О ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ, СОДЕРЖАЩИХ КОМПЛЕКСНЫЙ ПАРАМЕТР

З. Л. Лейбензон

В статье вводятся и рассматриваются алгебраические понятия (многообразия $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ и др.), связанные с некоторыми специальными свойствами линейных отображений, аналитически зависящих от комплексного параметра ζ в окрестности $\zeta = 0$. Как мне кажется, эти понятия представляют вполне алгебраический интерес, но их источником явился случай сложного собственного числа в обратной задаче спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов порядка $n \geqslant 2$ (т. е. случай кратного собственного числа одновременно для нескольких краевых задач [1]). Содержание отдельных пунктов отражено в их заглавиях. Ввиду малого объема в статье подробно доказываются только лишь теоремы 1, 6 и 7, лемма 2 и утверждение 1 (во всех других случаях подробно намечен ход доказательства). Теоремы 1, 2 и 7 можно считать основными. Весь материал статьи используется в [1].

Предварительно введем некоторые термины, относящиеся к матрицам и их минорам. Если нет особых оговорок, будем предполагать, что все рассматриваемые дальше матрицы и матрицы-функции являются квадратными и имеют n строк. Треугольные матрицы с нулями над (соответственно, под) диагональю будем называть *нижними* (соответственно, *верхними*). Для произвольной матрицы *верхним левым минором k-го порядка* $(1 \leqslant k \leqslant n)$ будем называть ее минор, состоящий из верхних k строк и левых k столбцов (при $k = n$ этот минор совпадает с детерминантом матрицы). Единичную матрицу будем обозначать E.

1. Линейные отображения F_ζ с параметром ζ. В данной статье прежде всего будут рассматриваться линейные отображения n-мерных линейных пространств с некоторой дополнительной структурой.

Определение 1. Пусть в n-мерном комплексном векторном пространстве P^n задано при каждом $k = 0, 1, \ldots, n-1$ подпространство P^k размерности k, причем $P^0 \subset P^1 \subset \ldots \subset P^{n-1}$. Если пространство P^n рассматривается только таким образом, что подпространства $P^0, P^1, \ldots, P^{n-1}$ фиксированы неподвижно в пространстве P^n, то P^n назовем *n-мерным пространством с вложениями* *. Если $e^1, \ldots, e^n$ — вектора из P^n, $e^k \in P^k$ и $e^k \overline{\in} P^{k-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, то вектора $e^1, \ldots, e^n$ образуют линейный базис пространства P^n; такие базисы будем называть *естественными*.

Координаты $x_1, \ldots, x_n$ произвольного вектора пространства P^n *в каком-либо естественном базисе преобразуются в новые координаты*

---

* В алгебраической геометрии набор подпространств $P^0 \subset P^1 \subset \ldots \subset P^{n-1}$ называется флагом (см. [2, стр. 221]).

$x_1', \ldots, x_n'$ в другом естественном базисе по формуле, которую запишем так:

$$(x_n', x_{n-1}', \ldots, x_1') = \gamma_0 \cdot (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1), \tag{1}$$

где γ_0 — нижняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами, произвольно изменяющаяся в зависимости от базисов.

Определение 2. Пусть в n-мерном комплексном векторном пространстве $P_н^n$ задано при каждом $k = 0, 1, \ldots, n-1$ подпространство $P_н^k$ размерности k, причем $P_н^0 \subset P_н^1 \subset \ldots \subset P_н^{n-1}$. Далее, пусть при $k = 1, \ldots, n$ задан линейный функционал τ_k, определенный на $P_н^k$ и обращающийся в нуль только на $P_н^{k-1}$. Если пространство $P_н^n$ рассматривается только таким образом, что подпространства $P_н^0, \ldots, P_н^{n-1}$ вместе с функционалами $\tau_1, \ldots, \tau_n$ фиксированы неизменно в пространстве $P_н^n$, то $P_н^n$ называем *n-мерным пространством с нормированными вложениями. Естественным* базисом пространства $P_н^n$ называется линейный базис, образованный любыми векторами $e_н^1, \ldots, e_н^n \in P_н^n$, удовлетворяющими условиям $e_н^k \in P_н^k$ и $\tau_k e_н^k = 1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Координаты $x_1, \ldots, x_n$ произвольного вектора пространства $P_н^n$ в каком-либо его естественном базисе преобразуются в новые координаты $x_1', \ldots, x_n'$ в другом естественном базисе по формуле

$$(x_1', \ldots, x_n') = \gamma_1 \cdot (x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

где γ_1 — верхняя треугольная матрица с единичными диагональными элементами, произвольно изменяющаяся в зависимости от базисов.

Рассмотрим теперь некоторую область O плоскости комплексного переменного ζ. Пусть для каждой точки $\zeta \in O$ задано линейное отображение F_ζ пространства $P_н^n$ на пространство P^n, аналитически зависящее от ζ. Предполагаем выполненным следующее условие:

(I) для каждого $k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$ существует $\zeta \in O$ такая, что если вектор $\theta \in P_н^k$ и $F_\zeta \theta \in P^{n-k}$, то $\theta = 0$.

Выберем для каждого $\zeta \in O$ естественный базис $e_н^1(\zeta), \ldots, e_н^n(\zeta)$ в пространстве $P_н^n$ и естественный базис $e^1(\zeta), \ldots, e^n(\zeta)$ в пространстве P^n, аналитически зависящие от ζ. Отображение F_ζ представимо в виде аналитической матрицы-функции $V(\zeta)$ (имеющей n строк и столбцов), которая при каждом $\zeta \in O$ преобразует координаты произвольного вектора $\theta \in P_н^n$ при естественном базисе $e_н^1(\zeta), \ldots, e_н^n(\zeta)$ в координаты вектора $F_\zeta \theta \in P^n$ при естественном базисе $e^1(\zeta), \ldots, e^n(\zeta)$, расположенные в обратном порядке. Матрицу-функцию $V(\zeta)$ будем называть *представлением отображения* F_ζ в области O. Принятое здесь расположение в обратном порядке (выбранное для удобства в дальнейшем) согласуется с формулами (3.55)—(3.57) статьи [1].

Если аналитически зависящие от ζ естественные базисы $e_н^1(\zeta), \ldots, e_н^n(\zeta)$ и $e^1(\zeta), \ldots, e^n(\zeta)$ заменить какими-либо другими произвольно выбранными подобными базисами, то вследствие (1) и (2) представление $V(\zeta)$ заменится представлением

$$V_1(\zeta) = \gamma_0(\zeta)\, V(\zeta)\, \gamma_1(\zeta), \tag{3}$$

где $\gamma_0(\zeta)$ — произвольная аналитическая в области O нижняя треугольная матрица-функция от ζ с диагональными элементами, не обращающимися в нуль; $\gamma_1(\zeta)$ — произвольная аналитическая в области O верхняя треугольная матрица-функция от ζ с единичными диагональными элементами.

Из определения пространств P_κ^n и P^n следует, что внутренняя геометрическая структура аналитически зависящего от $\zeta \in O$ отображения F_ζ характеризуется множеством всевозможных таких представлений $V_1(\zeta)$, рассматриваемых независимо от порождающих базисов.

Мы будем рассматривать эту внутреннюю структуру F_ζ только локально в точке $\zeta = 0$. Таким образом, область O, в которой определены представление $V_1(\zeta)$ и матрицы-функции $\gamma_0(\zeta)$ и $\gamma_1(\zeta)$, будем считать произвольно малой окрестностью $\zeta = 0$. Соответствующее описание локальной внутренней структуры F_ζ будет получено позже в п. 3 в теореме 2 с помощью канонического (простейшего) представления $W(\zeta)$ отображения F_ζ.

Ранее указанное условие (I) эквивалентно тому, что рассматриваемые матрицы-функции $V(\zeta)$ принадлежат одному из классов $\mathfrak{M}_0(s_1, \ldots, s_{n-1})$, определяемых следующим образом.

Определение 3. Пусть $s_1, \ldots, s_{n-1}$ — произвольные целые неотрицательные числа. *Классом* $\mathfrak{M}_0(s_1, \ldots, s_{n-1})$ будем называть множество матриц-функций $V(\zeta)$ комплексного переменного ζ, имеющих следующие свойства: 1) $V(\zeta)$ определена и аналитична в некоторой окрестности $\zeta = 0$; 2) при каждом $k = 1, \ldots, n-1$ верхний левый минор $V_k(\zeta)$ k-го порядка матрицы-функции $V(\zeta)$ имеет нуль кратности s_k в точке $\zeta = 0$ (случай $s_k = 0$ означает, что $V_k(0) \neq 0$); 3) детерминант $\det V(0) \neq 0$. Будем обозначать $\mathfrak{M}_0 = \sum\limits_{s_1, \ldots, s_{n-1} \geqslant 0} \mathfrak{M}_0(s_1, \ldots, s_{n-1})$.

(Отметим, что в обратной задаче спектрального анализа числа $s_1, \ldots, s_{n-1}$ интерпретируются как кратности собственного числа для различных краевых задач). При любых $s_1, \ldots, s_{n-1} \geqslant 0$ класс $\mathfrak{M}_0(s_1, \ldots, s_{n-1})$ не является пустым, поскольку ему принадлежит, например, матрица-функция, у которой элементы под главной диагональю равны 1, элементы первой строки равны $\zeta^{s_1}, \ldots, \zeta^{s_{n-1}}$, 1 и все остальные элементы равны нулю.

2. Определение многообразий $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$. *Через* Δ_0 *будем обозначать* множество нижних треугольников матриц-функций $G(\zeta)$, имеющих следующий вид:

$$G(\zeta) = \| G_{\alpha, \beta}(\zeta) \|_{1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n}, \tag{4}$$

где при всех ζ

$$G_{\alpha, \beta}(\zeta) = 0 \text{ при } 1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n; \quad G_{\alpha, \alpha}(\zeta) = 1 \text{ при } 1 \leqslant \alpha \leqslant n; \tag{4а}$$

$$G_{\alpha, \beta}(\zeta) = \frac{g_1}{\zeta} + \cdots + \frac{g_c}{\zeta^c} \quad \text{при } 1 \leqslant \beta < \alpha \leqslant n \tag{4б}$$

(комплексные коэффициенты $g_1, \ldots, g_c$ и число $c \geqslant 1$ зависят от α и β). *Через* Δ_1 *будем обозначать* множество верхних треугольных матриц-функций $H(\zeta)$ вида

$$H(\zeta) = \| H_{\alpha, \beta}(\zeta) \|_{1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n}, \tag{5}$$

где $H_{\alpha, \beta}(\zeta)$ удовлетворяют таким же условиям, что и $G_{\alpha, \beta}(\zeta)$ в (4а), (4б), но только с перестановкой индексов α и β. Легко убедиться, что каждое из множеств Δ_0 и Δ_1 является группой (с групповой операцией умножения матриц-функций).

Лемма 1. *Пусть* $t(\zeta) = \| t_{\alpha, \beta}(\zeta) \|_{1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n}$ — *треугольная верхняя (соответственно, нижняя) аналитическая матрица-функция от* ζ, *регулярная или имеющая полюс в точке* $\zeta = 0$. *Если все ее диагональные элементы*

$t_{\alpha,\alpha}(\zeta)$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant n)$ *регулярны в точке* $\zeta = 0$ *и* $t_{\alpha,\alpha}(0) \neq 0$, *то существуют единственные матрицы-функции* $G^1(\zeta)$, $G^2(\zeta) \in \Delta_1$ *(соответственно* $G^1(\zeta)$, $G^2(\zeta) \in \Delta_0$*) такие, что* $G^1(\zeta)\, t(\zeta)$ *и* $t(\zeta)\, G^2(\zeta)$ *регулярны в точке* $\zeta = 0$.

Доказательство заключается в последовательном (по возрастанию $|\alpha - \beta|$) определении элементов $G^1_{\alpha,\beta}(\zeta)$ и $G^2_{\alpha,\beta}(\zeta)$ матриц-функций $G^1(\zeta)$ и $G^2(\zeta)$.

Определение 4. Пусть $s_1, \ldots, s_{n-1}$ — неотрицательные целые числа. *Многообразием* $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ будем называть множество аналитических матриц-функций $W(\zeta)$ комплексного переменного ζ, регулярных при $\zeta = 0$ и представимых в виде

$$W(\zeta) = G(\zeta)\, R_{s_1, \ldots, s_{n-1}}(\zeta)\, H(\zeta), \tag{6}$$

где $R_{s_1, \ldots, s_{n-1}}(\zeta)$ — диагональная матрица-функция с диагональными элементами $\zeta^{t_1}, \ldots, \zeta^{t_n}$, причем

$$t_k = s_k - s_{k-1} \ (1 \leqslant k \leqslant n), \quad s_0 = s_n = 0; \tag{7}$$

матрицы-функции $G(\zeta) \in \Delta_0$ и $H(\zeta) \in \Delta_1$.

Название «многообразие $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$» будет оправдано позже в п. 5, где будет показано, что каждое $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ можно считать алгебраическим многообразием. Все многообразия $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ не пустые, что будет позже в п. 3 следовать из теоремы 1.

Согласно определению 4 элементы матрицы-функции $W(\zeta) \in M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ являются многочленами от ζ. Из (6) можно непосредственно вывести, что левый верхний минор $W_k(\zeta)$ k-го порядка матрицы-функции $W(\zeta)$ равен

$$W_k(\zeta) = \zeta^{t_1 + \ldots + t_k} = \zeta^{s_k} \ (1 \leqslant k \leqslant n); \tag{8}$$

в частности,

$$\det W(\zeta) = W_n(\zeta) = \zeta^{s_n} = 1. \tag{9}$$

Лемма 2. *В представлении (6) каждая из матриц-функций* $W(\zeta)$, $G(\zeta)$ *и* $H(\zeta)$ *однозначно определяет две остальные матрицы-функции и числа* $s_1, \ldots, s_{n-1}$. *В частности, разные многообразия* $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ *не пересекаются * между собой.*

Доказательство. Предположим, что помимо представления (6) матрица-функция $W(\zeta)$ имеет еще одно подобное представление

$$W(\zeta) = G^\circ(\zeta)\, R_{s_1^\circ, \ldots, s_{n-1}^\circ}(\zeta)\, H^\circ(\zeta).$$

Приравнивая оба выражения для $W(\zeta)$ и умножая слева на $[G(\zeta)]^{-1}$, и справа на $[H^\circ(\zeta)]^{-1}$, получаем

$$R_{s_1, \ldots, s_{n-1}}(\zeta)\, H(\zeta)\, [H^\circ(\zeta)]^{-1} = [G(\zeta)]^{-1} G^\circ(\zeta)\, R_{s_1^\circ, \ldots, s_{n-1}^\circ}(\zeta). \tag{10}$$

Обе части равенства (10) должны быть диагональными матрицами-функциями, поскольку слева имеем треугольную верхнюю матрицу, а справа — треугольную нижнюю. Так как $R_{s_1, \ldots, s_{n-1}}(\zeta)$ и $R_{s_1^\circ, \ldots, s_{n-1}^\circ}(\zeta)$ диагональны, то диагональными являются также матрицы $H(\zeta)\,[H^\circ(\zeta)]^{-1} \in \Delta_1$ и $[G(\zeta)]^{-1} G^\circ(\zeta) \in \Delta_0$. Отсюда и из определения множеств Δ_0 и Δ_1 следует, что при всех ζ $H(\zeta)\,[H^\circ(\zeta)]^{-1} = [G(\zeta)]^{-1} G^\circ(\zeta) = E$, $G^\circ(\zeta) = G(\zeta)$ и $H^\circ(\zeta) = H(\zeta)$. Теперь из (10) вытекает $s_k^0 = s_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Таким образом, оба представления матрицы-функции $W(\zeta)$ совпадают, т. е. $W(\zeta)$ однозначно определяет $G(\zeta)$, $H(\zeta)$ и $s_1, \ldots, s_{n-1}$.

* Это отсутствие пересечений непосредственно вытекает и из (8).

Остается доказать, что матрица-функция $H(\zeta)$ однозначно определяет $W(\zeta)$, $G(\zeta)$ и $s_1, \ldots, s_{n-1}$ (для $G(\zeta)$ рассуждения аналогичны). Предположим, что помимо представления (6) матрица-функция $H(\zeta)$ участвует еще в одном подобном представлении

$$W'(\zeta) = G'(\zeta) R_{s'_1, \ldots, s'_{n-1}}(\zeta) H(\zeta).$$

Учитывая (9), находим, что аналитическая матрица-функция

$$W'(\zeta)[W(\zeta)]^{-1} = G'(\zeta) R_{s'_1, \ldots, s'_{n-1}}(\zeta)[R_{s_1, \ldots, s_{n-1}}(\zeta)]^{-1}[G(\zeta)]^{-1} \quad (11)$$

регулярна в точке $\zeta = 0$. Вследствие $G(\zeta)$, $G'(\zeta) \in \Delta_0$ ее диагональные элементы равны диагональным элементам матрицы-функции $R_{s'_1, \ldots, s'_{n-1}}(\zeta)$ $[R_{s_1, \ldots, s_{n-1}}(\zeta)]^{-1}$ и потому равны $\zeta^{u_1}, \ldots, \zeta^{u_n}$, где при $1 \leqslant k \leqslant n$ $u_k = t'_k - t_k$ и аналогично (7) $t_k = s'_k - s'_{k-1}$, $s'_0 = s'_n = 0$. Поэтому из регулярности (11) в точке $\zeta = 0$ следует, что $u_k \geqslant 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Таким образом, при $1 \leqslant k \leqslant n$ $s'_k - s'_{k-1} \geqslant s_k - s_{k-1}$ и поэтому $0 = s'_0 - s_0 \leqslant s'_1 - s_1 \leqslant s'_2 - s_2 \leqslant \cdots \leqslant s'_n - s_n = 0$, так что $s'_k = s_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Итак, матрица-функция (11) принимает вид $G'(\zeta)[G(\zeta)]^{-1}$ и является регулярной в точке $\zeta = 0$. Поскольку $G'(\zeta)[G(\zeta)]^{-1} \in \Delta_0$, то отсюда следует, что при всех ζ $G'(\zeta)[G(\zeta)]^{-1} = E$, $G'(\zeta) = G(\zeta)$ и $W'(\zeta) = W(\zeta)$. Лемма доказана.

Через M обозначим объединение всех многообразий $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$,

$$M = \sum_{s_1, \ldots, s_{n-1} \geqslant 0} M(s_1, \ldots, s_{n-1}). \quad (12)$$

Определение 5. *Левой* (соответственно *правой*) компонентой матрицы-функции $W(\zeta) \in M$ будем называть матрицу-функцию $G(\zeta)$ (соответственно, $H(\zeta)$), входящую в представление матрицы-функции $W(\zeta)$ в виде (6). Согласно лемме 2 существует взаимно однозначное соответствие между матрицами-функциями $W(\zeta) \in M$ и их левыми (соответственно, правыми) компонентами.

3. Локальное строение F_ζ при $\zeta = 0$ и структурные составляющие.

Лемма 3. *Для любой матрицы-функции $V(\zeta) \in \mathfrak{M}_0$ существуют однозначно определенные функции $\delta_1(\zeta), \ldots, \delta_n(\zeta)$ и треугольные матрицы-функции $K_0(\zeta)$ (нижняя) и $K_1(\zeta)$ (верхняя) такие, что при $\zeta \neq 0$*

$$V(\zeta) = K_0(\zeta)[K_1(\zeta)]^{-1} \quad (13)$$

и диагональные элементы $K_0(\zeta)$ (соответственно, $K_1(\zeta)$) равны $\delta_1(\zeta), \ldots, \delta_n(\zeta)$ (соответственно, 1, $\delta_1(\zeta), \ldots, \delta_{n-1}(\zeta)$). При $1 \leqslant k \leqslant n$ функция $\delta_k(\zeta)$ равна верхнему левому минору $V_k(\zeta)$ k-го порядка матрицы-функции $V(\zeta)$. Матрицы-функции $K_0(\zeta)$ и $K_1(\zeta)$ являются аналитическими, регулярными при $\zeta = 0$.

Для доказательства достаточно соотношение $V(\zeta) K_1(\zeta) = K_0(\zeta)$ заменить системой линейных уравнений относительно $\delta_1(\zeta), \ldots, \delta_{n-1}(\zeta)$ и остальных элементов матриц-функций $K_1(\zeta)$ и $K_0(\zeta)$, после чего, учитывая определение 3, из этих уравнений последовательно (по возрастанию β от $\beta = 1$ до $\beta = n$) определить β-ые столбцы матриц-функций $K_1(\zeta)$ и $K_0(\zeta)$ (в виде миноров $V(\zeta)$).

Следующая теорема выражает связь между $\mathfrak{M}_0(s_1, \ldots, s_{n-1})$ и $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$.

Теорема 1. *Любая матрица-функция $V(\zeta) \in \mathfrak{M}_0$ единственным образом представима в виде*

$$V(\zeta) = \gamma_0(\zeta) W(\zeta) \gamma_1(\zeta), \quad (14)$$

где $W(\zeta) \in M$ и $\gamma_0(\zeta)$ (соответственно, $\gamma_1(\zeta)$) является аналитической *регулярной при $\zeta = 0$ треугольной нижней (соответственно, верхней) матрицей-функцией, у которой диагональные элементы не обращаются в нуль при $\zeta = 0$ (соответственно, равны 1 при всех ζ) Если $V(\zeta)$ пробегает какой-либо из классов $\mathfrak{M}_0(s_1, \ldots, s_{n-1})$, то $W(\zeta)$ пробегает все многообразие $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$. Кроме того,*

$$M(s_1, \ldots, s_{n-1}) \subseteq \mathfrak{M}_0(s_1, \ldots, s_{n-1}, \tag{15}$$

при любых $s_1, \ldots, s_{n-1}$.

Доказательство. Будем исходить из представления (13). Пусть $D(\zeta)$ — диагональная матрица-функция с диагональными элементами $1, V_1(\zeta), \ldots, V_{n-1}(\zeta)$. Если $V(\zeta) \in \mathfrak{M}_0(s_1, \ldots, s_{n-1})$, то вследствие (7) матрицы-функции $K_0(\zeta)[D(\zeta)]^{-1}[R_{s_1, \ldots, s_{n-1}}(\zeta)]^{-1}$ и $D(\zeta)[K_1(\zeta)]^{-1}$ удовлетворяют условиям леммы 1. Поэтому существуют матрицы-функции $G(\zeta) \in \Delta_0$ и $H(\zeta) \in \Delta_1$ такие, что матрицы-функции

$$\begin{gathered} K_0(\zeta)[D(\zeta)]^{-1}[R_{s_1, \ldots, s_{n-1}}(\zeta)]^{-1} G(\zeta) = \gamma_0(\zeta), \\ H(\zeta) D(\zeta)[K_1(\zeta)]^{-1} = \gamma_1(\zeta) \end{gathered} \tag{16}$$

удовлетворяют условиям теоремы. Полагая

$$W(\zeta) = [G(\zeta)]^{-1} R_{s_1, \ldots, s_{n-1}}(\zeta)[H(\zeta)]^{-1}, \tag{17}$$

получаем (вследствие (13) и (16)) искомое равенство (14). Действительно, в этом равенстве матрица-функция $W(\zeta) = [\gamma_0(\zeta)]^{-1} V(\zeta) \gamma_1 [(\zeta)]^{-1}$ регулярна в точке $\zeta = 0$, так что вследствие (17)

$$W(\zeta) \in M(s_1, \ldots, s_{n-1}).$$

Чтобы доказать единственность полученного представления (14), достаточно провести все рассуждения в обратном порядке, но с небольшими видоизменениями, позволяющими учитывать однозначную определенность, установленную в леммах 1, 2 и 3. Наконец, из (8) вытекает соотношение (15) и вместе с тем все остальные утверждения теоремы. Теорема доказана.

Определение 6. *Структурной составляющей* матрицы-функции $V(\zeta) \in \mathfrak{M}_0$ будем называть матрицу-функцию $W(\zeta) \in M$ из представления (14).

Вернемся к отображениям F_ζ, рассмотренным в п. 1. Теорема 1 позволяет охарактеризовать внутреннюю структуру F_ζ в точке $\zeta = 0$ следующим образом.

Теорема 2. *Пусть при значениях ζ, изменяющихся в окрестности O точки $\zeta = 0$, задано линейное отображение F_ζ пространства P^n_H на пространство P^n, аналитически зависящее от ζ и удовлетворяющее условию (I) п. 1. Существует единственная матрица-функция $W(\zeta) \in M$, являющаяся представлением отображения F_ζ в некоторой окрестности $\zeta = 0$. Матрица-функция $V(\zeta)$ является представлением отображения F_ζ в некоторой окрестности $\zeta = 0$ тогда и только тогда, когда она принадлежит $\mathfrak{M}_0$ и ее структурная составляющая равна $W(\zeta)$. При произвольном изменении отображения F_ζ матрица-функция $W(\zeta)$ пробегает все множество M. Таким образом, $W(\zeta) \in M$ можно считать каноническим представлением и характеристикой внутренней структуры отображения F_ζ в точке $\zeta = 0$.*

Доказательство. Как указывалось в п. 1, внутренняя структура отображения F_ζ в точке $\zeta = 0$ определяется совокупностью тех характеристик его представлений $V(\zeta)$, которые инвариантны относительно замены представления $V(\zeta)$ на любое другое представление $V_1(\zeta)$ вида (3), определенное только лишь в произвольно малой окрестности $\zeta=0$. Далее, как можно убедиться, условие (I) п. 1 равносильно тому, что $V(\zeta)\in\mathfrak{M}_0$. Поэтому справедливость теоремы легко непосредственно вывести из теоремы 1 и определения 6. Теорема доказана.

Укажем несколько утверждений, связанных с применением к обратной задаче спектрального анализа.

Лемма 4. *Пусть матрица-функция $V(\lambda)$ является представлением отображения F_λ в какой-либо области O (отображение F_λ аналитически зависит от λ и удовлетворяет условию (I) п. 1). Существуют однозначно определенные треугольные матрицы-функции $N^1(\lambda)$ (верхняя с единичными диагональными элементами) и $N^0(\lambda)$ (нижняя), удовлетворяющие уравнению $V(\lambda)N^1(\lambda)=N^0(\lambda)$. $N^1(\lambda)$ и $N^0(\lambda)$ являются аналитическими матрицами-функциями от λ (с полюсами в O).*

Доказательство вытекает из рассмотрения соответствующих линейных уравнений для элементов $N^1(\lambda)$ и $N^0(\lambda)$.

Из леммы 3 и определения $D(\zeta)$ (см. доказательство теоремы 1) следует, что в лемме 4 в случае $\lambda=0\in O$ при значениях $\zeta\neq 0$, близких к $\zeta=0$,

$$N^1(\zeta)=K_1(\zeta)[D(\zeta)]^{-1}. \tag{18}$$

Теорема 3. *Пусть в условиях предыдущей леммы дано число $\lambda_0\in O$. Далее, пусть дана матрица-функция $A(\lambda)$ такая, что $A(\lambda_0+\zeta)\in\Delta_1$. Аналитическая матрица-функция $N^1(\lambda)A(\lambda)$ регулярна в точке $\lambda=\lambda_0$ тогда и только тогда, когда $A(\lambda)=H(\lambda-\lambda_0)$, где $H(\zeta)$ — правая компонента структурной составляютей матрицы-функции $V(\lambda_0+\zeta)\in\mathfrak{M}_0$.*

Для доказательства достаточно перейти (заменой λ на $\lambda+\lambda_0$) к случаю $\lambda_0=0$ и использовать равенства (18), (16) и (17) (см. доказательство теоремы 1) и лемму 1.

Перейдем к определению понятия M-сопряженности.

Пусть матрица I определяется равенством ($\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера)

$$I=\|I_{\alpha,\beta}\|_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n},\quad I_{\alpha,\beta}=(-1)^{\beta-1}\cdot\delta_{\alpha,n+1-\beta}. \tag{19}$$

Для любых $s_1,\ \ldots,\ s_{n-1}\geqslant 0$ определим диагональную матрицу (полагаем $s_0=s_n=0$)

$$\tau(s_1,\ \ldots,\ s_{n-1})=\|\tau_{\alpha,\beta}\|_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n},\quad \tau_{\alpha,\beta}=(-1)^{n-1+n\,(s_\alpha-s_{\alpha-1})}\cdot\delta_{\alpha,\beta} \tag{20}$$

Через $A^*(\zeta)$ будем обозначать матрицу-функцию, сопряженную (при каждом ζ) к матрице-функции $A(\zeta)$.

Определение 7. Матрицу-функцию $\widetilde{W}(\zeta)$ будем называть *M-сопряженной* к матрице-функции $W(\zeta)\in M$, если

$$\widetilde{W}(\zeta)=\tau(s_1,\ \ldots,\ s_{n-1})\cdot I\cdot\{W^*[(-1)^n\bar{\zeta}]\}^{-1}\cdot I, \tag{21}$$

где $s_1,\ \ldots,\ s_{n-1}$ определяются условием $W(\zeta)\in M(s_1,\ \ldots,\ s_{n-1})$.

Это определение оправдано, поскольку имеет место следующее утверждение, легко проверяемое при помощи определения 3 и формул (19), (20) и (21): $\widetilde{W}(\zeta)\in M(s_{n-1},\ s_{n-2},\ \ldots,\ s_1)\subseteq M$ *и матрица-функция* $W(\zeta)$ является *M-сопряженной к матрице-функции* $\widetilde{W}(\zeta)$. Роль понятия M-сопряженности связана со следующей теоремой.

Теорема 4. *Если матрица-функция $V(\zeta)\in\mathfrak{M}_0(s_1,\ \ldots,\ s_{n-1})$, то матрица-функция $\widetilde{V}(\zeta)=I\cdot\{V^*[(-1)^n\bar{\zeta}]\}^{-1}\cdot I\in\mathfrak{M}_0(s_{n-1},\ \ldots,\ s_1)$. Структур-*

ная составляющая $\tilde{W}(\zeta) \in M(s_{n-1}, \ldots, s_1)$ матрицы-функции $\tilde{V}(\zeta)$ M-сопряжена к структурной составляющей $W(\zeta)$ матрицы-функции $V(\zeta)$.

Доказательство теоремы можно вывести из определений 6 и 7 и соотношений (14), (19) и (20).

4. Представление $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ в виде алгебраического многообразия. Сначала докажем

Утверждение 1. *Если матрицы-функции (4) и (5) являются левой и правой компонентами матрицы-функции $W(\zeta) \in M(s_1, \ldots, s_{n-1})$, то степени многочленов от $\frac{1}{\zeta}$ $G_{\alpha,\beta}(\zeta)$ $(1 \leqslant \beta < \alpha \leqslant n)$ и $H_{\alpha,\beta}(\zeta)$ $(1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n)$ не превосходят соответственно s_β и s_α.*

Доказательство. Пусть $R^0(\zeta)$ (соответственно, $R^1(\zeta)$)—диагональная матрица-функция с диагональными элементами $\zeta^{s_1}, \ldots, \zeta^{s_{n-1}}, \zeta^{s_n} = 1$ (соответственно $\zeta^{s_0} = 1, \zeta^{s_1}, \ldots, \zeta^{s_{n-1}}$). Вследствие (6) $W(\zeta) = G(\zeta) R^0(\zeta) \times \times \{[H(\zeta)]^{-1} \cdot R_1(\zeta)\}^{-1}$, так что в случае $V(\zeta) = W(\zeta)$ в лемме 3 $K_0(\zeta) = = G(\zeta) R^0(\zeta)$ и $K_1(\zeta) = [H(\zeta)]^{-1} \cdot R^1(\zeta)$. Поэтому согласно лемме 3 $G(\zeta) R^0(\zeta)$ регулярно при $\zeta = 0$. Вследствие (4) это означает, что $G_{\alpha,\beta}(\zeta) \zeta^{s_\beta}$ $(1 \leqslant \beta < \alpha \leqslant n)$ регулярны при $\zeta = 0$, т. е. степени многочленов $G_{\alpha,\beta}(\zeta)$ не превосходят s_β. Чтобы доказать аналогичное утверждение для многочленов $H_{\alpha,\beta}(\zeta)$, достаточно заметить, что в (6) после транспонирования $G(\zeta)$ и $H(\zeta)$ меняются ролями. Утверждение доказано.

Согласно утверждению 1 представим элементы $G_{\alpha,\beta}(\zeta)$ $(1 \leqslant \beta < \alpha \leqslant n)$ и $H_{\alpha,\beta}(\zeta)$ $(1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n)$ матриц-функций $G(\zeta)$ и $H(\zeta)$ из (6) в виде многочленов от $\frac{1}{\zeta}$ формальных степеней соответственно s_β и s_α (старшие коэффициенты многочленов могут равняться нулю). Все коэффициенты этих $n(n-1)$ многочленов будем рассматривать как координаты точки P комплексного векторного пространства C^N соответствующей размерности N. Тогда требование регулярности при $\zeta = 0$ матрицы-функции (6) выразится в виде конечного числа алгебраических уравнений относительно координат точки P. Поскольку вследствие леммы 2 соответствие между матрицами-функциями $W(\zeta) \in M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ и точками P является взаимно однозначным, то мы получаем представление многообразия $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ *в виде алгебраического многообразия*, пробегаемого точкой P.

Приведем результаты, выражающие строение алгебраического многообразия $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ в следующих простейших случаях.

1) В случае $s_1 = \ldots = s_{n-1} = 0$ из утверждения 1 непосредственно вытекает

Лемма 5. *$M(0, \ldots, 0)$ содержит только одну матрицу-функцию $W(\zeta) \equiv \equiv E$. Ее левая и правая компоненты равны $G(\zeta) \equiv H(\zeta) \equiv E$.*

2) Случай*, когда

$$s_{k_i} = 1 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant u; \; s_k = 0 \text{ при } k \neq k_1, \ldots, k_u, \tag{22}$$

где $k_1, \ldots, k_u$ какие-либо целые числа, удовлетворяющие условиям $u \geqslant \geqslant 1$, $k_{i+1} \geqslant k_i + 2$ при $1 \leqslant i \leqslant u-1$, $k_1 \geqslant 1$ и $k_u \leqslant n-1$. Пусть $\alpha_1 \ldots, \alpha_u$ — комплексные числа, отличные от нуля. Через $W^{(k_1, \ldots, k_u)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_u)}(\zeta)$, $G^{(k_1, \ldots, k_u)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_u)}(\zeta)$ и $H^{(k_1, \ldots, k_u)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_u)}(\zeta)$ будем обозначать матрицы-функции от ζ такие, что а) при каждом $i = 1, 2, \ldots, u$ на пересечении k_i-ых и $(k_i +$

---

* Этот случай можно называть случаем простого спектра (в связи с обратной задачей спектрального анализа). При этом многообразие $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ иногда будет обозначаться через $M^{(k_1, \ldots, k_u)}$.

$+1$)-ых строк и столбцов этих матриц-функций расположены матрицы-функции соответственно

$$\left\|\begin{matrix}\zeta, & (-1)^{n-k_i+1}\alpha_i^{-1} \\ (-1)^{n-k_i}\alpha_i, & 0\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}1, & 0 \\ \frac{(-1)^{n-k_i}\alpha_i}{\zeta}, & 1\end{matrix}\right\| \text{ и } \left\|\begin{matrix}1, & \frac{(-1)^{n-k_i+1}}{\alpha_i\zeta} \\ 0, & 1\end{matrix}\right\|;$$

б) все остальные их элементы тождественно равны соответствующим элементам единичной матрицы E.

Строение многообразий $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$описывается следующей теоремой:

Теорема 5. *Пусть $s_1, \ldots, s_{n-1}$ определяется согласно (22). Формула $W(\zeta) = W^{(k_1, \ldots, k_u)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_u)}(\zeta)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между матрицами-функциями $W(\zeta) \in M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ и последовательностями отличных от нуля комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_u$. Левая и правая компоненты матрицы-функции $W^{(k_1, \ldots, k_u)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_u)}(\zeta)$ равны соответственно $G^{(k_1, \ldots, k_u)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_u)}(\zeta)$ и $H^{(k_1, \ldots, k_u)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_u)}(\zeta)$.*

Чтобы доказать теорему, требование регулярности при $\zeta = 0$ элементов $W_{\alpha,\beta}(\zeta)$ матрицы-функции (6) рассматриваем последовательно по возрастанию $\min(\alpha, \beta)$.

3) Случай $n = 2$ и $s_1 \geqslant 1$. Многообразие $M(s_1)$ состоит из матриц-функций вида

$$W(\zeta) = \left\|\begin{matrix}\zeta^{s_1}, & \sum\limits_{0<i<s_1} h_i\zeta^i \\ -\sum\limits_{0\leqslant i<s_1} g_i\zeta^i, & p(\zeta)\end{matrix}\right\|,$$

где $g_0, \ldots, g_{s_1-1}$ — произвольные комплексные числа и $g_0 \neq 0$; числа h_i и многочлен $p(\zeta)$ определяются числами g_i из соотношения

$$\frac{1}{g_0 + \cdots + g_{s_1-1}\zeta^{s_1-1}} = h_0 + \cdots + h_{s_1-1}\zeta^{s_1-1} + \frac{\zeta^{s_1}p(\zeta)}{g_0 + \cdots + g_{s_1-1}\zeta^{s_1-1}}.$$

Левая и правая компоненты $G(\zeta)$ и $H(\zeta)$ матрицы-функции $W(\zeta)$ равны

$$G(\zeta) = \left\|\begin{matrix}1, & 0 \\ -\sum\limits_{0\leqslant i<s_1} g_i\zeta^{i-s_1}, & 1\end{matrix}\right\|, \quad H(\zeta) = \left\|\begin{matrix}1, & \sum\limits_{0\leqslant i<s_1} h_i\zeta^{i-s_1} \\ 0, & 1\end{matrix}\right\|.$$

В заключение данного пункта укажем, что остается не выясненным строение алгебраического многообразия $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ * в общем случае, в зависимости от произвольных n и $s_1, \ldots, s_{n-1}$. Весьма вероятно предположение, что комплексная размерность $\dim M(s_1, \ldots, s_{n-1}) = s_1 + \cdots + s_{n-1}$ при любых n и $s_1, \ldots, s_{n-1}$. Возможно, строение $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ связано с тем, какая перестановка чисел $s_1, \ldots, s_{n-1}$ приводит к неубывающей последовательности. Неясно, в каких случаях многообразие $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ связно (в топологии сходимости матриц-функций при каждом ζ). В случае $n = 3$ оказывается, что $M(s_1, s_2)$ связно тогда и только тогда, когда $s_1 = s_2$ или $\min(s_1, s_2) = 0$; если $s_1 \neq s_2$, то $M(s_1, s_2)$ имеет $\min(s_1, s_2) + 1$ компонент связности. С другой стороны, при $n = 4$ связным является, например, многообразие $M(1, 2, 1)$. Отметим, что из теоремы 1 легко следует, что многообразие

* Строение какого-нибудь *конкретного* многообразия $M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ можно, вообще говоря, полностью выяснить, поскольку это сводится к исследованию конечного числа алгебраических уравнений.

$M(s_1, \ldots, s_{n-1})$ имеет столько же компонент связности, сколько их имеет класс $\mathfrak{M}_0(s_1, \ldots, s_{n-1})$.

п. 5. Δ_0 и Δ_1, как множества левых и правых компонент.

Теорема 6. *Пусть $A(\zeta)$ — аналитическая матрица-функция от ζ, регулярная или имеющая полюс в точке $\zeta = 0$, причем $\det A(\zeta)$ не равен тождественно нулю. Существуют однозначно определенные матрица-функция $H(\zeta) \in \Delta_1$ и целые числа $p_1, \ldots, p_n$ такие, что матрица-функция $L(\zeta) = A(\zeta) P(\zeta) H(\zeta)$ регулярна при $\zeta = 0$ и $\det L(0) \neq 0$; здесь $P(\zeta)$ обозначает диагональную матрицу-функцию с диагональными элементами $\zeta^{p_1}, \ldots, \zeta^{p_n}$. Кроме того,*

$$m_k + \sum_{i=1}^{k} p_i \geqslant 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1) \text{ и } m_n + \sum_{i=1}^{n} p_i = 0, \tag{23}$$

где $m_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ определены так, что левый верхний минор k-го порядка матрицы-функции $A(\zeta)$ вблизи $\zeta = 0$ равен $a_k \zeta^{m_k} + O(\zeta^{m_k+1})$, причем $a_k \neq 0$ (если минор тождественно равен нулю, то полагаем $m_k = +\infty$).

Аналогичное утверждение (с другими $p_1, \ldots, p_n$ и $H(\zeta)$) верно и в том случае, когда $H(\zeta) \in \Delta_1$ и $L(\zeta) = A(\zeta) P(\zeta) H(\zeta)$ заменяются на $H(\zeta) \in \Delta_0$ и $L(\zeta) = H(\zeta) P(\zeta) A(\zeta)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $H(\zeta) \in \Delta_1$, поскольку переход к случаю $H(\zeta) \in \Delta_0$ сводится к транспонированию матриц.

Обозначим через F множество верхних треугольных матриц-функций $U(\zeta)$ таких, что а) все элементы матрицы-функции $U(\zeta)$ являются многочленами от ζ и $\frac{1}{\zeta}$; б) каждый из диагональных элементов $U(\zeta)$ представляет собой некоторую степень ζ (быть может, нулевую или отрицательную); в) матрица-функция $A(\zeta) U(\zeta)$ регулярна при $\zeta = 0$. Например, множеству F принадлежит $U(\zeta) = \zeta^s E$ (здесь E — единичная матрица), где $s \geqslant 0$ обозначает порядок полюса матрицы-функции $A(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$. Поскольку $\det A(\zeta) \not\equiv 0$, то для $U(\zeta) \in F$ детерминант $\det(A(\zeta) U(\zeta))$ в точке $\zeta = 0$ имеет нуль конечной кратности $k(U) \geqslant 0$ (возможен случай $k(U) = 0$).

Пусть матрица-функция $U_0(\zeta) \in F$ такова, что $k(U_0) = \min\limits_{u \in F} k(U)$. Согласно определению множества F матрица-функция $B(\zeta) = A(\zeta) U_0(\zeta)$ регулярна при $\zeta = 0$; через $b_i(\zeta)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ будем обозначать ее i-ый столбец, рассматриваемый как вектор-функция от ζ. Сначала докажем, что

$$\det B(0) \neq 0, \tag{24}$$

(т. е. $k(U_0) = 0$). Предполагая $\det B(0) = 0$, найдем, что между векторами $b_1(0), \ldots, b_n(0)$ существует линейная зависимость, которую запишем в виде

$$c_1 b_1(0) + \ldots + c_{r-1} b_{r-1}(0) + b_r(0) = 0 \tag{25}$$

с каким-то целым r $(1 \leqslant r \leqslant n)$. Рассмотрим верхнюю треугольную матрицу-функцию $C(\zeta)$, у которой r-ый столбец состоит из элементов $\frac{c_1}{\zeta}, \frac{c_2}{\zeta}, \ldots, \frac{c_{r-1}}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}, 0, \ldots, 0$, а все остальные элементы тождественно равны соответствующим элементам единичной матрицы. Тогда n столбцов матрицы-функции $B(\zeta) C(\zeta)$ равны

$$b_1(\zeta), \ldots, b_{r-1}(\zeta), \ \frac{1}{\zeta}\left[b_r(\zeta) + \sum_{i=1}^{r-1} c_i b_i(\zeta)\right], \ b_{r+1}(\zeta), \ldots, b_n(\zeta).$$

Поскольку $b_i(\zeta)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ регулярны при $\zeta = 0$, то отсюда и из (25) следует, что $B(\zeta)C(\zeta)$ регулярна при $\zeta = 0$. Вследствие $B(\zeta) = A(\zeta)U_0(\zeta)$ это означает регулярность при $\zeta = 0$ матрицы-функции $A(\zeta)U_0(\zeta)C(\zeta)$, так что $U_1(\zeta) = U_0(\zeta)C(\zeta)$ удовлетворяет требованию в), предъявляемому к элементам множества F. Кроме того, из $U_0(\zeta) \in F$ и из определения $C(\zeta)$ следует, что $U_1(\zeta) = U_0(\zeta)C(\zeta)$ удовлетворяет также и всем остальным требованиям, предъявляемым к элементам из F. Таким образом, $U_1(\zeta) \in F$. Так как $\det C(\zeta) = \zeta^{-1}$, то

$$\det(A(\zeta)U_1(\zeta)) = \det(A(\zeta)U_0(\zeta)) \cdot \zeta^{-1}.$$

Поэтому $k(U_1) = k(U_0) - 1$, что противоречит определению $k(U_0)$. Итак, неравенство (24) доказано.

В качестве искомых чисел $p_1, \ldots, p_n$ возьмем показатели степени диагональных элементов $U_0(\zeta)$. Если $P(\zeta)$ определена согласно условию теоремы, то $t(\zeta) = [P(\zeta)]^{-1} \cdot U_0(\zeta)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Согласно лемме 1 существует $G(\zeta) \in \Delta_1$ такая, что матрица-функция $q(\zeta) = G(\zeta)[P(\zeta)]^{-1}U_0(\zeta)$ регулярна при $\zeta = 0$. Диагональные элементы $q(\zeta)$ тождественно равны 1, так что $\det q(0) = 1$. Отсюда и из (24) следует, что матрица-функция $L(\zeta) = B(\zeta)[q(\zeta)]^{-1}$ регулярна при $\zeta = 0$ и $\det L(0) \neq 0$. Поскольку вместе с тем

$$L(\zeta) = A(\zeta)U_0(\zeta) \cdot \{G(\zeta)[P(\zeta)]^{-1}U_0(\zeta)\}^{-1} = A(\zeta)P(\zeta)[G(\zeta)]^{-1},$$

то матрица-функция $H(\zeta) = [G(\zeta)]^{-1} \in \Delta_1$ и числа $p_1, \ldots, p_n$ удовлетворяют требованиям теоремы.

Соотношения (23) вытекают из того, что при $1 \leqslant k \leqslant n$ верхний левый минор k-го порядка матрицы-функции $L(\zeta)$ равен произведению соответствующих миноров $A(\zeta)$, $P(\zeta)$ и $H(\zeta)$.

Остается доказать однозначную определенность $H(\zeta)$ и $p_1, \ldots, p_n$. Предположим, что какие-то $p_1', \ldots, p_n'$ и $H_1(\zeta)$ также удовлетворяют условиям теоремы, т. е. $L_1(\zeta) = A(\zeta)P_1(\zeta)H_1(\zeta)$ регулярна при $\zeta = 0$ и $\det L_1(0) \neq 0$, где $P_1(\zeta)$ — диагональная матрица-функция с диагональными элементами $\zeta^{p_1'}, \ldots, \zeta^{p_n'}$. Тогда матрица-функция

$$[L(\zeta)]^{-1}L_1(\zeta) = [H(\zeta)]^{-1}[P(\zeta)]^{-1}P_1(\zeta)H_1(\zeta),$$

а также обратная к ней матрица-функция, регулярны при $\zeta = 0$. Поскольку она треугольна и ее диагональные элементы равны $\zeta^{p_1'-p_1}, \ldots, \zeta^{p_n'-p_n}$, то $p_i' = p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Далее, получаем, что $[L(\zeta)]^{-1}L_1(\zeta) = [H(\zeta)]^{-1}H_1(\zeta) \in \Delta_1$ регулярна при $\zeta = 0$. Поэтому $[H(\zeta)]^{-1}H_1(\zeta) \equiv E$, $H_1(\zeta) \equiv H(\zeta)$ и однозначная определенность установлена. Теорема доказана.

Теорема 7. *Любая матрица-функция $G(\zeta) \in \Delta_0$ (соответственно, $\in \Delta_1$) является левой (соответственно, правой) компонентой некоторой матрицы-функции $W(\zeta) \in M$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $G(\zeta) \in \Delta_0$ (поскольку случай $G(\zeta) \in \Delta_1$ рассматривается аналогично). Согласно предыдущей теореме при $A(\zeta) = G(\zeta)$ существуют матрица-функция $H(\zeta) \in \Delta_1$ и целые числа $p_1, \ldots, p_n$ такие, что матрица-функция $W(\zeta) = G(\zeta)P(\zeta)H(\zeta)$ регулярна при $\zeta = 0$ и $\det W(0) \neq 0$ ($P(\zeta)$ определяется согласно условиям теоремы 6). Кроме того выполняются соотношения (23), причем теперь $m_k = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Поэтому числа $s_k = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} p_i$ неотрицательны при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ и $s_n = 0$. Согласно определению 4 $P(\zeta) = R_{s_1, \ldots, s_{n-1}}(\zeta)$

и $W(\zeta) \in M(s_1, \ldots, s_{n-1})$. При этом $G(\zeta)$ является левой компонентой $W(\zeta)$ Теорема доказана.

Таким образом, множество левых (соответственно, правых) компонент матриц-функций $W(\zeta) \in M$ совпадает с Δ_0 (соответственно, с Δ_l).

Замечание. В моей статье [1] в § 8 замечание 6 основано на предположении, что множество правых компонент матриц-функций $W(\zeta) \in M$ не совпадает с Δ_0; *в обоснование* этого предположения *я там ссылался на данную статью*. Однако позже выяснилось, что это предположение неверно, поскольку имеет место теорема 7. Таким образом замечание 6 в статье [1] отпадает.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Л. Лейбензон. Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков. «Тр. Моск. матем. об-ва», 15, 1966.

2. Чжень Шэн-шэнь. Комплексные многообразия. Изд-во иностр. лит., М., 1961

Поступила 9 ноября 1966 г.