О КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГЛАДКИХ ОБЛАСТЯХ

В. П. Глушко

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то, что общая теория краевых задач для равномерно эллиптических уравнений в настоящее время почти полностью построена, теория эллиптических краевых задач с нарушением условия эллиптичности на части границы (или на всей границе) еще далека от своего завершения. По-видимому, впервые исследования этого рода были начаты М. В. Келдышем [1]. В его работе изучалось специальное эллиптическое уравнение второго порядка, вырождающееся на плоской части границы области специального вида. Затем в работах О. А. Олейник [2], Н. Д. Введенской [3] и других было продолжено исследование этого же уравнения в той же области, но с другими граничными условиями. Исследование обобщенных решений этого уравнения началось с работ С. Г. Михлина [4]. Затем М. И. Вишик [5] изучил обобщенные решения для общего уравнения второго порядка. Вслед за этим появился ряд работ ([6], [7] и др.), в которых методами, близкими к методу М. И. Вишика, изучались уравнения более высокого порядка. Однако во всех этих работах рассматривались только области специального вида. Следует также отметить цикл работ Л. Г. Михайлова ([8] и др.), в которых рассматриваются случаи вырождения уравнения второго порядка лишь в конечном числе точек.

В работе [9] С. А. Терсенов для специального уравнения и специальной системы уравнений в специальной области на плоскости, а затем М. Шехтер [10] для общего уравнения второго порядка в области специального вида развили метод, по существу, восходящий своими истоками к работе М. В. Келдыша. Дальнейшее развитие этого метода позволило нам в работе [11] рассмотреть достаточно общий случай корректных краевых задач для общего уравнения второго порядка, однако снова в области специального вида.

Работы Г. Фикера [12] и О. А. Олейник [13] по изучению слабых решений общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка в произвольной области с достаточно гладкой границей побудили нас попытаться перенести полученные ранее результаты по существованию и единственности классических решений на уравнения в произвольной области, и это оказалось возможным. Поскольку основным методом работы [11] является метод построения неоднородной $H(x)$ и однородной $H_0(x)$ мажорант, обладающих тем свойством, что $H(x)/H_0(x) \to 0$ и при x, стремящемся к границе вырождения, то основная трудность состояла именно в построении этих мажорант. При построении этих мажорант был использован метод «склеивания» локальных мажорант. Построение локальных мажорант вблизи границы вырождения было, по существу, уже разработано в [11]. Однако здесь мы столкнулись с существенной трудностью, состоящей в том, что ранее построенные мажоранты «не склеивались» вблизи многообразий, отделяющих поверхность вырождения от остальной границы области. Это удалось сделать с помощью построения в окрестности этих многообразий «двумерных» мажорант.

Настоящая работа содержит, таким образом, не только доказательство утверждений, опубликованных в [11], но и, в основном, перенесение результатов работы [11] на случай области произвольного вида с достаточно гладкой границей. Объем работы позволяет нам рассмотреть здесь лишь случай однородных граничных условий. Вместе с тем мы хотели бы отметить, что поскольку рассмотрение неоднородных граничных условий связано лишь с вопросами продолжения функций, заданных на границе (или на части ее), внутрь области в определенном классе функций, то результаты по неоднородной задаче, приведенные без доказательства в [11], переносятся почти без изменения и на случай произвольной области. Изучение свойств локальных мажорант требует применения в некоторых случаях элементарных, но довольно громоздких вычислений. Поэтому нам пришлось ограничиться в § 4 лишь приведением формул, определяющих локальные мажоранты, и перечислением их свойств. Отметим также, что в работе одной буквой c обозначаются (если это не вызывает недоразумений) различные постоянные.

§ 1. Основные определения и предположения

Пусть D — связная ограниченная область R_n с границей $\dot{D}$. В D рассмотрим дифференциальное выражение второго порядка

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au. \tag{1.1}$$

1.1°. Будем предполагать, что квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j$ является положительно определенной в каждой точке $x \in \overline{D}$, за исключением замкнутого множества $D_0 \subset \dot{D}$, на котором она может обращаться в нуль на некотором векторе $\{\xi_i\} \neq 0$. Относительно коэффициентов $a_{ij}(x)$ $(a_{ij} = a_{ji})$, $a_i(x)$, $a(x)$ будем предполагать, что они действительны и принадлежат C^1 в любой замкнутой области, содержащейся в $\overline{D} \setminus D_0$. Кроме того, будем предполагать, что для любой функции $\varphi(x) \in C^\infty(R_n)$ величина

$$M\varphi = L\varphi - a\varphi$$

ограничена сверху в $\tilde{D}$ постоянной, зависящей от φ.

Рассмотрим неособое преобразование

$$y_m = y_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

переводящее область Ω $(\overline{\Omega} \subset \overline{D})$ переменных $x \in R_n$ в область $\tilde{\Omega}$ переменных $y \in R_n$. Будем говорить, что отображение (1.2) переводит Ω в область $\tilde{\Omega}$ специального вида (см. [11]), если $\tilde{\Omega}$ лежит в полосе $0 \leqslant y_n \leqslant 1$

и пересечение $\dot{D} \cap \overline{\Omega}$ при отображении (1.2) переходит в часть плоскости $y_n = 0$.

1.2°. Будем предполагать, что область D принадлежит классу C^3. Следовательно, для каждой граничной точки $x' \in \dot{D}$ существует окрестность U такая, что замыкание $U \cap D$ с помощью преобразования (1.2) может быть взаимно однозначно отображено на замыкание области $\widetilde{U \cap D}$ специального вида, причем преобразование (1.2) и обратное преобразование

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

принадлежат классу C^3.

Дифференциальное выражение L переходит в новых координатах y в выражение

$$\tilde{L}u \equiv \sum_{m, l=1}^{n} b_{ml} \frac{\partial^2 u}{\partial y_m \partial y_l} + \sum_{m=1}^{n} b_m \frac{\partial u}{\partial y_m} + au,$$

где

$$b_{ml} = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}; \quad b_m = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial y_m}{\partial x_i}. \tag{1.3}$$

Если диаметр окрестности U не превосходит некоторого достаточно малого положительного числа δ, то, как известно, преобразование (1.2 можно выбрать так, чтобы в новых (локальных) координатах $y_1, y_2, \ldots, y)$ величина y_n представляла расстояние от точки $x \in U$ до границы $\dot{D}$ по внутренней нормали ν к границе $\dot{D}$, проходящей через точку x. При таком выборе величины y_n в двух локальных системах координат, соответствующих различным окрестностям U, будут совпадать на пересечении этих окрестностей. Таким образом, в δ-окрестности границы $\dot{D}$ определена трижды дифференцируемая функция $y_n = y_n(x)$ и, следовательно в этой окрестности, за исключением, возможно, точек D_0, по формулам (1.3) определены и непрерывны функции $b_{nn}(x)$ и $b_n(x)$. Очевидно, функция $b_{nn}(x)$ положительна всюду в области определения, за исключением, возможно, D_0, где она может обращаться в нуль.

В δ-окрестности $\dot{D}$ определена непрерывная функция

$$\eta_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_n}{\partial x_j} \right|. \tag{1.4}$$

1. 3°. Рассмотрим точки $x \in D_0$. Будем говорить, что $x'' \in D''$, если $x'' \in D_0$, существуют непрерывная функция $p(t)\,(0 < t \leqslant 1)$ и такая окрестность U точки x'', что

$$\frac{b_n(x)}{b_{nn}(x)} \leqslant p(y_n(x)); \tag{1.5}$$

$$\int_0^1 e^{P(s)} ds < \infty; \quad P(s) = \int_s^1 p(t)\,dt; \tag{1.6}$$

$$\eta_n(x) \leqslant c e^{-P(y_n(x))} \int_0^{y_n(x)} e^{P(s)} ds, \tag{1.7}$$

где $x \in U \cap D$ и c — некоторая положительная постоянная.

1.4°. Точку x', принадлежащую вместе с некоторой своей окрестностью в $\dot{D}$ $D_0 \setminus D''$, будем относить к множеству D'. Пусть для каждой точки $x' \in D'$ существуют такая непрерывная на полуинтервале $(0,1]$ функция $p(t)$ и окрестность U этой точки, что

$$\frac{b_n(x)}{b_{nn}(x)} \geqslant p(y_n(x)); \tag{1.8}$$

$$\int_0^1 e^{P(s)}\,ds = \infty, \quad P(s) = \int_s^1 p(t)\,dt; \tag{1.9}$$

$$\eta_n(x) \leqslant c e^{-P(y_n(x))} \int_{y_n(x)}^1 e^{P(s)}\,ds, \tag{1.10}$$

где $x \in U \cap D$ и c — некоторая положительная постоянная.

Обозначим через Γ' (Γ'') границу D' (D'') в $\dot{D}$. Будем предполагать, что Γ' и Γ'' принадлежат классу C^2 и не имеют общих точек, так что 2δ-окрестности Γ' и Γ'' не пересекаются. Пусть области E'_k (E''_k), где $k \in K'$ (K''), образуют конечное покрытие 2δ-окрестности Γ' (Γ''), причем каждая из областей $E'_k \cap D$ $(E''_k \cap D)$ с помощью некоторого преобразования (1.2) может быть переведена в область $\widetilde{E'_k \cap D}$ $(\widetilde{E''_k \cap D})$ специального вида. Тогда преобразование (1.2) можно выбрать так, чтобы величины $y_{n-1} = y_{n-1}(x)$ совпадали в точках пересечения $x \in E'_{k_1} \cap E'_{k_2}$ $(E''_{k_1} \cap E''_{k_2})$, где $k_1, k_2 \in K'$ (K''). Тогда в 2δ-окрестности Γ' (Γ'') определена трижды дифференцируемая функция $y_{n-1} = y_{n-1}(x)$ и, следовательно, определены и непрерывны (за исключением, возможно, D_0) функции $b_{n-1}(x)$ $b_{n-1\,n-1}(x)$, причем последняя функция положительна всюду в пересечении 2δ-окрестности Γ' (Γ'') с $\dot{D}$, кроме, может быть, точек D_0. В 2δ-окрестностях Γ' и Γ'', кроме того, определена непрерывная функция

$$\eta_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_j} \right|. \tag{1.11}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что точки $x \in D' \cap E'_k$ $(D'' \cap E''_k)$ после преобразования (1.2) переходят в точки y полосы: $y_n = 0$; $0 < y_{n-1} < 1$, а точки пересечения $\dot{D} \cap E'_k$ $(\dot{D} \cap E''_k)$, не принадлежащие D_0, переходят в точки y полосы: $y_n = 0$; $-1 < y_{n-1} < 0$.

1.5°. Для каждого $k \in K'$ существует функция $p_k(\sigma, t)$, непрерывная при $t \in [0,1]$ и $\sigma \in [-2,2]$, за исключением множества: $t = 0, 0 \leqslant \sigma \leqslant 2$, причем

$$\frac{b_n(x)}{b_{nn}(x)} \geqslant \max_{-2 \leqslant \tau \leqslant y_{n-1}(x)} \int_{-2}^{\tau} p_k(\sigma, y_n(x))\,d\sigma \qquad (x \in E'_k \cap D);$$

$$-\frac{b_{n-1}(x)}{b_{n-1\,n-1}(x)} \geqslant \max_{y_n(x) \leqslant s \leqslant 1} \int_s^1 p_k(y_{n-1}(x), t)\,dt \qquad (x \in E'_k \cap D);$$

$$-\frac{b_{n-1}(x)}{b_{n-1\,n-1}(x)} \geqslant \sup_{\substack{0 < r < s \\ y_n(x) < s < 1}} \left\{ -\int_r^s p_k(y_{n-1}(x), t)\,dt \right\} \qquad (x \in E'_k \cap D);$$

$$\overline{\lim_{s \to 0}} \sup_{-2 < \tau < y_{n-1} < 2} \left\{ -\int_{\tau}^{y_{n-1}} \int_s^1 p_k(\sigma, t)\,dt\,d\sigma \right\} < \infty.$$

Обозначим

$$Q_k(\tau, s) = \int_{-2}^{\tau}\int_{s}^{1} p_k(\sigma, t)\,dt\,d\sigma$$

и предположим, что

$$\int_{0}^{1}\int_{-2}^{y_{n-1}} e^{Q_k(\tau, s)}\,d\tau\,ds < \infty \text{ при } y_{n-1} < 0;$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-2}^{0} e^{Q_k(\tau, s)}\,d\tau\,ds = \infty;$$

$$\varlimsup_{\rho\to 0} \frac{\int_{-2}^{\sigma^*} e^{Q_k(\tau, s)}\,d\tau}{\int_{-2}^{\sigma} e^{Q_k(\tau, s)}\,d\tau} \leqslant c_k$$

при любых $\sigma^* \in [0,2]$, $\sigma < \sigma^*$, $s > 0$ ($s \geqslant 0$, если $\sigma^* = 0$) и $\rho = \sqrt{(\sigma - \sigma^*)^2 + s^2}$;

$$\max\{\eta_n(x), \sqrt{\eta_n(x)}\} \leqslant c_k \min_{-2\leqslant\tau\leqslant y_{n-1}(x)} e^{-Q_k(\tau, y_n(x))} \int_{y_n(x)}^{1} e^{Q_k(\tau, s)}\,ds;$$

$$\max\{\eta_{n-1}(x), \sqrt{\eta_{n-1}(x)}\} \leqslant c_k \min_{y_n(x)\leqslant s\leqslant 1} e^{-Q_k(y_{n-1}(x), s)} \int_{-2}^{y_{n-1}(x)} e^{Q_k(\tau, s)}\,d\tau,$$

где c_k — положительная постоянная и $x \in E'_k \cap D$.

1.6°. Для каждого $k \in K''$ существует функция $p_k(\sigma, t)$, непрерывная при всех $t\,(\in [0,1]$ и $\sigma \in [-2, 2]$, за исключением, возможно, множества: $t = 0$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$, причем

$$\frac{b_n(x)}{b_{nn}(x)} \leqslant \min_{y_{n-1}(x)\leqslant\tau\leqslant 2} \int_{0}^{\tau} p_k(\sigma, y_n(x))\,d\sigma;$$

$$-\frac{b_{n-1}(x)}{b_{n-1\,n-1}(x)} \leqslant \inf_{\substack{s<r<1\\ 0<s<y_n(x)}} \int_{s}^{r} p_k(y_{n-1}(x), t)\,dt$$

и существует функция $\omega_k(\sigma)$, непрерывная при $\sigma \in [-2, 2]$, положительная при $\sigma \in [-2, 0)$, обращающаяся в нуль при всех $\sigma \in [0, 2]$ и удовлетворяющая условию

$$\omega_k(y_{n-1}) \leqslant \vartheta_k(y_{n-1}) \int_{y_{n-1}}^{0} \omega_k(\sigma)\,d\sigma,$$

где $\vartheta_k(y_{n-1}(x)) \leqslant \dfrac{b_{n-1}(x)}{b_{n-1\,n-1}(x)}$ при всех $y_{n-1} \in [-2, 0]$ и $\vartheta_k(y_{n-1})$ ограниченная функция на $[-2, 0]$.

Кроме того, предположим, что

$$\varlimsup_{s\to 0} \sup_{-2<y_{n-1}<\tau<2} \int_{y_{n-1}}^{\tau}\int_{s}^{1} p_k(\sigma, t)\,dt\,d\sigma < \infty.$$

Отметим, что из последнего условия вытекает существование интеграла

$$\int_0^1 \int_{-2}^2 e^{Q_k(\tau, s)}\, d\tau\, ds < \infty,$$

где

$$Q_k(\tau, s) = \int_{-2}^{\tau} \int_s^1 p_k(\sigma, t)\, dt\, d\sigma.$$

Будем предполагать, что

$$\max\{\eta_n(x), \sqrt{\eta_n(x)}\} \leqslant c_k \min_{y_{n-1}(x) \leqslant \tau \leqslant 2} e^{-Q_k(\tau, y_n(x))} \int_0^{y_n(x)} e^{Q_k(\tau, s)}\, ds +$$

$$+ c_k e^{-Q_k(y_{n-1}(x),\, y_n(x))} \int_{y_{n-1}(x)}^0 \int_s^0 \omega_k(\sigma)\, d\sigma\, ds;$$

$$\max\{\eta_{n-1}(x), \sqrt{\eta_{n-1}(x)}\} \leqslant c_k \inf_{0 < s < y_n(x)} e^{-Q_k(y_{n-1}(x),\, s)} \int_{y_{n-1}(x)}^2 e^{Q_k(\tau, s)}\, d\tau$$

и при $y_{n-1}(x) < 0$ $\eta_{n-1}(x) \leqslant c_k$. Здесь $x \in E''_k \cap D$ и $c_k > 0$ — постоянная.

Построим специальное конечное покрытие D. В силу сделанных предположений о гладкости границы $\dot{D}$ и многообразий Γ' и Γ'' на $\dot{D}$ для любого достаточно малого $\delta > 0$ существует конечное покрытие 2δ-окрестности $\dot{D}$ областями $E'_k\,(k \in K')$; $E''_k\,(k \in K'')$; $T'_\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{a}')$; $T''_\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{a}'')$.

Области $E'_k\,(E''_k)$ покрывают 2δ-окрестность $\Gamma'\,(\Gamma'')$ и при этом выполнены условия 1.5° (соответственно 1.6°). Из бесконечного покрытия граничного множества $D'\,(D'')$ можно выделить конечное покрытие замкнутого подмножества точек $D'\,(D'')$, расстояние которого до $\Gamma'\,(\Gamma'')$ не меньше 2δ. Области, образующие это покрытие, будем обозначать $T'_\alpha\,(T''_\alpha)$, где $\alpha \in \mathfrak{a}'\,(\mathfrak{a}'')$. Очевидно, области $T'_\alpha\,(T''_\alpha)$ могут быть выбраны так, что расстояние любой из этих областей $T'_\alpha\,(T''_\alpha)$ до $\Gamma'\,(\Gamma'')$ будет не меньше δ. Из сделанных выше предположений следует, что для каждой области $T'_\alpha\,(T''_\alpha)$ существует функция $p_\alpha(t)$, непрерывная на $(0, 1)$ и такая, что выполнены условия 1.4° (условия 1.3°), где в качестве U следует взять $T'_\alpha(T''_\alpha)$, а в качестве $P(s)$ взять $P_\alpha(s) = \int_s^1 p_\alpha(t)\, dt$.

Наконец, построим покрытие замкнутого подмножества $\overline{D}$, состоящего из всех точек $x \in \overline{D}$, расстояние которых до D_0 не меньше 2δ. Как и выше, это покрытие можно выбрать таким, чтобы области покрытия отстояли от D_0 не меньше, чем на δ. Области такого типа будем обозначать $G_\beta\,(\beta \in \mathfrak{P})$.

Построенному специальному покрытию $\overline{D}$ областями E'_k, E''_k, T'_α, T''_α, G_β соответствует разложение единицы на функции $\varphi'_k(x)\,(k \in K')$, $\varphi''_k(x)$ $(k \in K'')$, $\psi'_\alpha(x)\,(\alpha \in \mathfrak{a}')$, $\psi''_\alpha(x)\,(\alpha \in \mathfrak{a}'')$, $\chi_\beta(x)\,(\beta \in \mathfrak{P})$,

$$\sum_{k \in K'} \varphi'_k(x) + \sum_{k \in K''} \varphi''_k(x) + \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}'} \psi'_\alpha(x) + \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}''} \psi''_\alpha(x) + \sum_{\beta \in \mathfrak{P}} \chi_\beta(x) \equiv 1$$

для всех $x \in \overline{D}$, причем φ'_k, φ''_k, ψ'_α, ψ''_α, χ_β принадлежат $C^\infty(R_n)$ и тождественно равны нулю вне E'_k, E''_k, T'_α, T''_α, G_β соответственно.

Рассмотрим на $D_1 = \dot{D} \setminus D_0$ граничный оператор $\mathfrak{R} = \mathscr{A}\frac{\partial}{\partial\gamma} + \mathfrak{B}$. Сделаем следующие предположения:

1.7°. $\mathscr{A}(x)$ и $\mathscr{B}(x)$ положительны и принадлежат $C^{1+\alpha}$ в любой замкнутой подобласти D_1 $(0 < \alpha < 1)$.

1.8°. Направление γ образует острый угол с направлением внутренней нормали в каждой точке $x \in D_1$ и в δ-окрестности Γ' $[\Gamma'']$ выполняются неравенства

$$-\mathscr{A}(x)\frac{\partial y_n}{\partial\gamma} \leqslant c\eta_n(x)\left[\mathscr{A}(x)\frac{\partial y_n}{\partial\gamma} \leqslant c\eta_n(x)\right],$$

$$\mathscr{A}(x)\frac{\partial y_{n-1}}{\partial\gamma} \leqslant c\eta_{n-1}(x)\left[-\mathscr{A}(x)\frac{\partial y_{n-1}}{\partial\gamma} \leqslant c\eta_{n-1}(x)\right].$$

1.9°. Существует последовательность чисел $s \to +0$ и соответствующая ей последовательность областей G^s класса C^3 такая, что $\overline{G}^s \subset \overline{D} \setminus \overline{D}_0$ и $\overline{G}^{s_1} \subset \overline{G}^{s_2}$, если $s_1 > s_2$.

1.10°. Обозначим $G_1^s = \overline{G}^s \cap D_1$ и $G_0^s = \dot{G}^s \setminus G_1^s$. Будем предполагать, что множество $\overline{G}_0^s$ границы $\dot{G}^s$ лежит в s-окрестности D_0.

1.11°. Существует непрерывное продолжение $R = -A\frac{\partial}{\partial\gamma} + B$ оператора $\mathfrak{R}$ и поля направлений γ с D_1 на D, причем продолжение граничного оператора R удовлетворяет на $\dot{G}^s$ при всех $s \leqslant s_0$ условиям 1.7° и 1.8°.

1.12°. Для каждой функции $\varphi \in C^\infty(R_n)$ существует постоянная $c(\varphi)$ такая, что

$$A(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} \leqslant c(\varphi)$$

для всех $x \in G_0^s$ и любых $s \leqslant s_0$.

§ 2. Мажоранты

Рассмотрим в D уравнение $Lu = f$. Из предположений § 1 вытекает, что дифференциальный оператор L эллиптичен в каждой точке $x \in \overline{D} \setminus D_0$, и в каждой замкнутой подобласти $\overline{D} \setminus D_0$ оператор L является равномерно эллиптическим оператором. Области, в замыкании которых оператор L равномерно эллиптичен, будем здесь и в дальнейшем обозначать G.

Рассмотрим область G $(\overline{G} \subset \overline{D})$ с границей $\dot{G}$. Пусть граница $\dot{G}$ разбита на два множества $\dot{G} = G_0 \cup G_1$ и на G_1 задан граничный оператор $= -A\frac{\partial}{\partial\gamma} + B$, удовлетворяющий условиям 1.7° — 1.8°. При этом не исключены случаи $G_0 = \varnothing$ или $G_1 = \varnothing$.

Определение. *Дважды непрерывно дифференцируемую в D функцию $H(x)$ будем называть мажорантой уравнения $Lu = f$ в D, если для любой области $G \subset D$ из того, что для решения уравнения $Lu = f$ на $\dot{G}$ выполнены условия*

$$|Ru| \leqslant RH \text{ на } G_1,$$

$$|u| \leqslant H \text{ на } G_0$$

следует, что $|u| \leqslant H$ в $\overline{G}$.

Мажоранту уравнения $Lu = 0$ будем называть однородной мажорантой.

Следующая лемма является простой переформулировкой известного принципа максимума для эллиптических уравнений (см. [14]).

Лемма 2. 1. (принцип максимума). *Пусть G — ограниченная область с границей $\dot{G} = G_0 \cup G_1$. Пусть u ($u \neq \mathrm{const}$), непрерывная в $\overline{G}$ функция, непрерывно дифференцируема в $G \cup G_1$, дважды дифференцируема в G и такая, что $Lu \geqslant 0$ в G, причем L равномерно эллиптичен в G и $a(x) \leqslant 0 \, (x \in G)$. Если при этом*

$$Ru \leqslant 0 \text{ на } G_1, \tag{2.1}$$

$$u \leqslant 0 \text{ на } G_0, \tag{2.2}$$

то

$$u \leqslant 0 \text{ в } \overline{G}. \tag{2.3}$$

Следующая лемма используется при построении мажорант уравнения $Lu = f$.

Лемма 2.2. *Пусть дважды дифференцируемая в любой $G \subset D$, непрерывно дифференцируемая в $\overline{G} = G \cup \dot{G}$ функция удовлетворяет условию*

$$LH(x) \leqslant -\Lambda(x) \, (x \in G), \tag{2.4}$$

где $\Lambda(x) \geqslant 0$ непрерывная в $\overline{G}$ функция и $a(x) \leqslant 0$. Пусть оператор R, заданный на G_1, удовлетворяет условиям $1.7^\circ - 1.8^\circ$ и $|f(x)| \leqslant \lambda\Lambda(x)$ в D ($\lambda = \mathrm{const}$). Тогда функция $\lambda H(x)$ является мажорантой уравнения $Lu = f$ в D.

Доказательство. Пусть u — любое решение уравнения $Lu = f$ в G, удовлетворяющее условиям

$$|Ru| \leqslant \lambda RH \text{ на } G_1, \tag{2.5}$$

$$|u| \leqslant \lambda H \text{ на } G_0 = \dot{G} \setminus G_1 \tag{2.6}$$

Рассмотрим в G функцию $\sigma(x) = u(x) - \lambda H(x)$. Тогда

$$L\sigma = Lu - \lambda LH \geqslant f + \lambda\Lambda \geqslant 0,$$

$$R\sigma = Ru - \lambda RH \leqslant 0 \text{ на } G_1,$$

$$\sigma = u - \lambda H \leqslant 0 \text{ на } G_0.$$

Отсюда в силу леммы 2.1 $u - \lambda H \leqslant 0$ в $\overline{G}$. Применяя те же оценки к функции $-u(x) - \lambda H(x)$, получим $u + \lambda H \geqslant 0$ в $\overline{G}$. Следовательно $|u| \leqslant \lambda H$ в $\overline{G}$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 2.2 при $f(x) \equiv \Lambda(x) \equiv 0$. Тогда функция $\lambda H_0(x)$, где*

$$LH_0(x) \leqslant 0 \quad (x \in G), \tag{2.7}$$

является однородной мажорантой уравнения $Lu = 0$ при любых $\lambda \geqslant 0$.

Основным методом построения мажорант будет метод «склеивания» локальных мажорант в мажоранту для всей области. Нижеследующие леммы обеспечивают возможность такого «склеивания» с сохранением определенных свойств мажоранты.

Пусть области $\Omega_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, K$) образуют конечное покрытие области Ω и пусть неотрицательные функции $\varphi_\varkappa(x) \in C^\infty(R_n)$ образуют разложение единицы, соответствующее этому покрытию:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa} \varphi_\varkappa(x) \equiv 1, \quad \varphi_\varkappa(x) = 0, \text{ если } x \overline{\in} \Omega_\varkappa.$$

Предположим, что в каждой из областей $\Omega_\varkappa \cap \Omega$ определена функция $z_\varkappa(x) \in C^2(\Omega_\varkappa \cup \Omega)$, удовлетворяющая условиям

$$z_\varkappa(x) \geqslant 0 \text{ в } \Omega_\varkappa \cap \Omega; \tag{2.8}$$

$$Lz_\varkappa(x) \leqslant -\lambda_\varkappa(x) + \frac{a(x)}{2} z_\varkappa(x) \text{ в } \Omega_\varkappa \cap \Omega; \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_j} \right| \leqslant c_\varkappa z_\varkappa(x) \text{ в } \Omega_\varkappa \cap \Omega. \tag{2.10}$$

Пусть Ω_0 — область, замыкание которой $\overline{\Omega}_0$ содержится в $\overline{\Omega}$ (в частности, возможно $\Omega_0 = \Omega$). Очевидно, что покрытие $\Omega_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, K$) области Ω является покрытием Ω_0. Обозначим через $K(x)$ подмножество индексов $\varkappa = 1, 2, \ldots, K$ такое, что $\varphi_\varkappa(x) \neq 0$ при $\varkappa \in K(x)$.

Предположим, что существуют такие положительные постоянные $c_{\varkappa_1\varkappa_2}$, что в любой точке $x \in \Omega_0$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{c_{\varkappa_1\varkappa_2}} z_{\varkappa_2}(x) \leqslant z_{\varkappa_1}(x) \leqslant c_{\varkappa_1\varkappa_2} z_{\varkappa_2}(x) \tag{2.11}$$

для любых $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, принадлежащих $K(x)$.

Лемма 2.3. *Пусть в Ω_0 выполнены условия 1.1°, (2.8) — (2.11) и $a(x) \leqslant -a_0$, где a_0 — достаточно большая положительная постоянная. Тогда в каждой точке $x \in \Omega_0$ справедливо неравенство*

$$LZ(x) \leqslant -\Lambda(x) + \frac{1}{4} a(x) Z(x), \tag{2.12}$$

где

$$Z = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa} \varphi_\varkappa z_\varkappa, \quad \Lambda = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa} \varphi_\varkappa \lambda_\varkappa. \tag{2.13}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$LZ = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa} L(\varphi_\varkappa z_\varkappa) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa} (\varphi_\varkappa L z_\varkappa + z_\varkappa M \varphi_\varkappa + N[\varphi_\varkappa, z_\varkappa]),$$

где

$$N[\varphi_\varkappa, z_\varkappa] = 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_i} \frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_j}.$$

Учитывая условия 1.1°, (2.8), (2.9), (2.10), в любой точке $x \in \overline{\Omega}_0$ получим

$$LZ(x) \leqslant -\Lambda(x) + \frac{1}{2} a(x) \sum_{\varkappa \in K(x)} \varphi_\varkappa z_\varkappa + \sum_{\varkappa \in K(x)} c''_\varkappa z_\varkappa +$$

$$+ \sum_{\varkappa \in K(x)} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_i} \right| \leqslant -\Lambda(x) + \frac{1}{2} a(x) \sum_{\varkappa \in \varkappa(x)} \varphi_\varkappa z_\varkappa +$$

$$+ \sum_{\varkappa \in K(x)} c''_\varkappa z_\varkappa + \sum_{\varkappa \in K(x)} c'_\varkappa c_\varkappa z_\varkappa,$$

где

$$c'_\varkappa = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ x \in \overline{\Omega}_\varkappa}} \left| \frac{\partial \varphi_\varkappa(x)}{\partial x_i} \right|, \quad c''_\varkappa = c(\varphi_\varkappa).$$

В силу условия (2.11) существуют такие постоянные $c_{\varkappa\bar{\varkappa}} > 0$, что

$$\frac{1}{c_{\varkappa\bar{\varkappa}}} z_{\bar{\varkappa}}(x) \leqslant z_{\varkappa}(x) \leqslant c_{\varkappa\bar{\varkappa}} z_{\bar{\varkappa}}(x),$$

$$\varkappa,\ \bar{\varkappa} \in \mathrm{K}(x),\quad x \in \overline{\Omega}_0.$$

Тогда получим

$$LZ \leqslant -\Lambda(x) + \frac{1}{4} a(x) Z(x) - \Bigl(\frac{1}{4} a_0 \sum_{\varkappa \in \mathrm{K}(x)} \frac{1}{c_{\varkappa\bar{\varkappa}}} \varphi_{\varkappa}(x) -$$

$$- \sum_{\varkappa \in \mathrm{K}(x)} c'_{\varkappa} c_{\varkappa} c_{\varkappa\bar{\varkappa}}\Bigr) z_{\bar{\varkappa}}(x) \leqslant -\Lambda(x) + \frac{1}{4} a(x) Z(x).$$

При этом мы выбрали a_0 настолько большим, чтобы

$$a_0 \geqslant 4 \max_{1 \leqslant \varkappa \leqslant \mathrm{K}} c_{\varkappa\bar{\varkappa}} \Bigl\{ \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa} [c''_{\varkappa} c_{\varkappa\bar{\varkappa}} + c'_{\varkappa} c_{\varkappa} c_{\varkappa\bar{\varkappa}}] \Bigr\}.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$ ограничены в $\overline{\Omega}_0$; существует такая положительная постоянная k, что для любой функции $z_{\varkappa}(x)$ $(\varkappa \in \mathrm{K}(x))$ и любого $x \in \Omega_0$ справедливы оценки*

$$\frac{1}{k} \leqslant z_{\varkappa}(x) \leqslant k, \qquad \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial z_{\varkappa}}{\partial x_j} \right| \leqslant k. \tag{2.14}$$

Если при этом выполнены условия 1.1°, (2.9), то функция $Z(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa} \varphi_{\varkappa}(x) z_{\varkappa}(x)$ удовлетворяет неравенству (2.12) в Ω_0 при $a(x) \leqslant -a_0$, где a_0 — достаточно большая положительная постоянная.

Действительно, из первого неравенства (2.14) вытекают оценки

$$\frac{1}{k^2} z_{\varkappa_2}(x) \leqslant z_{\varkappa_1}(x) \leqslant k^2 z_{\varkappa_2}(x)$$

для любых $\varkappa_1$, $\varkappa_2 \in \mathrm{K}(x)$, $x \in \overline{\Omega}_0$, что совпадают с (2.11). Аналогично можно показать выполнение условия (2.10) леммы 2.3. Таким образом, все условия леммы выполнены и, следовательно, выполнено неравенство (2.12).

Следствие 2. *Пусть функции $z^0_{\varkappa}(x)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, \mathrm{K})$ удовлетворяют всем условиям леммы 2.3, кроме условия (2.9), которое заменяется условием*

$$Lz^0_{\varkappa}(x) \leqslant \frac{1}{2} a(x) z^0_{\varkappa}(x). \tag{2.15}$$

Тогда функция

$$Z_0(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa} \varphi_{\varkappa}(x) z^0_{\varkappa}(x) \tag{2.16}$$

удовлетворяет в $\overline{\Omega}_0$ неравенству (2.12) при $\Lambda(x) \equiv 0$.

Для функции $Z_0(x)$, очевидно, справедливо следствие 1 леммы 2.3, если $z^0_{\varkappa}(x)$ удовлетворяет условиям (2.14). Нижеследующая лемма позволяет получить оценки $RZ \geqslant 0$ и $RZ_0 \geqslant 0$ на границе области Ω.

Лемма 2.4. *Пусть граничный оператор R на части границы $\dot{\Omega}_1 \subset \dot{\Omega}$ (не исключается случай $\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}$) удовлетворяет условиям 1.7°, 1.8°, 1.12° и пусть функции $z_\varkappa(x)$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, K$) удовлетворяют условиям (2.8), (2.11). Если при этом в каждой точке $x \in \dot{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_\varkappa$ выполнена оценка*

$$A(x)\frac{\partial z_\varkappa}{\partial \gamma} \leqslant c_\varkappa z_\varkappa(x) \quad (c_\varkappa > 0), \tag{2.17}$$

то при $B(x) \geqslant b_0 > 0$, где b_0 достаточно большое число, на $\dot{\Omega}_1$ выполнено неравенство

$$RZ \geqslant 0 \tag{2.18}$$

для функции $Z(x)$, определенной формулой (2.13).

Доказательство. Используя условия 1.7°, 1.8°, 1.12°, (2.8), (2.17), оценим

$$RZ(x) = -A(x)\frac{\partial}{\partial\gamma}Z(x) + B(x)Z(x) =$$

$$= \sum_{\varkappa \in K(x)} \left(-A\frac{\partial z_\varkappa}{\partial\gamma}\varphi_\varkappa - A\frac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial\gamma}z_\varkappa + B\varphi_\varkappa z_\varkappa\right) \geqslant \sum_{\varkappa \in K(x)} (-c_\varkappa z_\varkappa\varphi_\varkappa - c'_\varkappa z_\varkappa + b_0 z_\varkappa\varphi_\varkappa),$$

где

$$c'_\varkappa \geqslant \max_{x \in \dot{\Omega}_1 \cap \Omega_\varkappa} \left\{A(x)\frac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial\gamma}\right\}. \tag{2.19}$$

Воспользовавшись двусторонними оценками (2.11) для функций $z_\varkappa(x)$, получим

$$RZ \geqslant \left\{-\sum_{\varkappa \in K(x)} c_\varkappa c_{\varkappa\bar{\varkappa}}^{-}\varphi_\varkappa + b_0 \sum_{\varkappa \in K(x)} \frac{1}{c_{\bar{\varkappa}\varkappa}^{-}}\varphi_\varkappa\right\} z_{\bar{\varkappa}} \geqslant 0,$$

если выбрать

$$b_0 \geqslant \max_{1 \leqslant \varkappa \leqslant K} c_{\varkappa\bar{\varkappa}}^{-}\left\{\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa} c'_\varkappa c_{\varkappa\bar{\varkappa}}^{-} + \max_{1 \leqslant \varkappa \leqslant K} c_\varkappa c_{\varkappa\bar{\varkappa}}^{-}\right\}.$$

Замечание 1. Если имеется последовательность областей $\{\Omega^s\}$, причем на границе каждой из них выполнены оценки (2.17), то лемма 2.4 остается верной, если при выборе $c'_\varkappa$ в формуле (2.19) максимум по $\overline{\dot{\Omega}_1 \cap \Omega_\varkappa}$ заменить на максимум по $\overline{\{\bigcup_s \dot{\Omega}_1^s\} \cap \Omega_\varkappa}$.

Замечание 2. Условие (2.17), очевидно, выполнено, если функции $z_\varkappa(x)$ ограничены снизу: $z_\varkappa(x) \geqslant c_{0\varkappa} > 0$, а функции $A\frac{\partial z_\varkappa}{\partial\gamma}$ ограничены сверху на $\dot{\Omega}_1$.

Замечание 3. Лемма 2.4 и замечание 2 справедливы для функции $Z_0(x)$, определенной формулой (2.16).

При доказательстве теоремы единственности (см. § 3) важно знать, как ведет себя отношение $Z(x)/Z_0(x)$ при $x \to D_0$. Имеет место

Лемма 2.5. *Пусть функции $Z_0(x)$ и $Z(x)$ определены формулами (2.16) и (2.13) соответственно, выполнены условия (2.8) и пусть U_ρ ρ — окрестность D_0 в R_n. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho_\varkappa = \rho_\varkappa(\varepsilon)$, что*

$$\frac{z_\varkappa(x)}{z_\varkappa^0(x)} \leqslant \varepsilon \tag{2.20}$$

при всех $x \in U_{\rho_\varkappa} \bigcap \Omega_\varkappa \bigcap D$, *то для всех* $x \in U_\rho \bigcap D$, *где* $\rho = \min\limits_\varkappa \rho_\varkappa$, *выполнено неравенство* $\frac{Z(x)}{Z_0(x)} \leqslant \theta\varepsilon$, *где постоянная* θ *обозначает число областей* $\Omega_\varkappa$, *имеющих общие точки с* U_ρ.

Доказательство. Пусть $x \in U_\rho \bigcap D$. Тогда при выборе $\rho = \min \rho_\varkappa$ с помощью (2.20) получим

$$\frac{Z(x)}{Z_0(x)} = \sum_{\varkappa \in K(x)} \frac{\varphi_\varkappa z_\varkappa}{Z_0(x)} \leqslant \sum_{\varkappa \in K(x)} \frac{z_\varkappa(x)}{z^0_\varkappa(x)} \leqslant \theta\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

С помощью лемм 2.2—2.5 и лемм 4.1—4.6, приводимых в § 4 без доказательства, могут быть получены следующие две теоремы:

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия 1.1°—1.12°, 3.1°—3.3°,(4.4), (4.7), (4.9), (4.12), (4.13), (4.14) и условия*

$$-A(x)\frac{\partial y_n}{\partial \gamma} \leqslant c\eta_n(x) \left[A(x)\frac{\partial y_n}{\partial \gamma} \leqslant c\eta_n(x)\right] \tag{2.21}$$

для x, *принадлежащих* δ-*окрестности* D' $[D'']$;

$$A(x)\frac{\partial y_{n-1}}{\partial \gamma} \leqslant c\eta_{n-1}(x) \left[-A(x)\frac{\partial y_{n-1}}{\partial \gamma} \leqslant c\eta_{n-1}(x)\right] \tag{2.22}$$

для x, *принадлежащих* δ-*окрестности* D' $[D'']$. *Тогда при* $a(x) \leqslant -a_0$, $B(x) \geqslant b_0$, *где* a_0, b_0 — *достаточно большие положительные числа, существует неоднородная мажоранта* $H(x)$ *уравнения* $Lu = f$ *в* $\overline{D}\setminus D_0$ *такая, что* $RH(x) \geqslant 0$ *для* $x \in \dot{G}^s$ *и всех* $s \leqslant s_0$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия 1.1°—1.8°, (4.4), (4.7), (4.9). Тогда при* $a(x) \leqslant -a_0$, $B(x) \geqslant b_0$, *где* a_0 *и* b_0 *достаточно большие положительные числа, существует однородная мажоранта* $H_0(x)$ *уравнения* $Lu = 0$ *в* $\overline{D}\setminus D_0$ *такая, что* $RH_0 \geqslant 0$ *на* D_1 *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\rho = \rho(\varepsilon)$ *такое, что* $\frac{H(x)}{H_0(x)} \leqslant \varepsilon$ *при всех* x, *принадлежащих* ρ-*окрестности* D_0.

§ 3. Существование и единственность решения краевой задачи

Поставим следующую краевую задачу:

$$Lu = f \text{ в } D, \tag{3.1}$$

$$\mathfrak{R}u = 0 \text{ на } D_1 = \dot{D}\setminus D_0, \tag{3.2}$$

$$u = 0 \text{ на } D''. \tag{3.2'}$$

Функцию $u(x)$, дважды непрерывно дифференцируемую в D, непрерывно дифференцируемую в $D \bigcup D_1$, непрерывную в $\overline{D}\setminus\overline{D'}$, и удовлетворяющую условиям (3.1) — (3.2'), назовем решением краевой задачи (3.1) — (3.2').

Прежде всего сформулируем условия, накладываемые на правую часть $f(x)$ уравнения (3.1).

3.1°. Существуют непрерывные на (0, 1] неотрицательные функции $\tilde{q}_\alpha(y_n)$ $(\alpha \in \mathfrak{A}' \bigcup \mathfrak{A}'')$ такие, что

$$|f(x)| \leqslant b_{nn}(x)\,\tilde{q}_\alpha(y_n(x)),\ x \in T'_\alpha \bigcap D\ (T''_\alpha \bigcap D),$$

причем при $\alpha \in \mathfrak{A}'$

$$\int_0^1 e^{-P_\alpha(r)} \tilde{q}_\alpha(r)\, dr < \infty, \tag{3.3}$$

а при $\alpha \in \mathfrak{A}''$

$$\int_0^1 e^{P_\alpha(s)} \int_s^1 e^{-P_\alpha(r)} \tilde{q}_\alpha(r)\, dr\, ds < \infty, \tag{3.4}$$

где функции $P_\alpha(s)$ удовлетворяют условиям $1.3^\circ\,(\alpha \in \mathfrak{A}'')$ или $1.4^\circ\,(\alpha \in \mathfrak{A}')$.

3.2°. Существуют непрерывные на $(0, 1]$ неотрицательные функции $q_k(y_n)\ (k \in K' \cup K'')$ такие, что

$$|f(x)| \leqslant b_{nn}(x) \tilde{q}_k(y_n(x)), \quad x \in E'_k \cap D\,(E''_k \cap D),$$

причем при $k \in K'$ интеграл

$$\int_0^1 e^{-Q_k(\tau, r)} \tilde{q}_k(r)\, dr < \infty \tag{3.5}$$

равномерно сходится при всех $\tau \in [-2,2]$; а при $k \in K''$

$$\int_0^1 \int_{-2}^2 e^{\,Q_k^*(\tau, s)} \int_s^1 e^{-Q_k^*(\tau, r)} \tilde{q}_k(r)\, dr\, d\tau\, ds < \infty, \tag{3.6}$$

$$\sup_{-2<\tau<0} \int_0^1 e^{-Q_k^*(\tau, r)} \tilde{q}_k(r)\, dr < \infty, \tag{3.7}$$

где $Q_k(\tau, s)$ и $Q_k^*(\tau, s)$ удовлетворяют условиям 1,5° и 1.6°.

3.3°. $f(x)$ принадлежит $C^\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ в любой замкнутой подобласти $\overline{D} \setminus D_0$ и существуют такие положительные постоянные $q_\beta\ (\beta \in \mathfrak{P})$, что

$$|f(x)| \leqslant |a(x)|\, q_\beta \ \text{для}\ x \in G_\beta \cap D.$$

В дальнейшем мы будем обозначать $q_\alpha(x) = \tilde{q}_\alpha(y_n(x))$, $q_k(x) = \tilde{q}_k(y_n(x))$.

Следующие две леммы позволяют сформулировать общие условия существования и единственности решения задачи (3.1) — (3.2).

Лемма 3.1. (существования). *Пусть в D существует непрерывное продолжение R, граничного оператора $\mathfrak{R}$, обладающее свойствами 1.7°—1.12°. Если существует неоднородная мажоранта $H(x)$ уравнения $Lu = f$ в $\overline{D} \setminus D_0$ такая, что $\mathfrak{R}H \geqslant 0$ на всех $\dot{G}^s\ (s \leqslant s_0)$, то существует решение $u(x)$ задачи (3.1) — (3.2), удовлетворяющее оценке*

$$|u(x)| \leqslant H(x)\ (x \in D). \tag{3.8}$$

Доказательство. В каждой из областей $G^s\,(s \leqslant s_0)$ рассмотрим задачу

$$Lu_s = f \ \text{в}\ G^s, \tag{3.9}$$

$$Ru_s = 0 \ \text{на}\ \dot{G}^s. \tag{3.10}$$

Решение этой задачи существует, так как оператор L равномерно эллиптичен в $\overline{G^s}$ и имеет в $\overline{G^s}$ достаточно гладкие коэффициенты; в $\overline{G^s}$ f и R удовлетворяют известным условиям разрешимости невырожденной эллиптической краевой задачи (см. [15]). На границе $\dot{G}^s$ выполнена оценка

$$|Ru_s| \leqslant RH. \tag{3.11}$$

Действительно, по построению $Ru_s = 0$ на $\dot{G}^s$, а $RH \geqslant 0$ на $\dot{G}^s$ $(s \leqslant s_0)$ по условию леммы. Так как по условию леммы $H(x)$ неоднородная мажоранта уравнения $Lu = f$ в $\bar{D} \setminus D_0$, то из условия (3.11) следует

$$|u_s(x)| \leqslant H(x), \quad x \in \overline{G^s}. \tag{3.12}$$

Пусть M — замкнутая подобласть D. Выберем s_0 настолько близким к нулю, чтобы $M \subset \overline{G^s}$ для всех $s \leqslant s_0$. Тогда

$$Lu_s = f \text{ в } G^{s_0} \text{ для } s \leqslant s_0$$

и в силу оценки Шаудера (см. [10])

$$\| u_s \|_{2+\alpha}^M \leqslant c [\, \| f \|_\alpha^{G^{s_0}} + \| u_s \|_0^{G^{s_0}}], \tag{3.13}$$

где $\| u \|_{2+\alpha}^M$ — норма u в пространстве $C^{2+\alpha}(M)$, постоянная $c = c(G^{s_0}, M, \alpha)$ зависит лишь от G^{s_0}, M, α. Используя оценку (3.12), из (3.13) получим

$$\| u_s \|_{2+\alpha}^M \leqslant c\, [\| f \|_\alpha^{G^{s_0}} + \max_{x \in \bar{G}^{s_0}} (H x)]$$

для всех $s \leqslant s_0$.

Из последнего неравенства следует, что множество $\{u_s\}$ $(s \leqslant s_0)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в M. По теореме Арцела из последовательности $\{u_s\}$ можно выделить сходящуюся в M подпоследовательность $\{u_s^M\}$:

$$\| u_{s_1}^M - u_{s_2}^M \|_0^M \to 0 \text{ при } s_1, \ s_2 \to 0. \tag{3.14}$$

Рассмотрим теперь последовательность $\{M_i\}$ расширяющихся замкнутых подобластей D $(M_i \subset M_{i+1} \subset D)$. Для каждого i построим последовательность $\{u_s^{M_i}\}$, обладающую свойством (3.14). Далее, «диагональным» методом можно выделить последовательность $\{u_s'\}$ такую, что для любой замкнутой области $N \subset D$

$$\| u_{s_1}' - u_{s_2}' \|_0^N \to 0 \text{ при } s_1, \ s_2 \to 0.$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{u_s'\}$ сходится поточечно в D

$$\lim_{s \to 0} u_s'(x) = u(x).$$

Очевидно, $u(x)$ — непрерывная функция в любой замкнутой подобласти $N \subset D$ и

$$\| u_s - u \|_0^N \to 0 \text{ при } s \to 0.$$

Для любой замкнутой подобласти M найдется замкнутая подобласть $N \supset M$, что

$$Lu_s' = f \text{ в } N \text{ при } s \leqslant s_0$$

и в силу оценки Шаудера

$$\| u_{s_1}' - u_{s_2}' \|_{2+\alpha}^M \leqslant c(N, M, \alpha) \| u_{s_1}' - u_{s_2}' \|_0^N \to 0 \text{ при } s_1, \ s_2 \to 0.$$

Таким образом, последовательность $\{u_s'\}$ сходится в $C^{2+\alpha}(M)$ и, следовательно, функция $u(x)$ дважды дифференцируема в M и

$$\| u_s' - u \|_{2+\alpha}^M \to 0 \text{ при } s \to 0.$$

Отсюда получим

$$\| Lu_s' - Lu \|_0^M = \| L(u_s' - u) \|_0^M \leqslant c'(M) \| u_s' - u \|_{2+\alpha}^M \to 0 \text{ при } s \to 0,$$

Это означает, что $u(x)$ есть решение уравнения $Lu = f$ в любой замкнутой подобласти M и, следовательно, в любой внутренней точке $\overline{D}$. Так как каждая функция последовательности $\{u_s\}$ и, следовательно, последовательности $\{u'_s\}$ удовлетворяет оценке (3.12), то и предельная функция $u(x)$ удовлетворяет в оценке

$$|u(x)| \leqslant H(x). \tag{3.8}$$

Пусть x — любая точка $D_1 = \dot{D} \setminus D_0$. По построению функций u'_s, начиная с некоторого достаточно малого $s_0 > 0$, имеем

$$\Re u'_s(x) = Ru'_s(x) = 0, \ s \leqslant s_0.$$

Так как оценки Шаудера в области равномерной эллиптичности G оператора L могут быть распространены на замкнутую область $\overline{G}$ (см. [15]), то, повторив выше приведенные доказательства, мы можем установить, что в $\overline{G}^{s_0}$

$$\| u'_s - u \|_{2+\alpha}^{\overline{G}^{s_0}} \to 0, \ s \to 0.$$

Отсюда и из условия 1.7°

$$\Re u(x) = \lim_{s \to 0} Ru'_s(x) = 0$$

для любой точки $x \in D_1$.

Лемма доказана.

Замечание. Из оценки (3.8) вблизи D'' вытекает, что построенное в лемме 3.1 решение задачи (3.1) — (3.2) $u(x)$ непрерывно вблизи D'' и $u(x) = 0$ в точках $x \in D''(\overline{D}'')$, если $H(x) \to 0$ при $x \to D''(\overline{D}'')$.

Лемма 3.2. (единственности). *Решение задачи (3.1) — (3.2) единственно в классе функций, удовлетворяющих условию (3.8) в D, если в $\overline{D} \setminus D_0$ существует такая однородная мажоранта $H_0(x)$, что $\Re H_0 \geqslant 0$ на $D_1 = \dot{D} \setminus D_0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\rho = \rho(\varepsilon)$ такое, что*

$$\frac{H(x)}{H_0(x)} \leqslant \varepsilon \tag{3.15}$$

при всех x, принадлежащих ρ-окрестности D_0.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения u_1 и u_2 задачи (3.1) — (3.2), удовлетворяющие оценке (3.8). Тогда $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является решением следующей задачи

$$Lu = 0 \text{ в } D,$$
$$\Re u = 0 \text{ на } D_1$$

и удовлетворяет оценке

$$|u(x)| \leqslant 2H(x) \text{ в } D.$$

Пусть ε — любое положительное число и $\bar{x}$ — любая внутренняя точка $\overline{D}$. Выберем s_0 так, чтобы $\bar{x} \in G^{s_0}$ и было выполнено условие

$$\frac{H(x)}{H_0(x)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех x, принадлежащих s_0 — окрестности D_0. Произведем разбиение границы $\dot{G}^{s_0}$ на два множества $G_1^{s_0} = \dot{G}^{s_0} \cap D_1$ и $G_0^{s_0} = \dot{G}^{s_0} \setminus G_1^{s_0}$. Тогда $u(x)$ является решением следующей задачи

$$Lu = 0 \text{ в } G^{s_0},$$
$$\Re u = 0 \text{ на } G_1^{s_0} \tag{3.16}$$

и удовлетворяет оценке

$$|u(x)| \leqslant 2H(x) \leqslant \varepsilon H_0(x) \text{ на } G_0^{s_0}. \tag{3.17}$$

Из условия $\Re H_0 \geqslant 0$ на D_1, кроме того, вытекает

$$|\Re u| = 0 \leqslant \varepsilon \Re H_0 \text{ на } G_1^{s_0}. \tag{3.18}$$

По свойству однородной мажоранты из оценок (3.17) и (3.18) на $\dot{G}^{s_0}$ следует, что

$$|u(x)| \leqslant \varepsilon H_0(x) \text{ для } x \in G^{s_0}$$

и, в частности,

$$|u(\bar{x})| \leqslant \varepsilon H_0(\bar{x}). \tag{3.19}$$

Так как ε *в неравенстве (3.19) может быть сделано сколь угодно малым* при достаточно малом $s \leqslant s_0$, то из неравенства (3.19) следует $u(\bar{x})=0$. Точка $\bar{x}$ — произвольная внутренняя точка $\bar{D}$, и поэтому $u(x) \equiv 0$ в D, т. е. $u_1(x) \equiv u_2(x)$ в D. Лемма доказана.

С помощью лемм 3.1 и 3.2 и теорем 2.1 — 2.2 мы можем получить условия существования и единственности решения задачи (3.1) — (3.2′).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 2.2 и* $H(x) \to 0$ *при* $x \to \bar{D}''$. *Тогда существует решение задачи (3.1) — (3.2′) в* D, *удовлетворяющее оценке*

$$|u(x)| \leqslant H(x). \tag{3.8}$$

Это решение единственно в классе функций, удовлетворяющих оценке (3.8).

§ 4. Построение однородной и неоднородной мажорант

В этом разделе мы укажем для каждой из областей покрытия *локальные мажоранты, из которых методом «склеивания»* строятся однородная и неоднородная мажоранты для всей области.

Возможность такого «склеивания», как вытекает из результатов § 2, обеспечивается выполнением неравенств (2.8), (2.10), (2.11) и неравенства (2.15) для однородной мажоранты или неравенства (2.9) для неоднородной мажоранты. Эти и ряд других неравенств, используемых при доказательстве теорем 2.1 и 2.2, следуют из приводимых ниже без доказательства лемм. Метод доказательства этих лемм элементарен, однако он требует применения ряда громоздких оценок, и мы надеемся опубликовать их доказательства в дальнейшем.

В качестве однородной мажоранты уравнения $Lu = 0$ в $\bar{D} \setminus D_0$ выбирается функция

$$H_0(x) = \sum_{k \in K'} \varphi_k' g_k + \sum_{k \in K''} \varphi_k'' + \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}'} \psi_\alpha' h_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}''} \psi_\alpha'' + \sum_{\beta \in \mathfrak{P}} \chi_\beta, \tag{4.1}$$

где функции $\varphi_k'(x)$, $\varphi_k''(x)$, $\psi_\alpha'(x)$, $\psi_\alpha''(x)$, $\chi_\beta(x)$ образуют разложение единицы в D (см. § 1); а функции $h_\alpha(x)$ и $g_k(x)$ определяются следующими *формулами:*

$$h_\alpha(x) \equiv \tilde{h}_\alpha(y_n(x)) \equiv \int_{y_n(x)}^{1} e^{P_\alpha(s)}\, ds + 1 \quad (x \in T_\alpha' \cap D,\ \alpha \in \mathfrak{a}'), \tag{4.2}$$

$$g_k(x) \equiv \tilde{g}_k(y_{n-1}(x),\ y_n(x)) \equiv \int_{y_n(x)}^{1} \int_{-2}^{y_{n-1}(x)} e^{Q_k(\tau, s)}\, d\tau\, ds + 1, \tag{4.3}$$

$$(x \in E_k' \cap D,\ k \in K').$$

Лемма 4.1. *Пусть в $T'_\alpha \cap D$ выполнены условия 1.1°, 1.2°, 1.4°. Тогда функция $h_\alpha(x)$ при $x \in T'_\alpha \cap D$ удовлетворяет условиям: 1) $h_\alpha(x) \geqslant 0$; 2) $h_\alpha(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{T'_\alpha \cap D} \setminus \bar{D}'$; 3) $Lh_\alpha(x) \leqslant \leqslant a(x) h_\alpha(x)$; 4) растет при $x \to D' \cap T'_\alpha$ как $O(1) \int\limits_{y_n(x)}^{1} e^{P_\alpha(s)}\, ds$.*

Следствие. *Пусть $h_{\alpha_1}(x)$ и $h_{\alpha_2}(x)$ определены в $T'_{\alpha_1} \cap D$ и $T'_{\alpha_2} \cap D$ соответственно и удовлетворяют условиям леммы 4.1. Если выполнено условие*

$$\varlimsup_{s \to 0} |P_{\alpha_1}(s) - P_{\alpha_2}(s)| < \infty, \tag{4.4}$$

то существует такая положительная постоянная $c_{\alpha_1\alpha_2}$, что

$$\frac{1}{c_{\alpha_1\alpha_2}} h_{\alpha_2}(x) \leqslant h_{\alpha_1}(x) \leqslant c_{\alpha_1\alpha_2} h_{\alpha_2}(x) \tag{4.5}$$

для всех $x \in T'_{\alpha_1} \cap T'_{\alpha_2} \cap D$.

Лемма 4.2. *Пусть в $E'_k \cap D$ выполнены условия 1.1°, 1.2°, 1.5°, 1.7°, (2.23) и $a(x) \leqslant -a_0$, где a_0 — достаточно большая положительная постоянная. Тогда функция $g_k(x)$ при $x \in E'_k \cap D$ удовлетворяет условиям: 1) $g_k(x) \geqslant 0$; 2) дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{E'_k \cap D} \setminus \bar{D}'$; 3) $Lg_k(x) \leqslant \frac{1}{2} a(x) g_k(x)$; 4) ограничена при всех $\overline{x \in E'_k \cap D}$ и таких, что $y_{n-1}(x) < 0$, а при $y_{n-1}(x) \geqslant 0$ и $x \to D' \cap E'_k$ растет не медленнее, чем $O(1) \int\limits_{y_n(x)}^{1} \int\limits_{-2}^{0} e^{Qk(\tau, s)}\, d\tau\, ds$; 5) существует постоянная $c_k > 0$ такая, что для $x \in E'_k \cap D_1$ выполнено неравенство $\mathfrak{A} \frac{\partial g_k(x)}{\partial \gamma} \leqslant c_k g_k(x)$.*

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы 4.2. Тогда в любой точке $x \in E'_k \cap G_\beta \cap D$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{c_k} \leqslant g_k(x) \leqslant c_k, \tag{4.6}$$

где c_k — положительная постоянная.

Следствие 2. *Пусть $h_\alpha(x)$ и $g_k(x)$ определены в $T'_\alpha \cap D$ и $E'_k \cap D$, удовлетворяют условиям лемм 4.1 и 4.2 соответственно. Если выполнены условия*

$$\frac{1}{c'_{k\alpha}} e^{P_\alpha(s) - P_\alpha(r)} \leqslant \int\limits_{-2}^{y_{n-1}} e^{Qk(\tau, s) - Qk(\tau, r)}\, d\tau \leqslant c'_{k\alpha} e^{P_\alpha(s) - P_\alpha(r)}, \tag{4.7}$$

где $0 < s < 1$, $0 < r \leqslant 1$, $y_{n-1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, то для всех $x \in E'_k \cap T'_\alpha \cap D$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{c'_{k\alpha}} h_\alpha(x) \leqslant g_k(x) \leqslant c'_{k\alpha} h_\alpha(x). \tag{4.8}$$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия леммы 4.2 для $g_{k_1}(x)$ и $g_{k_2}(x)$ и существует верхний предел*

$$\varlimsup_{s \to 0} \sup_{-2 < \tau < 2} |Q_{k_1}(\tau, s) - Q_{k_2}(\tau, s)| < \infty. \tag{4.9}$$

Тогда существует постоянная $c_{k_1k_2} > 0$ *такая, что*

$$\frac{1}{c_{k_1k_2}} g_{k_2}(x) \leqslant g_{k_1}(x) \leqslant c_{k_1k_2} g_{k_2}(x). \tag{4.10}$$

Неоднородную мажоранту уравнения $Lu = f$ в $\overline{D} \setminus D_0$ определим по формуле

$$H(x) = \sum_{k \in K'} \varphi'_k g'_k + \sum_{k \in K''} \varphi''_k g''_k + \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}'} \psi'_\alpha h'_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}''} \psi''_\alpha h''_\alpha + \sum_{\beta \in \mathfrak{P}} \chi_\beta v_\beta, \tag{4.11}$$

где

$$h'_\alpha(x) = \int_{y_n(x)}^{1} e^{P_\alpha(s)} \int_0^s e^{-P_\alpha(r)} \tilde{q}_\alpha(r)\, dr\, ds + \nu,$$

$$x \in T'_\alpha \cap D, \quad \alpha \in \mathfrak{a}';$$

$$g'_k(x) = \int_{y_n(x)}^{1} \int_{-2}^{y_{n-1}(x)} e^{Q_k(\tau, s)} \int_0^s e^{-Q_k(\tau, r)} \tilde{q}_k(r)\, dr\, d\tau\, ds + \nu,$$

$$x \in E'_k \cap D, \quad k \in K';$$

$$h''_\alpha(x) = \int_0^{y_n(x)} e^{P_\alpha(s)} \left[\int_s^1 e^{-P_\alpha(r)} \tilde{q}_\alpha(r)\, dr + \mu \right] ds,$$

$$x \in T''_\alpha \cap D, \quad \alpha \in \mathfrak{a}'',$$

$$g''_k(x) = \int_0^{y_n(x)} \int_{y_{n-1}(x)}^{2} e^{Q_k(\tau, s)} \left[\int_s^1 e^{-Q_k(\tau, r)} \tilde{q}_k(r)\, dr + \mu \right] d\tau\, ds +$$

$$+ \mu \int_{y_{n-1}(x)}^{0} \int_s^0 \omega_k(\sigma)\, d\sigma\, ds,$$

$$x \in E''_k \cap D, \quad k \in K'';$$

$$v_\beta = q_\beta + \nu, \quad \beta \in \mathfrak{P}.$$

Здесь ν и μ — достаточно большие положительные постоянные.

Лемма 4.3. *Пусть в* $T'_\alpha \cap D$ *выполнены условия 1.1°, 1.2°, 1.4° и 3.1°. Тогда функция* $h'_\alpha(x)$ *при* $x \in T'_\alpha \cap D$ *удовлетворяет условиям: 1)* $h'_\alpha(x) \geqslant 0$; *2) дважды непрерывно дифференцируема в* $\overline{T'_\alpha \cap D \setminus \overline{D}'}$; *3)* $Lh'_\alpha(x) \leqslant -b_{nn}(x) q_\alpha(x) + a(x) h'_\alpha(x)$; *4) существует постоянная* $c_\alpha > 0$ *такая, что* $\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial h'_\alpha}{\partial x_j} \right| \leqslant c_\alpha h'_\alpha(x)$; *5)* $h'_\alpha(x)$ *при* $x \to D' \cap T'_\alpha$ *имеет порядок* $o(h_\alpha(x))$.

Следствие. *Пусть* $h'_{\alpha_1}(x)$ *и* $h'_{\alpha_2}(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 4.3 в* $T'_{\alpha_1} \cap D$ *и* $T'_{\alpha_2} \cap D$ *соответственно. Если выполнены условия (4.4) и*

$$\frac{1}{c_{\alpha_1\alpha_2}} q_{\alpha_2}(x) \leqslant q_{\alpha_1}(x) \leqslant c_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_2}(x), \tag{4.12}$$

где постоянная $c_{\alpha_1\alpha_2} > 0$ *и* $x \in T'_{\alpha_1} \cap T'_{\alpha_2} \cap D$, *то для функций* $h'_{\alpha_1}(x)$ *и* $h'_{\alpha_2}(x)$ *справедливо неравенство, аналогичное неравенству (4.5).*

Лемма 4.4. *Пусть в* $E'_k \cap D$ *выполнены условия 1.1°, 1.2°, 1.5° и 3.2°. Тогда функция* $g'_k(x)$ *при* $x \in E'_k \cap D$ *удовлетворяет условиям: 1)* $g'_k(x) \geqslant 0$. *2) дважды непрерывно дифференцируема в* $\overline{E'_k \cap D \setminus \overline{D}'}$;

3) $Lg'_k(x) \leqslant -b_{nn}(x)q_k(x) + \frac{1}{2}a(x)g'_k(x)$; *4) существует постоянная* $c_k > 0$ *такая, что* $\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial g'_k}{\partial x_j}\right| \leqslant c_k g'_k(x)$; *5)* $g'_k(x)$ *при* $x \to D' \cap E'_k$ *имеет порядок* $o(g_k(x))$ *и ограничена при каждом* $x \in \overline{E'_k \cap D}$ *и* $y_{n-1} < 0$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы 4.4. Тогда в любой точке* $x \in G_\beta \cap E'_k \cap D$ *для функции* $g'_k(x)$ *выполнено неравенство, аналогичное неравенству (4.6).*

Следствие 2. *Пусть* $h'_\alpha(x)$ *и* $g'_k(x)$ *определены в* $T'_\alpha \cap D$ *и* $E'_k \cap D$ *и удовлетворяют условиям лемм 4.3 и 4.4 соответственно. Если выполнены условия (4.7) и условия*

$$\frac{1}{c_{k\alpha}} q_\alpha(x) \leqslant q_k(x) \leqslant c_{k\alpha} q_\alpha(x), \tag{4.13}$$

где постоянная $c_{k\alpha} > 0$ *и* $x \in E'_k \cap T'_\alpha \cap D$, *то для функций* $h'_\alpha(x)$ *и* $g'_k(x)$ *в* $E'_k \cap T'_\alpha \cap D$ *выполнено неравенство, аналогичное неравенству (4.8).*

Следствие 3. *Пусть выполнены условия леммы 4.4 для* $g'_{k_1}(x)$ *и* $g'_{k_2}(x)$, *условия (4.9) и*

$$\frac{1}{c_{k_1k_2}} q_{k_2}(x) \leqslant q_{k_1}(x) \leqslant c_{k_1k_2} q_{k_2}(x), \tag{4.14}$$

где постоянная $c_{k_1k_2} > 0$ *и* $x \in E'_{k_1} \cap E'_{k_2} \cap D$. *Тогда для функций* $g'_{k_1}(x)$ *и* $g'_{k_2}(x)$ *справедливы неравенства, аналогичные неравенству (4.10).*

Лемма 4.5. *Пусть в* $T''_\alpha \cap D$ *выполнены условия 1.1°, 1.2°, 1.3° и 3.1°. Тогда функция* $h''_\alpha(x)$ $(x \in T''_\alpha \cap D)$ *удовлетворяет условиям: 1)* $h''_\alpha(x) \geqslant 0$; *2) дважды непрерывно дифференцируема в* $T''_\alpha \cap D$; *3)* $Lh''_\alpha(x) \leqslant -b_{nn}q_\alpha(x) + a(x)h''_\alpha(x)$; *4) существует постоянная* $c_\alpha > 0$ *такая, что* $\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial h''_\alpha}{\partial x_j}\right| \leqslant c_\alpha h''_\alpha(x)$; *5)* $h''_\alpha(x) \to 0$ *при* $x \to T''_\alpha \cap D''$.

Следствие. *Пусть* $h''_{\alpha_1}(x)$ *и* $h''_{\alpha_2}(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 4.5 в* $T''_{\alpha_1} \cap D$ *и* $T''_{\alpha_2} \cap D$ *соответственно. Если выполнены условия (4.4) и (4.12)* $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{a}'')$, *то для функций* $h''_{\alpha_1}(x)$ *и* $h''_{\alpha_2}(x)$ *в* $T''_{\alpha_1} \cap T''_{\alpha_2} \cap D$ *справедливо неравенство, аналогичное неравенству (4.5).*

Замечание. Условие (4.4) выполнено, если функции $P_{\alpha_1}(s)$ и $P_{\alpha_2}(s)$ ограничены при $s \in [0,1]$.

Лемма 4.6. *Пусть в* $E''_k \cap D$ *выполнены условия 1.1°, 1.2°, 1.6°, 3.2° и* $a(x) \leqslant -a_0$, *где* a_0 *достаточно большая положительная постоянная. Тогда функция* $g''_k(x)$ *при* $x \in E''_k \cap D$ *удовлетворяет условиям: 1)* $g''_k(x) \geqslant 0$; *2) дважды непрерывно дифференцируема в* $E''_k \cap D$; *3)* $Lg''_k(x) \leqslant -b_{nn}(x)q_k(x) + \frac{1}{2}a(x)g''_k(x)$; *4) существует постоянная* $c_k > 0$ *такая, что* $\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial g''_k}{\partial x_j}\right| \leqslant c_k g''_k(x)$; *5)* $g''_k(x) \to 0$ *при* $x \to D'' \cap E''_k$ *и* $g''_k(x) \geqslant c_{0k} > 0$ *для всех* $x \in E''_k \cap G_\beta \cap D$ *при всех* $\beta \in \mathfrak{P}$ *таких, что* $E''_k \cap G_\beta \neq \varnothing$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы 4.6. Тогда для $g_k''(x)$ в $E_k'' \cap G_\beta \cap D$ справедливо неравенство, аналогичное неравенству (4.6).*

Следствие 2. *Пусть функции $h_\alpha''(x)$ и $g_k''(x)$ определены в $T_\alpha'' \cap \cap D$ и $E_k'' \cap D$, удовлетворяют условиям лемм 4.5 и 4.6 соответственно. Если выполнены условия (4.7) и (4.13) ($\alpha \in \mathfrak{a}''$, $k \in K''$), то для функций $h_\alpha''(x)$ и $g_k''(x)$ выполнено неравенство, аналогичное неравенству (4.8).*

Следствие 3. *Пусть выполнены условия леммы 4.6 для $g_{k_1}''(x)$ и $g_{k_2}''(x)$, условия (4.9) и (4.14). Тогда для функций $g_{k_1}''(x)$ и $g_{k_2}''(x)$ справедливо неравенство, аналогичное неравенству (4.10).*

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. ДАН СССР, т. 77, № 2, 181—183. 1951.

2. О. А. Олейник. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области. ДАН СССР, т. 87, № 6, 885—888, 1952.

3. Н. Д. Введенская. Об одной краевой задаче для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области. ДАН СССР, т. 91, № 4, 711—714, 1953.

4. С. Г. Михлин. Вырождающиеся эллиптические уравнения. «Вестн. ЛГУ», № 8, 19—48, Изд-во ЛГУ, Л., 1954.

5. М. И. Вишик. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. «Матем. сб.», т. 35 (77) : 3, 513—568, 1954.

6. В. К. Захаров. Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа второго и четвертого порядка, вырождающихся или имеющих особенности в конечном числе внутренних точек области. ДАН СССР, т. 124, № 4, 747—751, 1959.

7. В. П. Глушко. Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на многообразиях. ДАН СССР, т. 129, № 3. 492—495, 1959.

8. Л. Г. Михайлов. Первая краевая задача для эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами. ДАН Тадж. ССР, т. III, № 5, 3—8, 1960.

9. С. А. Тарсенов. Об одном уравнении эллиптического типа, вырождающемся на границе области. ДАН СССР, т. 115. № 4, 670—673, 1957.

10. M. Schechter. On the dirichlet problem for second order elliptic equations with coefficients singular at the boundary. Comm. on pure and appl. math., vol. XIII, № 2, 321—328, 1960.

11. В. П. Глушко. О существовании и единственности решения некоторых краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. ДАН СССР, т. 163, № 1, 22—25, 1965.

12. G. Fichera. On a inifield theory of boundary value problem for elliptic-parabolic equations of second order, Boundary problems differential equations, The University of Wisconsin Press, Madison, 97—120, 1960.

13. О. А. Олейник. Об одной задаче Г. Фикера. ДАН СССР, т. 157. № 6, 1297—1300, 1964.

14. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд-во иностр. лит., 1957.

15. С. Агмон и др. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила 2 апреля 1966 г.