sqrt{t}}\Phi^-(t) \in I_\alpha.$$

4. Гармонический анализ функций из $L^\infty(R^+)$

Прежде всего мы изучим функции из $L^\infty(R^+)$, спектр которых либо пуст, либо содержит только одну точку полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Все результаты этого пункта являются непосредственным следствием теорем о примарных идеалах.

Пусть, как и раньше, B_g — замыкание линейной оболочки системы левых сдвигов функции $g(t) \in L^\infty(R^+)$.

а) Ясно, что финитная функция имеет пустой спектр. С другой стороны, если функция $g(t) \in L^\infty(R^+)$ имеет пустой спектр, то аннулятор подпространства B_g в пространстве $L(R^+)$ является примарным идеалом, отвечающим бесконечно удаленной точке полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, и совпадает поэтому (теорема 1) с пространством $L(\gamma, \infty)$ при некотором $\gamma > 0$. Отсюда следует, что B_g состоит из всех функций пространства $L^\infty(R^+)$, равных нулю вне интервала $(0, \gamma)$. В частности, если $(0, \gamma_g)$ — минимальный интервал, вне которого функция $g(t) \in L^\infty(R^+)$ равна нулю, то $B_g = L^\infty(0, \gamma_g)$; $L^\infty(0, \gamma)$ — подпространство $L^\infty(R^+)$, состоящее из функций, равных нулю вне интервала $(0, \gamma)$. Последний факт эквивалентен хорошо известной теореме Титчмарша [16].

б) Обозначим $P(n)$ множество многочленов степени, меньшей или равной n.

Если спектр функции $g(t) \in L^\infty(R^+)$ состоит из одной точки z_0 полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, то (теорема 2) $g(t) = P_n(t)e^{-itz_0} + \tilde{g}_0(t)$, где $P_n(t)$ — многочлен степени n, а $\tilde{g}_0(t) \in L^\infty(0, \gamma)$ при некотором $\gamma \geqslant 0$. При этом B_g состоит из всех функций вида

$$Q(t)e^{-itz_0} + \tilde{g}(t),$$

где $Q(t) \in P(n)$ пробегает все множество $P(n)$, а $\tilde{g}(t)$ все пространство $L^\infty(0, \gamma_{\tilde{g}_0})$.

---

* Определение γ_f см. на стр. 215.

в) Если единственная точка спектра функции $g(t) \in L^\infty(R^+)$ вещественна, $\Lambda_g = \{x\}$, то (теорема 3)

$$g(t) = g_0(t)\, e^{-itx} + \tilde{g}(t),$$

где $g_0(t) \in B_{1/2,\alpha}$ при некотором $\alpha \geqslant 0$, а $\tilde{g}(t) \in L^\infty(0, \gamma)$ при каком-то $\gamma \geqslant 0$. При этом B_g состоит из всех функций вида

$$g_1(t)\, e^{-itx} + g_2(t),$$

где $g_1(t) \in B_{1/2,\alpha}$, $g_2(t) \in L^\infty(0, \gamma_{\tilde{g}})$. (По-прежнему $(0, \gamma_{\tilde{g}})$ — максимальный интервал, вне которого $\tilde{g}(t)$ равна нулю). В частности имеет место следующая

Теорема 6. *Если функция $g(t) \in B_{1/2,\alpha}$ и тип ее в точности равен α, то ее левыми сдвигами можно аппроксимировать в слабом смысле на правой полуоси любую функцию из $B_{1/2,\alpha}$.*

Пусть теперь $g(t)$ — произвольная функция из $L^\infty(R^+)$. Из леммы 1 следует, что ее спектр либо совпадает со всей замкнутой полуплоскостью $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, либо является объединением дискретного множества точек $z_k = r_n e^{i\theta_k}$, $r_k = |z_k|$, $-\pi < \theta_k < 0$, $(k = 1, 2, \ldots)$, таких что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k \sin|\theta_k|}{r_k^2 + 1} < \infty,$$

и замкнутого множества лебеговой меры нуль на вещественной оси. С функцией $g(t)$ и каждой точкой $z \in \Lambda_g$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ свяжем следующие семейства функций $B_g(\infty)$, $\{B_g(z)\}_{z \in \Lambda_g}$, $\operatorname{Im} z < 0$, $\{B_g(x)\}_{x \in \Lambda_g}$, x — вещественно, принадлежащие B_g. $B_g(\infty)$ — множество всех, принадлежащих B_g, функций из $L^\infty(0, \gamma)$, $\gamma > 0$. $B_g(z)$, $\operatorname{Im} z < 0$ — множество всех, принадлежащих B_g, функций вида $P_n(t)\, e^{-itz}$, $P_n(t)$ — многочлен, $B_g(x)$, x — вещественное, — множество всех, принадлежащих B_g, функций вида $g_0(t)\, e^{-itx}$, $g_0(t) \in B_{1/2,\alpha}$, $\alpha \geqslant 0$.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma_g = \sup\{\gamma_g : \tilde{g}(t) \in B_g(\infty)\},$$

$$n_g(z) = \sup\{n : P_n(t)\, e^{-itz} \in B_g(z)\},$$

$$\alpha_g(x) = \sup\{\alpha : g_0(t)\, e^{-itx} \subset B_g(x)\}.$$

Основной результат статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 7. *Либо одно из чисел $\gamma_g, n_g(z)$ $(z \in \Lambda_g, \operatorname{Im} z < 0)$ $(n_g(x), (x \in \Lambda_g, x$ — вещественное$)$ бесконечно, и тогда B_g совпадает со всем пространством $L^\infty(R^+)$, а спектр Λ_g заполняет всю замкнутую нижнюю полуплоскость, либо все эти числа конечны и тогда спектр Λ_g — объединение дискретного множества в открытой полуплоскости, удовлетворяющего условию (1), и некоторого множества лебеговой меры нуль на вещественной оси, а B_g содержит замыкание B_g линейной оболочки семейств*

$$\{\tilde{g}_1(t)\}, \quad \{g_0(t)\, e^{-itx}\}_{x \in \Lambda_g}, \quad \{P_n(t)\, e^{-itz}\}_{z \in \Lambda_g},$$

где $\tilde{g}_1(t)$ и $g_0(t)$ пробегают соответственно все пространства $L^\infty(0, \gamma_g)$. $B_{1/2,\alpha_g(x)}$, а $P_n(t)$ — любой многочлен степени, меньшей или равной $n_g(z)$, При этом B_g не пусто.

В дальнейшем мы приведем ряд результатов, относящихся к гармоническому синтезу в пространстве $L^\infty(R^+)$.

Основная задача гармонического синтеза на полуоси, как теперь уже ясно, состоит в нахождении условий, которым должен удовлетворять спектр функции $g(t)$ для того, чтобы $\tilde{B}_g = B_g$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Beurling. Un théorème sur les fonctions bornées et uniformement continues sur e'axe réel, Acta Math., 77 (1945), 127—136.
2. H. Pollard. The harmonic analysis of bounded functions, Dune Math., 20, №3 (1953), 499—512.
3. В. П. Гурарий. О спектре растущих функций. ДАН СССР, 121, № 5, 782—785, 1958.
4. Б. И Коренблюм. Обобщение тауберовой теории Винера и гармонический анализ быстрорастущих функций. Труды Моск. матем. об-ва, 7, 121—148, 1958.
5. T. Carlemon. L'integrale de Fourier et questions qui s'yrattachent, Uppsala, 1944.
6. С. С. Мандельбройт. Теорема замкнутости и композиции. Изд-во иностр. лит., М., 1962.
7. C. Herz. The spectral theory of bounded functions, Trans. Am. Math., Soc. 94 (1960), 181—232.
8. P. Malliavin. Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite, C. R. Acad. Sc. 248 (1959), 1756—1759.
9. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, М., 1960.
10. В. П. Гурарий. О примарных идеалах в пространстве $L(0, \infty)$. ДАН СССР, т. 166, № 6, 1277—1279, 1966.
11. В. П. Гурарий, Б. Я. Левин. О полноте системы сдвижек в пространстве $L(0, \infty)$ с весом. «Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ и ХМО», т. XXX, сер. 4, 178—185, 1964.
12. Н. Винер. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. Физматгиз, М., 1963.
13. N. Levinson. Gap and density theorems, Amer. Math. Soc. 1940.
14. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.
15. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. Изд-во иностр. лит., М., 1963.
16. Е. К. Титчмарш. Введение в теорию интеграла Фурье. Гостехиздат, М., 1948.

Поступила 29 ноября 1966 г.