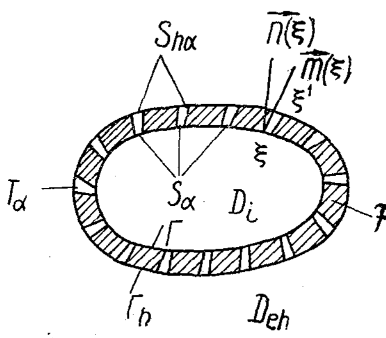
О ПРОХОЖДЕНИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ТОНКИЕ КАНАЛЫ В ОТРАЖАЮЩЕМ СЛОЕ

Г. В. Сузиков, Е. Я. Хруслов

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию второй краевой задачи для уравнения Гельмгольца в области D, являющейся дополнением до всего пространства множества F, которое удобно назвать слоем с каналами (см. рис.).

Множество F построено следующим образом. Пусть на замкнутой поверхности Γ, лежащей в трехмерном пространстве, задано некоторое векторное поле $\boldsymbol{m}(x)$ такое, что скалярное произведение $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ вектора $\boldsymbol{m}(x)$ на вектор $\boldsymbol{n}(x)$ нормали к поверхности Γ всюду положительно. Предполагая, что поверхность Γ достаточно гладкая, построим в области D_e, внешней относительно Γ, поверхность Γ_h, параллельную Γ и отстоящую от нее на расстояние h.



На поверхности Γ выделено множество S, состоящее из конечного числа связных кусков S_α, ограниченных гладкими кривыми ($S = \bigcup_\alpha S_\alpha$), Векторы $\boldsymbol{m}(x)$ проходящие через S, при пересечении с поверхностью Γ_h образуют множество $S_h = \bigcup_\alpha S_{h\alpha}$. Множество точек, лежащих в слое между поверхностями Γ и Γ_h на векторах $\boldsymbol{m}(x)$, проходящих через S, обозначим через $T = \bigcup_\alpha T_\alpha$ (каналы). Таким образом, область D состоит из областей D_i — внутренней относительно Γ и D_{eh} — внешней относительно Γ_h, соединенных между собой каналами T_α, т. е. $D = D_i \bigcup D_{eh} \bigcup T \bigcup S \bigcup S_h$.

В области D рассматривается краевая задача для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = f \quad (\operatorname{Im} k > 0) \tag{1}$$

при граничном условии на F

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0. \tag{2}$$

Нас интересует асимптотическое поведение решения этой задачи, когда *толщина слоя h и диаметры каналов стремятся к нулю, а число* каналов стремится к бесконечности и располагаются они достаточно «регулярно». В этом случае решение стремится к некоторой функции, удовлетворяющей вне предельной поверхности Г тому же уравнению, а на самой поверхности Г «усредненным» граничным условиям такого же типа, как в работах [1], [2].

Заметим, что в работе [1] рассматривался случай $h=0$. В данной работе дается вывод граничного условия для другого «крайнего» случая, когда каналы становятся очень тонкими по сравнению с толщиной слоя.

§ 1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Прежде всего заметим, что граница области D имеет углы. Поэтому необходимо дать более строгую постановку краевой задачи (1) — (2).

Всюду в дальнейшем будем рассматривать функцию Грина $G(x, y; k)$ задачи (1) — (2), которую определим следующим образом:

1) $G(x, y; k) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} + q(x, y; k)$,

где функция $q(x, y; k)$ принадлежит пространству $W_2^1(D) \cap W_2^2$ (лок) и удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца;

2) граничные условия на F должны выполняться в следующем смысле. Пусть F_m — гладкие поверхности, лежащие в области D и охватывающие множество F, причем при $m \to \infty$ все точки F_m стремятся к F. Тогда для любой функции $\zeta(x) \in W_2^1(D)$

$$\lim_{m\to\infty} \int_{F_m} \frac{\partial G}{\partial n} \zeta \, dS = 0. \qquad (2')$$

Будем рассматривать последовательность областей $D^{(n)}$ таких, что при $n \to \infty$ $h^{(n)} \to 0$, а каналы в слое становятся все более тонкими и располагаются все более «плотно». (Поверхность Г и векторное поле $m(x)$ фиксированы). Для того, чтобы строго охарактеризовать расположение каналов, приведем здесь определение понятия h-емкости, введенное в работе [2].

Пусть на поверхности Г задана непрерывная положительная функция $h(x)$. Тогда h-емкостью куска σ поверхности Г называется число

$$C_h(\sigma) = \int_\sigma \varphi(x)\, dS_x, \qquad (3)$$

где функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$h(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{1}{|x-\xi|}\varphi(\xi)\, dS_\xi = 1 \quad x \in \sigma. \qquad (4)$$

В данной работе всюду $h(x) = \frac{h}{(m, n)^2}$.

Обозначим через $C_h^{(n)}(x, \rho)$ — h-емкость части множества $S^{(n)}$, попавшей в шар радиуса ρ с центром в точке $x \in \Gamma$, а через $d_\alpha^{(n)}$ и $r_{\alpha\beta}^{(n)}$ — соответственно диаметры множеств S_α и расстояния между S_α и S_β. Тогда основной результат данной работы можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть при $n \to \infty$ выполняются следующие условия:*

1) $h^{(n)} \to 0$;

2) $\max_\alpha d_\alpha = 0(h^{2+\varepsilon})$ $\varepsilon > 0$;

3) $r_{\alpha\beta} \geqslant A \max_\alpha d_\alpha$;

4) $\lim_{\rho\to 0} \overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{c_h^{(n)}(x, \rho)}{\pi\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{c_h^{(n)}(x, \rho)}{\pi\rho^2} = f(x)$.

Тогда равномерно по x и y, находящимся на положительном расстоянии от Γ, существует предел последовательности функций Грина $G^{(n)}(x, y; k)$ краевых задач (1)—(2):

$$\lim_{n\to\infty} G^{(n)}(x, y; k) = G(x, y; k),$$

и этот предел удовлетворяет вне поверхности Γ *уравнению*

$$\Delta G + k^2 G = -\delta(x, y) \tag{1'}$$

и таким граничным условиям на Γ

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_e = \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_i,$$
$$\frac{\partial G}{\partial n} = \pi f(G_e - G_i), \tag{2''}$$

где знаками i и e отмечены предельные значения функций соответственно с внутренней и внешней стороны Γ; $\frac{\partial}{\partial n}$ — *дифференцирование по направлению внешней нормали.*

Доказательство этой теоремы здесь приведено для $k = i\lambda$, где λ — достаточно большое положительное число. Переход к комплексным k можно сделать с помощью тождества Гильберта для резольвент так же, как в работе [3].

§ 2. Построение решения задачи

В этом параграфе будет получена удобная для доказательства теоремы 1 конструкция решения задачи (1) — (2) при $k = i\lambda$ и фиксированном n.

Пусть $y \in D_i$. Рассмотрим функцию

$$Q(x, y; \lambda) = \begin{cases} Q_i = G_i(x, y; \lambda) + \int\limits_S G_i(x, \xi; \lambda)\varphi(\xi)\, dS_\xi & x \in D_i \\ Q_{eh} = -\int\limits_S G_{eh}(x, \xi; \lambda)\, \varphi_h(\xi)\, dS_\xi & x \in D_{eh}, \end{cases} \tag{5}$$

где $\varphi(\xi)$ — функция, заданная на множестве S и удовлетворяющая там уравнению:

$$\frac{h}{(m(x), n(x))^2}\varphi(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \{G_i(x, \xi; \lambda) + G_e(x, \xi; \lambda)\}\, \varphi(\xi)\, dS_\xi =$$
$$= -G_i(x, y; \lambda) \qquad x \in S; \tag{6}$$

G_i, G_e, G_{eh} — функции Неймана для уравнения Гельмгольца при $k = i\lambda$ в областях D_i, D_e и D_{eh}; функция $\varphi_h(\xi)$ получена перенесением значений $\varphi(\xi)$ на поверхность Γ_h по направлению $m(\xi)$, т. е. если точка $\xi' \in \Gamma_h$ лежит на пересечении вектора $m(\xi)$ с поверхностью Γ_h, то

$$\varphi_h(\xi') = \varphi(\xi). \tag{7}$$

Мы покажем, что функцией $Q(x, y; \lambda)$, соответствующим образом доопределенной в каналах $T = \bigcup\limits_\alpha T_\alpha$, можно аппроксимировать функцию Грина $G(x, y; k)$ задачи (1)—(2) при $k = i\lambda$, т. е.

$$G(x, y; \lambda) = Q(x, y; \lambda) + w(x, y; \lambda), \tag{8}$$

где $w(x, y; \lambda)$ в метрике $L_2(D)$ стремится к нулю при $h \to 0$, причем в любой области, находящейся на положительном расстоянии от Γ, $w(x, y; \lambda)$ стремится к нулю равномерно.

Предварительно установим некоторые свойства гладкости функций Q_i и Q_{eh} на множествах S и S_h соответственно. Для этого нам понадобятся следующие оценки для решения уравнения (6), которые были установлены в работе [2] (лемма 2),

$$|\varphi(x)| < \frac{C}{h}; \quad \int\limits_S \frac{1}{|x-\xi|} |\varphi(\xi)| \, dS_\xi < C, \tag{9}$$

здесь и в дальнейшем через C обозначена постоянная, не зависящая от S и h.

Воспользуемся известным представлением для функций Неймана G_i, G_e, G_{eh} в виде потенциала простого слоя,

$$G_{i,e}(x, \xi; \lambda) = \frac{e^{-\lambda|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} + \int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda|x-\eta|}}{|x-\eta|} g_{i,e}(\eta, \xi; \lambda) \, dS_\eta \quad \xi \in \Gamma, \tag{10}$$

$$G_{eh}(x, \xi; \lambda) = \frac{e^{-\lambda|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} + \int\limits_{\Gamma_h} \frac{e^{-\lambda|x-\eta|}}{|x-\eta|} g_{eh}(\eta, \xi; \lambda) \, dS_\eta \quad \xi \in \Gamma_h,$$

где плотности g_i, g_e и g_{eh} непрерывны при $\eta \neq \xi$ и имеют место неравенства

$$|g_{i,e}(\eta, \xi; \lambda)| < \frac{C}{|\eta-\xi|}; \quad |g_{eh}(\eta, \xi; \lambda)| < \frac{C}{|\eta-\xi|}.$$

Учитывая первое неравенство (9), из формул (10), (5) и (7) легко получаем

$$|Q_i(x_2, y; \lambda) - Q_i(x_1, y; \lambda)| < \frac{C}{h} |x_2 - x_1| \, |\ln|x_2 - x_1||, \tag{11}$$

$$|Q_{eh}(x_2, y; \lambda) - Q_{eh}(x_1, y; \lambda)| < \frac{C}{h} |x_2 - x_1| \, |\ln|x_2 - x_1||.$$

Аналогичное неравенство имеет место для функции $\int\limits_S G_e(x, \xi; \lambda) \varphi(\xi) \, dS_\xi$.

Поэтому, так как функция $(\boldsymbol{m}(x), \boldsymbol{n}(x))$ достаточно гладкая, из уравнения (6) следует

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < \frac{C}{h^2} |x_2 - x_1| \, |\ln|x_2 - x_1||. \tag{12}$$

Установим взаимно однозначное соответствие между точками поверхностей Γ и Γ_h:

$$\xi \leftrightarrow \xi' \quad \xi \in \Gamma, \quad \xi' \in \Gamma_h,$$

где ξ' — точка пересечения вектора $\boldsymbol{m}(\xi)$ с поверхностью Γ_h (так как векторное поле $\boldsymbol{m}(\xi)$ и поверхность Γ достаточно регулярны и $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) > 0$, то при малых h такое соответствие всегда можно установить).

Лемма 1. *Пусть $x \in \Gamma$ или D_{eh}, а $\xi \in \Gamma$ и $\xi' \leftrightarrow \xi$. Тогда, если поверхность Γ дважды дифференцируема и вторые производные удовлетворяют условию Липшица, то для функций Неймана G_e и G_{eh} имеет место неравенство*

$$|G_e(x, \xi; \lambda) - G_{eh}(x', \xi'; \lambda)| < \frac{Ch}{|x-\xi|},$$

где $x' \leftrightarrow x$ при $x \in \Gamma$ и $x' = x$ при фиксированном $x \in D_{eh}$, Доказательство леммы приведено в приложении п. 1. С помощью этой леммы нетрудно установить такое неравенство:

$$|Q_{eh}(x', y; \lambda) + \int_S G_e(x, \xi; \lambda)\, \varphi(\xi)\, dS_\xi| < Ch, \tag{13}$$

где $x' \to x$ при $x \in \Gamma$ и $x' = x$ при фиксированном $x \in D_{eh}$. Действительно, в силу формул (5) и (7) имеем

$$Q_{eh}(x', y; \lambda) = -\int_{S_h} G_{eh}(x', \xi'; \lambda)\, \varphi_h(\xi')\, dS_{\xi'} = -\int_S G_{eh}(x', \xi'; \lambda)\, \varphi(\xi)\, D_h(\xi)\, dS_\xi, \tag{14}$$

где $D_h(\xi) = \dfrac{|\vec{\xi}'_u \times \vec{\xi}'_v|}{|\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v|}$ — якобиан; $\vec{\xi}$, $\vec{\xi}'$ — радиусы-векторы точек ξ и ξ'; u, v — координатная сеть на поверхности Γ.

Нетрудно показать (см. приложение п. 1), что

$$D_h(\xi) = 1 + O(h) \quad \text{при } h \to 0. \tag{15}$$

Из равенства (14) получаем

$$Q_{eh}(x', y; \lambda) = -\int_S G_e(x, \xi; \lambda)\, \varphi(\xi)\, dS_\xi + \int_S G_e(x, \xi; \lambda)\, \varphi(\xi)\, [1 - D_h(\xi)]\, dS_\xi - \\ - \int_S [G_{eh}(x', \xi'; \lambda) - G(x, \xi; \lambda)]\, D_h(\xi)\, \varphi(\xi)\, dS_\xi,$$

откуда в силу формулы (15), второго неравенства (9) и леммы 1 следует (13).

Теперь перейдем к построению функции $Q(x, y; \lambda)$ в каналах $T = \bigcup_\alpha T_\alpha$. Для этого в каждом канале введем свою систему координат (u, v, t) следующим образом. Проведем в канале T_α поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\alpha(u, v)$, ортогональную векторному полю $\boldsymbol{m}$ и проходящую через некоторую точку x_α множества S_α, и выберем на ней координатную сеть u, v. Ось t направим по направлению $\boldsymbol{m}$. Тогда каждой точке $\bar{x} \in T_\alpha$ можно поставить в соответствие вектор

$$\boldsymbol{R}_\alpha(\bar{u}, \bar{v}, t) = \boldsymbol{r}_\alpha(\bar{u}, \bar{v}) + t\boldsymbol{m}(\bar{u}, \bar{v}), \tag{16}$$

где $\bar{u}$ $\bar{v}$ — координаты проекции точки $\bar{x}$ на поверхность $\boldsymbol{r}_\alpha(\bar{u}, \bar{v})$, $|t|$ — расстояние от $\bar{x}$ до $\boldsymbol{r}_\alpha(\bar{u}, \bar{v})$.

Доопределим в каждом канале функцию $Q(x, y; \lambda)$ по формуле

$$Q(x, y; \lambda) = Q_\alpha(u, v, t) = Q_i^\alpha + \frac{Q_{eh}^\alpha - Q_i^\alpha}{L^\alpha} \int_0^t \frac{d\tau}{1 + 2H^\alpha \tau + K^\alpha \tau^2} \qquad x \in T_\alpha. \tag{17}$$

Здесь Q_i^α и Q_{eh}^α — значения функций Q_i и Q_{eh} соответственно в точках $x_\alpha \in S_\alpha$ и $x'_\alpha \in S_{h\alpha}$; H^α, K^α — значения функций $H^\alpha(u, v) = \pm \dfrac{|(\boldsymbol{m}_u \times \boldsymbol{r}_v^\alpha) + (\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{m}_v)|}{2|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|}$ и $K^\alpha(u, v) = \pm \dfrac{|\boldsymbol{m}_u \times \boldsymbol{m}_v|}{|\boldsymbol{r}_u^\alpha \times \boldsymbol{r}_v^\alpha|}$ в точке x_α, причем в этих равенствах берется знак $+$, если направление вектора, стоящего в числителе, совпадает с направлением вектора, стоящего в знаменателе, и знак $-$ в противном случае (заметим, что $H^\alpha(u, v)$ и $K^\alpha(u, v)$ — средняя и гауссова кривизна поверхности

$\boldsymbol{r}_\alpha(u,\ v))$; $L^\alpha = \int\limits_0^{l^\alpha} \frac{d\tau}{1+2H^\alpha\tau+K^\alpha\tau^2}$, l^α — длина участка вектора $\boldsymbol{m}(x_\alpha)$, лежащего между точками x_α и x'_α.

Положим теперь $d_\alpha = h^{2+\varepsilon}$ и установим некоторые свойства функции $Q(x,\ y;\ \lambda)$ в каналах. Прежде всего, пользуясь уравнением (6) и неравенством (13), находим:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q^\alpha_{eh} - Q^\alpha_i}{L^\alpha} \cdot \frac{1}{1+2H^\alpha t + K^\alpha t^2} = \frac{1}{l^\alpha}\left(\frac{h}{(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n})^2}\varphi(x_\alpha) + \varphi_1(x_\alpha)\right)(1+O(h)), \quad (18)$$

где $\varphi_1(x_\alpha) < Ch$.

Обозначая через θ и θ' углы между вектором $\boldsymbol{m}$ и векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}'$ нормалей к поверхностям Γ и Γ_h в соответствующих точках и учитывая соотношения $\cos\theta = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$, $\cos\theta' = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}') = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})(1+O(h))$, $l^\alpha = \frac{h}{(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})}\times$ $\times((1+O(h))$, из (18) и первого неравенства (9) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial n} &= \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t}\cos\theta = \varphi(x_\alpha) + \overline{\varphi}_1(x_\alpha); \\ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial n'} &= \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t}\cos\theta' = \varphi(x_\alpha) + \overline{\varphi}_2(x_\alpha); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\left|\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s}\right| \leqslant \left|\frac{\partial Q_\alpha}{\partial t}\sin\theta\right| < \frac{C}{h};\quad \left|\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s'}\right| \leqslant \left|\frac{\partial Q_\alpha}{\partial t}\sin\theta'\right| < \frac{C}{h}, \quad (20)$$

где $\overline{\varphi}_1 < C$, $\overline{\varphi}_2 < C$; $\frac{\partial}{\partial s}$ и $\frac{\partial}{\partial s'}$ — производные по направлению, касательному к поверхностям Γ и Γ_h.

Далее, так как $Q_\alpha(u,\ v,\ t)$ не зависит от u, v, то нормальная производная к боковой поверхности канала равна нулю:

$$\frac{\partial Q}{\partial n_{\text{бок}}} = 0. \quad (21)$$

Функция $Q(x,\ y;\ \lambda)$ в каналах не удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца. Чтобы оценить невязку, запишем лапласиан Δ в системе координат u, v, t:

$$\Delta = \frac{1}{|\mathrm{R}^\alpha_u \times \mathrm{R}^\alpha_v|}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(|\boldsymbol{R}^\alpha_u \times \boldsymbol{R}^\alpha_v|\frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{|\mathrm{R}^\alpha_v|}{|\mathrm{R}^\alpha_u|}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{|\mathrm{R}^\alpha_u|}{|\mathrm{R}^\alpha_v|}\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\},$$

где $\boldsymbol{R}^\alpha$ — радиус-вектор точки $x(u,\ v,\ t) \in T_\alpha$, определяемой формулой (16), Нетрудно проверить, что при малых h $|\boldsymbol{R}^\alpha_u \times \boldsymbol{R}^\alpha_v| = |\boldsymbol{r}^\alpha_u \times \boldsymbol{r}^\alpha_v|(1 + 2H^\alpha(u, v)t +$ $+ K^\alpha(u, v)t^2)$, где $K^\alpha(u, v) = \pm\frac{|\boldsymbol{m}_u \times \boldsymbol{m}_v|}{|\boldsymbol{r}^\alpha_u \times \boldsymbol{r}^\alpha_v|}$, $H^\alpha(u, v) = \pm\frac{|(\boldsymbol{m}_u \times \boldsymbol{r}^\alpha_v) + (\boldsymbol{r}^\alpha_u \times \boldsymbol{m}_v)|}{2|\boldsymbol{r}^\alpha_u \times \boldsymbol{r}^\alpha_v|}$ — гауссова и средняя кривизна поверхности $\boldsymbol{r}_\alpha(u,\ v)$.

Отсюда, пользуясь формулой (17), будем иметь:

$$\Delta Q_\alpha = \frac{1}{1+2H^\alpha(u, v)t + K^\alpha(u, v)t^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(1 + 2H^\alpha(u, v)t + K^\alpha(u, v)t^2\right)\frac{\partial}{\partial t}Q\right\} =$$

$$= \frac{Q^\alpha_{eh} - Q^\alpha_i}{L^\alpha[1+2H^\alpha(u, v)t + K^\alpha(u, v)t^2)}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1+2H^\alpha(u, v)t + K^\alpha(u, v)t^2}{1+2H^\alpha t + K^\alpha t^2} =$$

$$= 2\,\frac{Q^\alpha_{eh} - Q^\alpha_i[H^\alpha(u, v) - H^\alpha] + t[K^\alpha(u, v) - K^\alpha] + t^2[K^\alpha(u, v)H^\alpha - K^\alpha H^\alpha(u, v)]}{L^\alpha[1+2H^\alpha(u, v)t + K^\alpha(u, v)t^2][1+H^\alpha t + K^\alpha t^2]^2}, \quad (22)$$

Из формул (5), (10), неравенства (13) и второго неравенства (9) следует, что Q_i^α и Q_{eh}^α ограничены равномерно по h. Поэтому, предполагая, что функции $H^\alpha(u, v)$ и $K^\alpha(u, v)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем $a \geqslant \frac{1}{4+2\varepsilon}$, и учитывая, что $L^\alpha = \delta_h\,(\delta > 0)$ и $d_\alpha = h^{2+\varepsilon}$, из равенств (17) и (22) получаем

$$\Delta Q_\alpha - \lambda^2 Q_\alpha = \Phi_\alpha, \tag{23}$$

где $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(u, v, t)$ также удовлетворяет условию Гельдера, причем

$$|\Phi_\alpha| < \frac{C}{\sqrt{h}}. \tag{24}$$

Итак, построенная по формулам (5) и (17) функция $Q(x, y; \lambda)$ обладает следующими свойствами. В областях D_i и D_{eh} она удовлетворяет уравнению

$$\Delta Q - \lambda^2 Q = -\delta(x, y),$$

а в областях T_α уравнению (23). Нормальная производная $Q(x, y; \lambda)$ во всех внутренних точках множеств $\Gamma \setminus S$ и $\Gamma_h \setminus S_h$, как видно из формулы (5), равна нулю. То же самое имеет место на боковой поверхности каналов T_α (формула 21). На множествах S и S_h функция $Q(x, y; \lambda)$ имеет скачки $q(x) = Q_i - Q_\alpha$ и $q_h(x') = Q_{eh} - Q_\alpha$ ($x \in S$, $x' \in S_h$), причем в силу формул (11) и (20) для них выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &|q(x_2) - q(x_1)| < \frac{C}{h}|x_2 - x_1|\,\Big|\ln|x_2 - x_1|\Big| \quad x_2, x_1 \in S_\alpha, \\ &|q_h(x_2') - q_h(x_1')| < \frac{C}{h}|x_2' - x_1'|\,\Big|\ln|x_2' - x_1'|\Big| \quad x_2', x_1' \in S_{h\alpha}, \end{aligned} \tag{11'}$$

а так как $\max\limits_\alpha d_\alpha = O(h^{2+\varepsilon})$ и $q(x_\alpha) = q_h(x_\alpha') = 0$ (формула 17), то отсюда следует, что

$$|q(x)| < Ch^{1+\varepsilon} \text{ и } |q_h(x')| < Ch^{1+\varepsilon}, \tag{25}$$

Функция $Q(x, y; \lambda)$ имеет на S и S_h также скачки нормальной производной $\psi(x) = \frac{\partial Q_i}{\partial n} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial n}$ и $\psi_h(x') = \frac{\partial Q_{eh}}{\partial n'} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial n'}$. Учитывая, что $\max\limits_\alpha d_\alpha = O(h^{2+\varepsilon})$, из (5), (7), (12) и (19) получаем

$$|\psi(x)| < C \quad \text{и} \quad |\psi_h(x')| < C. \tag{26}$$

Таким образом, функция w в формуле (8) должна скомпенсировать все недостатки функции $Q(x, y; \lambda)$, т. е. w должна удовлетворять в областях D_i и D_{eh} однородному уравнению Гельмгольца, а в областях T_α — уравнению

$$\Delta w - \lambda^2 w = -\Phi_\alpha.$$

При переходе через S и S_h w должна иметь скачки, равные $-q$ и $-q_h$, и скачки нормальной производной, равные $-\psi$ и $-\psi_h$.

В следующем параграфе мы докажем существование такой функции w и ее малость при достаточно малых h.

§ 3. Построение функции w

Удобно искать w в виде

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x), \tag{8'}$$

где w_1 должна компенсировать скачки нормальной производной функции Q и правую часть уравнения (23), а w_2 — скачки самой функции Q.

Сначала проведем построение w_1. Для этого в классе функций $W_2^1(D)$ рассмотрим функционал

$$H(u) = D(u, u) + 2(\rho, u),$$

где

$$D(u, \xi) = \int_D \{(\nabla u, \nabla\xi) + \lambda^2 u\xi\}\, d\tau,$$

$$(\rho, u) = -\int_T \Phi u\, d\tau + \int_S \psi u\, dS - \int_{S_h} \psi_h u\, dS,$$

$$T = \bigcup_\alpha T_\alpha, \quad \Phi = \Phi_\alpha(x) \text{ при } x \in T_\alpha.$$

Будем искать w_1 как минимум этого функционала. Покажем, что $H(u)$ ограничено снизу. Действительно, учитывая (24) и (26) и пользуясь неравенством Буняковского и теоремой вложения [4], получим

$$\left|\int_T \Phi u\, d\tau\right| \leqslant \left(\int_T \Phi^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T u^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\sqrt{\frac{T}{h}}\sqrt{D(u, u)},$$

$$\left|\int_S \psi u\, dS\right| \leqslant \left(\int_S \psi^2\, dS\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_S u^2\, dS\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\sqrt{S}\sqrt{D(u, u)}, \tag{27}$$

$$\left|\int_{S_h} \psi_h u\, dS\right| \leqslant \left(\int_{S_h} \psi_h^2\, dS\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{S_h} u^2\, dS\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\sqrt{S_h}\sqrt{D(u, u)},$$

откуда следует, что

$$H(u) \geqslant D(u, u) - 2\varepsilon\sqrt{D(u, u)} = (\sqrt{D(u, u)} - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 \geqslant -\varepsilon^2,$$

где

$$\varepsilon = C\left(\sqrt{S} + \sqrt{S_h} + \sqrt{\frac{T}{h}}\right).$$

Из ограниченности $H(u)$ вытекает, что существует минимизирующая последовательность u_k такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} H(u_k) = \min\limits_u H(u)$. Пользуясь известным методом (см., например, [4]), можно показать, что u_k сходится в метрике $D(u, u)$ (которая, очевидно, эквивалентна метрике $W_2^1(D)$) к некоторой функции $w_1 \in W_2^1(D)$, причем для любой функции $\zeta \in W_2^1(D)$ имеет место равенство

$$D(w_1, \zeta) + (\rho, \zeta) = 0. \tag{28}$$

Полагая в этой формуле $\zeta(x) \equiv 0$ при $x \in T = \bigcup_\alpha T_\alpha$, получаем $D(u, \zeta) = 0$, откуда следует, что

$$\Delta w_1 - \lambda^2 w_1 = 0 \tag{29}$$

в областях D_i и D_{eh}. Аналогично, если $\zeta \neq 0$ только в области T_α, то

$$\int\limits_{T_\alpha} \{(\nabla w_1 \nabla \zeta) + \lambda^2 w_1 \zeta\} \, d\tau - \int\limits_{T_\alpha} \Phi_\alpha \zeta \, d\tau = 0$$

и, значит,

$$\Delta w_1 - \lambda^2 w_1 = -\Phi_\alpha \text{ при } x \in T_\alpha. \tag{30}$$

Обозначим через Γ^k, Γ_h^k и L_α^k гладкие замкнутые поверхности, лежащие соответственно в областях D_i, D_{eh} и T_α и такие, что при $k \to \infty$ $\Gamma^k \to \Gamma$, $\Gamma_h^k \to \Gamma_h$, а L_α^k приближается к границе области T_α. Тогда из формулы (28), учитывая равенства (29) и (30), интегрированием по частям получим, что для любой функции $\zeta \in W_2^1(D)$

$$\lim_{k \to \infty} \left(\int\limits_{\Gamma^k} - \int\limits_{\Gamma_h^k} + \sum_\alpha \int\limits_{L_\alpha^k} \right) \frac{\partial w_1}{\partial n} \zeta \, dS = \int\limits_{S_h} \psi_h \zeta \, dS - \int\limits_{S} \psi \zeta \, dS, \tag{31}$$

где на всех поверхностях выбрана внешняя нормаль.

Таким образом, функция w_1 имеет нулевую нормальную производную на F, а на S и S_h имеет скачки нормальной производной, равные ψ и ψ_h в смысле (31).

Покажем теперь, что w_1 стремится к нулю в метрике $D(u, u)$ при $h \to 0$. Так как $H(w_1) = \min\limits_{u \in W_2^1(D)} H(u)$, то $H(w_1) \leqslant 0$. Отсюда, пользуясь неравенствами (27), получаем

$$D(w_1, w_1) - 2\varepsilon \sqrt{D(w_1, w_1)} \leqslant 0$$

и, значит, $D(w_1, w_1) \leqslant 4\varepsilon^2$, где $\varepsilon = C\left(\sqrt{S} + \sqrt{S_h} + \sqrt{\frac{T}{h}}\right)$.

Из определения h-емкости (формулы (3), (4) и условия 4) теоремы 1 следует, что $S \to 0$ при $h \to 0$ (см. приложение п. 2). Отсюда, очевидно, вытекают равенства $(S_h = o(1)$ и $T = o(h)$ при $h \to 0$ и, следовательно,

$$D(w_1, w_1) \to 0 \text{ при } h \to 0. \tag{32}$$

Перейдем к построению функции w_2. Для этого рассмотрим в области D множество функций, одновременно принадлежащих пространствам $W_2^1(D_i)$, $W_2^1(D_{eh})$ и $W_2^1(T_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$. Из этого множества выделим класс функций $\Omega(D)$ таких, что разности их предельных значений на S_α и $S_{h\alpha}$ равны соответственно $-q$ и $-q_h$. (Предельные значения функций понимаются в смысле L^2. Дальше будет показано, что $\Omega(D)$ не пусто). Из теорем вложения следует, что множество $\Omega(D)$ замкнуто в метрике

$$D(u, u) = \left(\int\limits_{D_i} + \int\limits_{D_{eh}} + \sum_\alpha \int\limits_{T_\alpha} \right) [(\nabla u)^2 + \lambda^2 u^2] \, d\tau. \tag{33}$$

Будем минимизировать функционал (33) в классе функций $\Omega(D)$. Пусть $\{u_k\}$ — минимизирующая последовательность, т. е. $\lim\limits_{k \to \infty} D(u_k, u_k) = \inf\limits_{u \in \Omega(D)} D(u, u)$. Обычным способом [4] легко показать, что последовательность $\{u_k\}$ сходится в метрике $D(u, u)$ к функции $w_2 \in \Omega(D)$, причем для любой функции $\zeta \in W_2^1(D)$ имеет место равенство

$$D(w_2, \zeta) = 0. \tag{34}$$

Полагая здесь $\zeta \equiv 0$ всюду, кроме одной из областей D_i, D_{eh} или T_α, получаем соответственно равенства

$$\int [(\nabla w_2, \nabla \zeta) + \lambda^2 w_2 \zeta]\, d\tau = 0,$$

где интегрирование ведется по D_i, D_{eh} или T_α. Отсюда, как известно, следует, что в каждой из этих областей функция w_2 удовлетворяет уравнению

$$\Delta w_2 - \lambda^2 w_2 = 0. \tag{35}$$

Теперь, учитывая это уравнение, из равенства (34) интегрированием по частям получаем

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int\limits_{\Gamma^k} - \int\limits_{\Gamma_h^k} + \sum_\alpha \int\limits_{L_\alpha^k}\right) \frac{\partial w_2}{\partial n} \zeta dS = 0, \tag{36}$$

где $\zeta \in W_2^1(D)$, Γ^k, Γ_h^k, L_α^k — те же поверхности, что и в (31).

Таким образом, функция w_2 имеет нулевую нормальную производную на F и не имеет скачков нормальной производной при переходе через S и S_h в смысле (36).

Покажем теперь, что w_2 в метрике $D(u, u)$ стремится к нулю при $h \to 0$. Из доказательства также будет следовать, что множество $\Omega(D)$ не пусто.

Прежде всего заметим, что функции q и q_h, заданные на множествах S и S_h и удовлетворяющие там неравенствам (11′) и (25), в силу условия 2) теоремы 1 можно продолжить на поверхность Γ и соответственно Γ_h так, чтобы эти неравенства выполнялись уже на всей Γ и всей Γ_h (см. приложение п. 3). Обозначим продолженные функции через $\bar{q}$ и $\bar{q}_h$. На множестве функций, заданных на поверхности, введем норму

$$\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \left\{\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \frac{|u(x_2) - u(x_1)|^2}{|x_2 - x_1|^3} dS_{x_2} dS_{x_1}\right\}^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{L^2(\Gamma)}$$

и обозначим полученное пространство функций через $W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Покажем, что продолженная функция $\bar{q}(x) \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ и стремится к нулю в метрике $W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ при $h \to 0$.

Действительно, в силу неравенств (11′) и (25), справедливых и для продолженной функции $\bar{q}(x)$, имеем

$$\|\bar{q}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant \left\{C \frac{h^{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon_1)}}{h^{1-\varepsilon_1}} \int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \frac{|x_2 - x_1|^{1+\varepsilon_1} |\ln|x_2 - x_1||^{1+\varepsilon_1}}{|x_2 - x_1|^3} dS_{x_2} dS_{x_1}\right\}^{\frac{1}{2}} + \|\bar{q}\|_{L^2(\Gamma)},$$

откуда, выбирая $0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, получаем

$$\|\bar{q}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = o\left\{\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \frac{|\ln|x_2 - x_1||^{1+\varepsilon_1}}{|x_2 - x_1|^{2-\varepsilon_1}} dS_{x_2} dS_{x_1}\right\}^{\frac{1}{2}} + \|\bar{q}\|_{L^2(\Gamma)} = o(1) \text{ при } h \to 0. \tag{37}$$

Точно таким же образом, вводя пространство функций $W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$, показываем, что $q_n \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$, причем

$$\|\bar{q}_h\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)} = o(1) \text{ при } h \to 0, \tag{37′}$$

Теперь воспользуемся известными теоремами вложения [5],

$$W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \leftrightarrow W_2^1(D_i),$$
$$W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \leftrightarrow W_2^1(D_{eh}).$$

Из этих теорем следует, что функции $\bar{q} \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ и $\bar{q}_h \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$ можно продолжить соответственно в области D_i и D_{eh} так, что их продолжения $\tilde{q} \in W_2^1(D_i)$ и $\tilde{q}_h \in W_2^1(D_{eh})$, причем в силу (37) и (37′)

$$\left.\begin{aligned} \|\tilde{q}\|_{W_2^1(D_i)} &= o(1) \\ \|\tilde{q}_h\|_{W_2^1(D_{eh})} &= o(1) \end{aligned}\right\} \quad \text{при } h \to o. \tag{38}$$

Построив такие продолжения, рассмотрим функцию

$$q_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in T_\alpha \\ -\tilde{q}(x) & x \in D_i \\ -\tilde{q}_h(x) & x \in D_{eh}. \end{cases}$$

Легко видеть, что $q_1(x) \in \Omega(D)$ (т. е. множество $\Omega(D)$ не пусто) и в силу (38)

$$D(q_1, q_1) = o(1) \quad \text{при } h \to 0.$$

Отсюда, вспоминая, что $D(w_2, w_2) = \min\limits_{u \in \Omega(D)} D(u, u)$, получаем

$$D(w_2, w_2) \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{39}$$

Возвращаясь к функции w, в силу формул (8′), (32), (39) имеем

$$D(w, w) \to 0 \quad \text{при } h = 0.$$

Откуда, учитывая, что в областях D_i и D_{eh} w удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (формулы (8′), (29), (35)), нетрудно показать, что w стремится к нулю равномерно в любой области, находящейся на положительном расстоянии от поверхности Г.

§ 4. Окончание доказательства теоремы 1

Объединяя результаты § 1 и § 2, легко проверить, что функция $G(x, y; k)$, определяемая формулой (8), является функцией Грина задачи (1)—(2). Действительно, из формул (5), (23), (29), (30) и (35) следует, что $G(x, y; k)$ в областях D_{eh} и T_α удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, а в области D_i уравнению (1′). Далее, как видно из построения функции w, предельные значения $G(x, y; k)$ на множествах S и S_h совпадают в смысле $L^2(S)$ и $L^2(S_h)$. Наконец, в силу формул (5), (19), (21), (31) и (36) имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int\limits_{\Gamma^k} - \int\limits_{\Gamma_h^k} + \sum_\alpha \int\limits_{L_\alpha^k}\right)\frac{\partial G}{\partial n}\zeta dS = 0,$$

где $\zeta \in W_2^1(D)$; Γ^k, Γ_h^k и L_α^k — те же поверхности, что и в формулах (31), (36).

Пользуясь указанными свойствами функции $G(x, y; k)$, нетрудно показать (например, таким же способом, как при доказательстве теоремы о стирании особенностей гармонической функции), что $G(x, y; k)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и в точках множеств S и S_h, и для нее выполняется граничное условие на F в смысле (2′). Теперь из формул (5), (17), (3) и (39) следует, что функция

$$q(x, y; k) = G(x, y; k) - \frac{e^{-k|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

принадлежит пространству $W_2^1(D) \cap W_2^2$*(лок) и удовлетворяет в* D однородному уравнению Гельмгольца.

Таким образом, обосновывая формулу (8), мы попутно доказываем существование функции Грина задачи (1)—(2).

Так как $w \to 0$ при $h \to 0$ равномерно в любой области, находящейся на положительном расстоянии от Г, то из формул (8), (5) и леммы 1 следует, что при достаточно малых h функция Грина $G(x, y; k)$ задачи (1)—(2) близка (равномерно в любой области, отстоящей на положительном расстоянии от Г) к функции

$$Q_1(x, y; k) = \begin{cases} G_i(x, y; k) + \int\limits_S G_i(x, \xi; k)\varphi(\xi)\,dS_\xi & x \in D_i \\ -\int\limits_S G_e(x, \xi; k)\varphi(\xi)\,dS_\xi & x \in D_e, \end{cases}$$

где G_i и G_e — функции Неймана для областей D_i D_e, а $\varphi(x)$ — решение уравнения (6). Поведение функций Q_1 при $h \to 0$, когда выполняется условие 4) теоремы 1, было исследовано в работе [2]. Там было показано, что Q_1 стремится к функции, удовлетворяющей всюду вне поверхности Г уравнению (1′), а на Г граничным условиям (2′). Следовательно, функция Грина $G(x, y; k)$ задачи (1)—(2) в пределе удовлетворяет тем же условиям.

Теорема 1 доказана.

Вычисление функции f, входящей в граничные условия, представляет некоторую трудность, так как нужно знать h-емкость множества S. Поэтому мы укажем здесь один частный случай, когда f выражается через геометрические параметры каналов T_α.

Пусть кроме условий теоремы 1 выполняется еще одно:

$$5)\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \max_\beta \sum_{\substack{\alpha\neq\beta \\ r_{\alpha\beta}<\rho}} \frac{S_\alpha^{(n)}}{h^{(n)} r_{\alpha\beta}^{(n)}} = \delta(\rho) \quad \text{и} \quad \delta(\rho) \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Тогда

$$f(x) = (m(x), n(x))^2 \lim_{\rho\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{x,\rho} S_\alpha^{(n)}}{h^{(n)}\pi\rho^2}, \tag{40}$$

где сумма $\sum\limits_{(x,\rho)}$ распространена на те S_α, которые попали в шар радиуса ρ с центром в точке $x \in Г$.

Действительно, так как $d = O(h^{2+\varepsilon})$, то из определения h-емкости (формулы (3), (4)) получаем

$$C_h(S_\alpha) \sim (m(x_\alpha), n(x_\alpha))^2 \frac{S_\alpha}{h} \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{41}$$

где x_α — произвольная точка множества S_α. Поэтому условие 5) можно переписать в виде

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\max_{\beta}\sum_{\substack{\alpha\neq\beta\\ r_{\alpha\beta}<\rho}}\frac{C_h(S_\alpha^{(n)})}{r_{\alpha\beta}^{(n)}}\to 0 \quad \text{при} \quad \rho\to 0,$$

откуда согласно теореме 2 работы [2] следует, что условие 4) теоремы 1 настоящей работы эквивалентно условию

$$f(x)=\lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{(x,\rho)}C_h(S_\alpha^{(n)})}{\pi\rho^2},$$

а, значит, в силу (41) и условию (40), что и требовалось доказать.

Приведем два простых примера, в первом из которых выполняется условие 5) и, значит, $f(x)$ можно вычислить по формуле (40), а во втором — формула (40) и условие 4) теоремы 1 дают разные значения $f(x)$. Из этого примера будет следовать, что $f(x)$, вообще говоря, не выражается формулой (40).

1. В плоской плите толщины h проделаны круглые каналы диаметра $d=h^{2+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$. Оси каналов проходят через узлы квадратной сети со стороной $l=h^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$ перпендикулярно плоскости плиты.

Условия 1), 2), 3) теоремы 1, очевидно, выполняются. Проверим выполнимость условия 5),

$$\sum_{\substack{\alpha\neq\beta\\ r_{\alpha\beta}<\rho}}\frac{S_\alpha}{hr_{\alpha\beta}}\sim\frac{\pi d^2}{4h}\sum_{0<l\sqrt{m^2+n^2}<\rho}\frac{1}{l\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{\pi}{4}\sum_{0<l\sqrt{m^2+n^2}<\rho}\frac{l^2}{l\sqrt{m^2+n^2}}\sim\pi^2\rho$$

$$(l=h^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\to 0).$$

Таким образом, $\delta(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$ и, следовательно, $f(x)$ вычисляется по формуле (40). Имеем при $h\to 0$

$$\sum_{(x,\rho)}S_\alpha\sim\frac{\pi\rho^2}{l^2}\cdot\frac{\pi d^2}{4},$$

и, значит, $f(x)=\frac{\pi}{4}$.

2. На такой же плоской плите толщины h выделяем круги K_i радиуса $R=h^\theta$ $(\theta\leqslant 1)$ с центрами в узлах квадратной сети с размером ячейки $l=h^{\frac{\theta}{2}}$. Каждый такой круг покроем более мелкой квадратной сетью с размером ячейки $l_1=2h^{2+\varepsilon}$, и в узлах этой сети проведем круги S_α радиуса $\frac{1}{2}h^{2+\varepsilon}$. Эти круги и примем за основания каналов, которые проделываются в плите.

Очевидно, условия 1), 2), 3) теоремы 1 выполняются, а условие 5) — нет. Введем обозначение: $\overline{S}_i=\bigcup\limits_{\alpha}S_\alpha\,(S_\alpha\subset K_i)$, и оценим $C_h(\overline{S}_i)$. Интегрируя равенство (4) по множеству $\overline{S}_i$ и пользуясь формулой (3), получаем

$$C_h(\overline{S}_i)=\frac{\overline{S}_i}{h+\delta}, \tag{42}$$

где $\delta = \int\limits_{\bar{S}_i} \frac{dS_x}{|x-y^*|}$ $(y^* \in \bar{S}_i)$. Так как $\bar{S}_i = \frac{\pi^2}{16} h^{2\theta}$, то имеет место оценка

$$\frac{\pi^2}{16} h^\theta < \delta < h^\theta. \tag{42'}$$

Из (42) и (42′) следует, что плотность h-емкости $f(x)$ (4) в этом случае можно вычислять как плотность суммы h-емкостей множеств $\bar{S}_i$, т. е.

$$f(x) = \lim_{\rho\to 0} \lim_{h\to 0} \frac{\sum\limits_{(x,\rho)} C_h(\bar{S}_i)}{\pi\rho^2}. \tag{43}$$

Действительно,

$$\delta(\rho) = \sum_{\substack{i\neq j\\ r_{ij}<\rho}} \frac{C_h(\bar{S}_i)}{r_{ij}} \sim \sum_{0<l\sqrt{m^2+n^2}<\rho} \frac{\bar{S}_i}{(h+\delta)\, l\sqrt{m^2+n^2}} \sim \frac{\pi^3}{4\delta_1}\rho \quad \left(\frac{\pi^2}{16} < \delta_1 < 1\right),$$

т. е. $\delta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, и, следовательно, согласно теореме (2) работы [2] формулы (4) и (43) эквивалентны, причем

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{16\delta_1} & \theta < 1 \\ \dfrac{\pi^2}{16(1+\delta_1)} & \theta = 1. \end{cases}$$

В то же время из (42) и (42′) следует, что формулы (40) и (43) в данном случае дают разные результаты.

В заключение авторы выражают благодарность проф. В. А. Марченко за постановку задачи и помощь в работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь будут доказаны некоторые утверждения, которыми мы пользовались в работе.

1. Докажем лемму 1.

Представим функцию Неймана $G_e(y, x)$ (для краткости зависимость от λ не указываем) в виде потенциала двойного слоя:

$$G_e(y, x) = \frac{e^{-\lambda|y-x|}}{4\pi|y-x|} - \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_\eta} \frac{e^{-\lambda|y-\eta|}}{|y-\eta|} \psi_e(\eta, x)\, dS_\eta \quad (\lambda \geqslant 0, x \in D_e \cup \Gamma. \tag{44}$$

Функция, стоящая в правой части равенства (44), удовлетворяет по y однородному уравнению Гельмгольца в области D_i, и в силу свойств потенциала двойного слоя ее нормальные производные с внутренней и внешней стороны Γ совпадают между собой и равны нулю (так как G_e — функция Неймана). Следовательно, $G_e(y, x) \equiv 0$ при $y \in D_i$, откуда, учитывая, что скачок потенциала двойного слоя равен плотности слоя $\psi_e(\eta, x)$, получаем $\psi_e(\eta, x) = G_e(\eta, x) = G_e(x, \eta)$, $\eta \in \Gamma$, $x \in D_e \cup \Gamma$.

Таким образом, имеем

$$\frac{e^{-\lambda|y-x|}}{4\pi|y-x|} - \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_\eta} \frac{e^{-\lambda|y-\eta|}}{|y-\eta|} G_e(x, \eta)\, dS_\eta = 0 \text{ при } y \in D_i.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $y \to \xi \in \Gamma$ и пользуясь формулами для предельных значений потенциала двойного слоя, получим интегральное уравнение для $G_e(x, \xi)$

$$G_e(x, \xi) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda|\xi-\eta|}}{|\xi-\eta|^2}(\lambda|\xi-\eta|-1)\cos(\xi, \eta)\, G_e(x, \eta)\, dS_\eta = -\frac{e^{-\lambda|\xi-x|}}{8\pi^2|\xi-x|}, \quad (45)$$

(ξ, η) — угол между внешней нормалью $n(\eta)$ и вектором $\vec{\eta} - \vec{\xi}$.

Аналогичным образом получаем уравнение для функции

$$G_{eh}(x', \xi') \quad (\xi' \leftrightarrow \xi \text{ и } x' \leftrightarrow x \text{ при } x \in \Gamma \text{ и } x' = x \text{ при } x \in D_{eh})$$

$$G_{eh}(x', \xi') - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_h} \frac{e^{-\lambda|\xi'-\eta'|}}{|\xi'-\eta'|^2}(\lambda|\xi'-\eta'|-1)\cos(\xi', \eta')\, G_e(x'\ \eta')\, dS_{\eta'} =$$
$$= -\frac{e^{-\lambda|\xi'-x'|}}{8\pi^2|\xi'-x'|}. \quad (45')$$

Нетрудно проверить, что уравнения (45) и (45′) разрешимы при всех h и $\lambda \geqslant 0$.

Введем на поверхности Г некоторую координатную сеть u, v. Очевидно,

$$\vec{\xi}'(u, v) = \vec{\xi}(u, v) + \boldsymbol{m}(u, v)\, l(u, v), \quad (46)$$

где $\boldsymbol{m}(u, v)$ — вектор $\boldsymbol{m}(\xi)$, $l(u, v) = |\xi' - \xi|$.

Имеют место равенства

$$l(u, v) = \frac{h}{(\boldsymbol{m}(\xi), \boldsymbol{n}(\xi))}(1 + h\chi(u, v)),\ \chi_u(u, v) < C,\ \chi_v(u, v) < C, \quad (46')$$

и если поверхность Г дважды дифференцируема и вторые производные удовлетворяют условию Липшица, то

$$\cos(\xi', \eta') = \cos(\xi, \eta) + |\xi - \eta|\, O(h). \quad (47)$$

Эти соотношения нетрудно доказать, пользуясь соответствующим рисунком.

Из (46), (46′) и регулярности векторного поля $m(\xi)$ вытекает, что

$$|\xi' - x'| = |\xi - x|(1 + O(h)) \quad h \to 0 \quad (48)$$

и якобиан

$$D_h(\eta) = \frac{|\vec{\eta}'_u \times \vec{\eta}'_v|}{|\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}_v|} = 1 + O(h) \quad h \to 0. \quad (49)$$

Пользуясь формулами (47), (48) и (49), интегральное уравнение (45′) преобразуем к виду

$$G_{eh}(x, \xi) + \int\limits_{\Gamma} \{K_1(\xi, \eta) + hK_2(\xi, \eta, h)\}\, G_{eh}(x, \eta)\, dS_\eta = f_1(\xi, x) + hf_2(\xi, x, h),$$

где $K_1(\xi, \eta)$ и $f_1(\xi, x)$ — ядро и правая часть уравнения (45), а $K_2(\xi, \eta, h)$ и $f_2(\xi, x, h)$ — непрерывные функции соответственно при $\xi \neq \eta$ и $\xi \neq x$, причем имеют место оценки

$$|K_1(\xi, \eta)| < \frac{C}{|\xi - \eta|}; \quad |K_2(\xi, \eta, h)| < \frac{C}{|\xi - \eta|} \quad (50)$$

и

$$|f_1(\xi, x)| < \frac{C}{|\xi - x|}; \quad |f_2(\xi, x, h)| < \frac{C}{|\xi - x|}. \quad (51)$$

Обозначим через K_1 и K_2 интегральные операторы в пространстве L_1 с ядрами $K_1(\xi, \eta)$ и $K_2(\xi, \eta, h)$. Тогда, учитывая, что уравнения (45) и (45′) всегда разрешимы, будем иметь

$$G_{eh} = (E - K_1 - hK_2)^{-1}(f_1 + hf_2) = R_1(E - hR_1K_2)^{-1}(f_1 + hf_2) = \\ = R_1f_1 + hR_1f_2 + hR_1Tf_1 + h^2R_1Tf_2, \tag{52}$$

где

$$R_1 = (E - K_1)^{-1}, \quad (E - hR_1K_2)^{-1} = E + hT, \quad T = \sum_0^\infty h^n (R_1K_2)^{n+1}$$

(этот ряд при малых h сходится по норме в L_1).

Как известно из теории Фредгольма,

$$R_1 = (E - K_1)^{-1} = E + R, \tag{53}$$

причем ядро $R(\xi, \eta)$ интегрального оператора R в силу первого неравенства (50) имеет оценку

$$|R(\xi, \eta)| < \frac{C}{|\xi - \eta|},$$

а, следовательно, в силу второго неравенства (50) такую же оценку имеет и ядро оператора T. Поэтому, учитывая, что $G_e = R_1f_1$, из (52), (53) и (51) получаем:

$$|R_{eh}(\xi', x') - R_e(\xi, x)| < \frac{Ch}{|\xi - x|},$$

что и требовалось доказать.

2. Разобьем поверхность Γ на куски Γ_i диаметра $q_i \leqslant q$. Согласно лемме 3 работы [6] из условия 4) теоремы 1 следует, что при достаточно большом n

$$C_h^{(n)}(S \cap \Gamma_i) \leqslant C \operatorname{mes} \Gamma_i, \tag{54}$$

где C не зависит от Γ_i.

Поделив равенство (4) на $h(x)$, проинтегрируем его по множеству $S \cap \Gamma_i$. Тогда в силу (3) получим

$$C_h(S \cap \Gamma_i)\left(1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{S \cap \Gamma_i} \frac{dS_x}{|x - \xi^*|\, h(x)}\right) = \int\limits_{S \cap \Gamma_i} \frac{dS_x}{h(x)},$$

где

$$h(x) = \frac{h}{(\boldsymbol{m}(x), \boldsymbol{n}(x))^2}, \quad (\boldsymbol{m}(x), \boldsymbol{n}(x)) > \theta > 0, \quad \xi^* \in S \cap \Gamma_i.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{mes}(S \cap \Gamma_i) \leqslant C(h + q)\, C_h(S \cap \Gamma_i),$$

и, значит, в силу (54)

$$\operatorname{mes} S = \sum_i \operatorname{mes}(S \cap \Gamma_i) \leqslant C(h + q)\sum_i C_h(S \cap \Gamma_i) \leqslant C(h + q) \operatorname{mes} \Gamma.$$

Так как q можно выбрать сколь угодно малым, а $h \to 0$ при $n \to \infty$, то $\operatorname{mes} S \to 0$ при $h \to \infty$, что и требовалось доказать.

3. Погрузим каждое множество S_α в множество Γ_α так, чтобы Γ_α не пересекались и граница S_α отстояла от границы Γ_α на расстоянии $\rho \geqslant ch^{2+\varepsilon}$. Это можно сделать в силу условий 2) и 3) теоремы 1. Сделаем преобразование координат в окрестности каждого множества S_α так, чтобы Γ_α стало плоским. Для простоты будем считать, что образ $\hat{S}_\alpha$ множества S_α при таком преобразовании звездный относительно некоторой точки $x_\alpha \in \hat{S}_\alpha$,

так что лучи, идущие из x_α, пересекают границу S_α только в одной точке и притом образуют с касательными к границе $\hat{S}_\alpha$ угол θ, отличный от нуля. На множестве $\hat{S}_\alpha$ определена функция $\hat{q}_\alpha(x)$, полученная преобразованием $q(x)$ и, следовательно, в виду малости преобразования удовлетворяющая условиям (11′) и (25). Доопределим ее на $\hat{\Gamma}_\alpha \setminus \hat{S}_\alpha$, полагая $\tilde{q}_\alpha(x) = \tilde{q}_\alpha(x_s)$, где x_s — точка пересечения луча, идущего из точки x_α в точку $x \in \hat{\Gamma}_\alpha \setminus \hat{S}_\alpha$ с границей $\hat{S}_\alpha$. Легко видеть, что функция $\hat{q}_\alpha(x)$ всюду на $\hat{\Gamma}_\alpha$ удовлетворяет условиям (11′) и (25).

Рассмотрим функцию

$$\chi_\alpha(x) = \frac{\rho(x, C\hat{\Gamma}_\alpha)}{\rho(x, C\hat{\Gamma}_\alpha) + \rho(x, \hat{S}_\alpha)},$$

где $C\hat{\Gamma}_\alpha$ — дополнение $\hat{\Gamma}_\alpha$ до всей плоскости, $\rho(x, \hat{S}_\alpha)$ и $\rho(x, C\hat{\Gamma}_\alpha)$ — расстояние от x до $\hat{S}_\alpha$ и $C\hat{\Gamma}_\alpha$ соответственно. Очевидно, $\chi_\alpha(x) \leqslant 1$, $\chi_\alpha(x) = 1$ при $x \in \hat{S}_\alpha$, и $\chi_\alpha(x) = 0$ при $x \in C\hat{\Gamma}_\alpha$.

Кроме того, учитывая, что расстояние между $C\hat{\Gamma}_\alpha$ и $\hat{S}_\alpha$ $\rho_\alpha \geqslant Ch^{2+\varepsilon}$, нетрудно получить

$$|\chi_\alpha(x_2) - \chi_\alpha(x_1)| \leqslant \frac{C}{h^{2+\varepsilon}} |x_2 - x_1|.$$

Отсюда следует, что функция

$$\tilde{\tilde{q}}_\alpha(x) = \chi_\alpha(x)\, \tilde{q}_\alpha(x)$$

обращается в нуль на $C\hat{\Gamma}_\alpha$ и равна $\hat{q}_\alpha(x)$ на S_α и на всей плоскости удовлетворяет условиям (11′) и (25). Обратным преобразованием получаем функцию $\bar{q}_\alpha(x)$ на Γ, равную $q_\alpha(x)$ на S_α и обращающуюся в нуль вне Γ_α, а так как преобразование в окрестности Γ_α близко к тождественному, то условия (11′) и (25) выполняются всюду.

Учитывая, что области Γ_α не пересекаются, теперь заключаем, что функция $\bar{q}(x) = \sum_\alpha \bar{q}_\alpha(x)$ обладает требуемыми свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, Г. В. Сузиков. Вторая краевая задача в областях со сложной границей. «Матем. сб.», т. 69 (111) : 1, 35—60, 1966.

2. Г. В. Сузиков, Е. Я. Хруслов. Об усредненном граничном условии для задачи диффузии в области с кусочно-полупроницаемой границей. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», в. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

3. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. «Матем. сб.», 65 (107) : 3, 468—472, 1964.

4. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, Л., 1950.

5. С. М. Никольский. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных. УМН 16, 5, 63—114, 1961.

6. Е. Я. Хруслов. Первая краевая задача в областях со сложной границей. «Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ и ХМО», т. 32. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.

Поступила 10 ноября 1966 г.