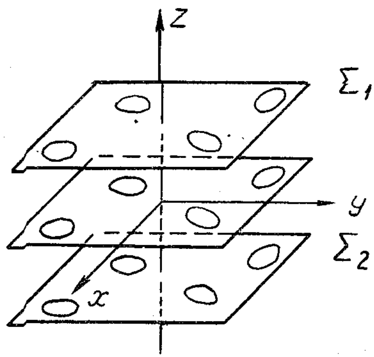
ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Г. Н. Гестрин, Д. Ш. Лундина, В. А. Марченко

В работе [1] изучено поведение функции Грина второй краевой задачи для уравнения Гельмгольца в областях, ограниченных замкнутыми изрешеченными поверхностями при неограниченном увеличении числа отверстий и стремлении к нулю их диаметров.

Представляет интерес случай, когда граница состоит из нескольких таких поверхностей, причем наряду с измельчением дырок происходит сближение самих поверхностей. Один пример такого рода и является предметом настоящей статьи.

Хотя в рассмотрении этого примера используются средства, неприменимые к общей задаче (фактические выражения для функции Грина в полупространстве и полосе, преобразования Фурье), на нем достаточно четко выясняется характерная особенность многослойной границы. Сложность взаимодействия отдельных слоев между собой проявляется в необходимости ввести обобщенные емкости, с помощью которых формулируется окончательный результат. Подобные обобщения понятия емкости встречаются и в других родственных задачах, например, при исследовании прохождения звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое, проведенном Г. В. Сузиковым и Е. Я. Хрусловым в работах [2] и [3].



Приведем некоторые из употребляющихся ниже обозначений.

Плоскости, несущие отверстия, будем считать параллельными плоскости $z=0$ и симметричными относительно нее. Они обозначаются в дальнейшем через $\sum_1$ и $\sum_2$. Расстояние между $\sum_1$ и $\sum_2$ примем равным h. Через S_1, S_2 и S обозначим совокупности отверстий в $\sum_1$ и $\sum_2$ и их проекцию на плоскость $z=0$ соответственно (рис. 1).

Множество S предполагается ограниченным, а края отверстий — спрямляемыми кривыми. В области $D=R_3\diagdown(\sum_1\diagdown S_1 U \sum_2\diagdown S_2)$, дополняющей множество $\sum_1\diagdown S_1 U\sum_2\diagdown S_2$ до всего пространства R_3, рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(P)-\lambda^2 u(P)=\varphi(P);\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{\Sigma_1\diagdown S_1}=\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{\Sigma_2\diagdown S_2}=0. \qquad (1)$$

Мы будем изучать функцию Грина этой задачи $G_h(P, Q, \lambda)$ с источником в точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$, $\left(\zeta > \frac{h}{2}\right)$. Точное определение функции $G_h(P, Q, \lambda)$ и доказательство ее существования имеются, например, в работе [1].

Полную формулировку результата мы дадим ниже. Сейчас отметим только, что при определенном способе измельчения отверстий S_1 и S_2 и $h \to 0$ функция Грина $G_h(P, Q, \lambda)$ стремится к предельной функции, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца при $z > 0$ всюду кроме точки Q и при $z < 0$ и некоторым соотношениям при $z = 0$. Наша цель и состоит в отыскании условий, при которых это имеет место, и самих соотношений, которым удовлетворяет предельная функция при $z = 0$.

§ 1. Основные интегральные уравнения и вспомогательные оценки

Обозначим через $G_h^+(P, Q, \lambda)$ и $G_h^-(P, Q, \lambda)$ и $\overset{\circ}{G}_h(P, Q, \lambda)$ функции Грина задачи Неймана в полупространствах $z > \frac{h}{2}$, $z < -\frac{h}{2}$ и в полосе $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$. Они выражаются следующими формулами:

$$G_h^+(P, Q, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{\rho^2+(z-\zeta)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z-\zeta)^2}} + \frac{e^{-\lambda\sqrt{\rho^2+(z+\zeta-h)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z+\zeta-h^2)}}\right),$$

$$G_h^-(P, Q, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{\rho^2+(z-\zeta)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z-\zeta)^2}} + \frac{e^{-\lambda\sqrt{\rho^2+(z+\zeta+h)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z+\zeta+h)^2}}\right),$$

$$\overset{\circ}{G}_h(P, Q, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{\rho^2+(z-2nh-\zeta)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z-2nh-\zeta)^2}} + \frac{e^{-\lambda\sqrt{\rho^2+(z-(2n-1)h+\zeta)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z-(2n-1)h+\zeta)^2}}\right),$$

$$\text{где } \rho = \sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2}.$$

Положим

$$\left.\frac{\partial G_h}{\partial z}\right|_{S_1} = X_h(P, Q); \quad \left.\frac{\partial G_h}{\partial z}\right|_{S_2} = Y_h(P, Q).$$

В соответствии с этими обозначениями мы имеем следущие легко проверяемые представления:

$$G_h(P, Q, \lambda) = \begin{cases} G_h^+(P, Q, \lambda) - \iint\limits_{S_1} G_h^+(P, P', \lambda)\, X_h(P', Q)\, dP', \quad z > \frac{h}{2} \\ \iint\limits_{S_1} \overset{\circ}{G}_h(P, P', \lambda)\, X_h(P', Q)\, dP' - \\ - \iint\limits_{S_2} G_h(P, P', \lambda)\, Y_h(P', Q)\, dP', \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \\ \iint\limits_{S_2} G_h^-(P, P', \lambda)\, Y_h(P', Q)\, dP', \quad z < -\frac{h}{2}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Так как $G_h(P, Q, \lambda)$ непрерывна на S_1 и S_2, то сравнивая при $z = \frac{h}{2}$ и $(x, y) \in S$ первое и второе выражения (1.1), а при $z = -\frac{h}{2}$ и $(x, y) \in S$

второе и третье, получаем интегральные уравнения для $X_h(P, Q)$ и $Y_h(P, Q)$

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}}}{\sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}} = \int_S\int \sum_0^\infty \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(2nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(2nh)^2}} \times$$
$$\times X_h(x', y')\,dx'dy' -$$
$$-\int_S\int \sum_0^\infty \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(2n+1)^2h^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(2n+1)^2h^2}} Y_h(x', y')\,dx'dy', \qquad (1.2)^*$$

$$0 = \int_S\int \sum_0^\infty \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(2nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(2nh)^2}} Y_h(x', y')\,dx'dy' -$$
$$-\int_S\int \sum_0^\infty \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(2n+1)^2h^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(2n+1)^2h^2}} X_h(x', y')\,dx'dy'.$$

Положив

$$X_h - Y_h = Z_h,$$
$$X_h + Y_h = W_h \qquad (1.3)$$

и один раз складывая, а другой раз вычитая равенства (1.2), приходим к следующей паре уравнений для Z_h и W_h:

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}}}{2\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}} = \qquad (1.4)$$
$$= \int_S\int \sum_0^\infty \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}} Z_h(x', y')\,dx'dy',$$

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}}}{2\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}} = \qquad (1.4')$$
$$= \int_S\int \sum_0^\infty (-1)^n \cdot \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}} W_h(x', y')\,dx'dy'.$$

Тот факт, что в уравнениях (1.4) и (1.4)′ неизвестные функции Z_h и W_h разделились, имеет существенное значение.

---

* Здесь и далее точка $Q(\xi, \eta, \zeta)$ в аргументах функций $X_h(P, Q)$ и $Y_h(P, Q)$ опускается.

Так как $X_h = \frac{Z_h + W_h}{2}$, $Y_h = \frac{W_h - Z_h}{2}$, то, подставляя эти выражения в формулы (1.1), находим согласно (2)

$$G_h(P,\ Q,\ \lambda) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta-h)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta-h)^2}}\right) -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2}}\left(Z_h(x',\ y') + W_h(x',\ y')\right)dx'dy',$$

$$\text{при } z > \frac{h}{2} \tag{1.5}$$

$$G_h(P,\ Q,\ \lambda) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2}}\left(W_h(x',\ y') - Z_h(x',\ y')\right)dx'dy'.$$

$$\text{при } z < -\frac{h}{2}\,^{*} \tag{1.5$'$}$$

Покажем теперь, что интегральные члены в (1.5) и (1.5)′, содержащие $Z_h(x',\ y')$ при $h \to 0$, исчезают, как бы ни менялось при этом множество S. Действительно, с одной стороны, переходя к преобразованиям Фурье и применяя последовательно равенство Парсеваля и неравенство Шварца, получим

$$\left|\iint\limits_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z\pm\frac{h}{2}\right)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z\pm\frac{h}{2}\right)^2}} Z_h(x',\ y')\,dx'\,dy'\right| =$$

$$= \left|\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x}\cdot e^{-i\beta y}\,\frac{e^{-\left|z\pm\frac{h}{2}\right|\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\,\tilde{Z}_h(\alpha,\ \beta)\,d\alpha\,d\beta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\left|z\pm\frac{h}{2}\right|\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\,d\alpha\,d\beta\cdot\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\tilde{Z}_h(\alpha,\ \beta)|^2}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\,d\alpha\,d\beta}. \tag{1.6}$$

* Выражение для $G_h(P,\ Q,\ \lambda)$ в полосе $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$ нам не понадобится, и поэтому мы его не выписываем.

С другой стороны, умножая (1.4) на $Z_h(x, y)$ и интегрируя по S, будем иметь

$$\frac{1}{2}\iint_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}} Z_h(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_S Z_h(x, y) \iint_S \sum_0^\infty \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}} Z_h(x', y')\,dx'\,dy'\,dx\,dy,$$

откуда, переходя к преобразованиям Фурье, получим

$$\frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Z}_h(\alpha, \beta) \frac{e^{-i\alpha\xi}\cdot e^{-i\beta\eta} e^{-\left(\xi-\frac{h}{2}\right)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\,d\alpha\,d\beta =$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{Z}_h(\alpha, \beta)|^2 \sum_0^\infty \frac{e^{-nh\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\,d\alpha\,d\beta =$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{Z}_h(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha\,d\beta}{\left(1-e^{-h\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\right)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}.$$

Поэтому

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{Z}_h(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha\,d\beta}{\left(1-e^{-h\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\right)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} \leqslant \frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{Z}_h(\alpha, \beta)|^2 \frac{e^{-\left|\xi-\frac{h}{2}\right|\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} \times$$

$$\times\, d\alpha\,d\beta \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{Z}_h(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta}{\left(1-e^{-h\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\right)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}} \times$$

$$\times \sqrt{\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\left(\zeta-\frac{h}{2}\right)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} \left(1-e^{-h\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\right) d\alpha\,d\beta},$$

или

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{Z}_h(\alpha, \beta)|^2\,d\alpha\,d\beta}{\left(1-e^{-h\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\right)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} \leqslant \frac{1}{4}\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\left(\zeta-\frac{h}{2}\right)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} \left(1-e^{-h\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\right) d\alpha\,d\beta.$$

Так как интеграл в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $h \to 0$ и

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{Z}_h(\alpha, \beta)|^2\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} \leqslant \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{Z}_h(\alpha, \beta)|^2\,d\alpha\,d\beta}{\left(1-e^{-h\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\right)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}},$$

то в силу неравенства (1.6) стремится к нулю и интеграл

$$\iint_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z\pm\frac{h}{2}\right)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z\pm\frac{h}{2}\right)^2}} Z_h(x', y')\,dx'\,dy'$$

равномерно при $z \geqslant \delta$ и при $z \leqslant -\delta$, где δ — произвольное положительное число.

Аналогично из (1,4′) вытекает оценка

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widetilde{W}_h(\alpha, \beta)|^2 d\alpha\, d\beta}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} \leqslant \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\left(\zeta-\frac{h}{2}\right)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\, d\alpha\, d\beta. \tag{1.7}$$

Далее

$$\Bigg|\iint\limits_S \left\{\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}} - \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z\pm\frac{h}{2}\right)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z\pm\frac{h}{2}\right)^2}}\right\} \times$$

$$\times W_h(x', y')\, dx'\, dy'\Bigg| = \Bigg|\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} e^{-i\beta y}\, \frac{e^{-|z|\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} - e^{-\left|z\pm\frac{h}{2}\right|\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} \times$$

$$\times \widetilde{W}_h(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta\Bigg| \leqslant \sqrt{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widetilde{W}_h(\alpha, \beta)|^2\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}} \times$$

$$\times \sqrt{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{-2|z|\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} - e^{-2\left|z\pm\frac{h}{2}\right|\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}|}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\, d\alpha\, d\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \sqrt{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\left|z\pm\frac{h}{2}\right|\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}} \left(1 - e^{-h\sqrt{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}}\right) d\alpha\, d\beta} \to 0 \text{ при } h \to 0. \tag{1.8}$$

Учитывая все это, мы можем переписать (1.5) и (1.5)′ так:

$$G_h(P, Q, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\xi)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right) -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}\, W_h(x', y')\, dx'\, dy' + 0(1) \quad \text{при } z > \frac{h}{2}, \tag{1.9}$$

$$G_h(P, Q, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}\, W_h(x', y')\, dx'\, dy' + 0(1)$$

$$\text{при } z < -\frac{h}{2} \tag{1.9'}$$

Из (1.9) и (1.9′) следует, что поведение функции $G_h(P, Q, \lambda)$ при $h \to 0$ вполне определяется функцией $W_h(x, y)$. В связи с этим в следующем параграфе проводится исследование уравнения (1.4), которому она удовлетворяет.

§ 2. Исследование уравнения (1.4′)

Как уже отмечалось во введении, в [1] доказано существование функции $G_h(P, Q, \lambda)$. Поэтому вопрос о разрешимости уравнения (1.4′) автоматически снимается. Однако рассуждения данного пункта можно рассматривать и как независимое установление этого факта. Основной вывод, который будет здесь получен, заключается в том, что норма функции $W_h(x, y)$ в пространствах L_s^{1*} равномерно ограничена относительно h и S. Попутно мы увидим, что функции $W_h(x, y)$ неотрицательны. Рассмотрим функцию Грина задачи Дирихле для уравнения $\Delta u - \lambda^2 u = 0$ в полосе $0 < z < h$. Она определяется формулой

$$\Gamma(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-(2nh+z'))^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-(2nh+z'))^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-(2nh-z'))^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-(2nh-z'))^2}}\right).$$

Положив здесь $z = z' = \frac{h}{2}$, получим

$$\Gamma\left(x, y, \frac{h}{2}, x', y', \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{4\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(2nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(2nh)^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+((2n-1)h)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+((2n-1)h)^2}}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} +$$
$$+ \frac{2}{4\pi}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}},$$

откуда

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} +$$
$$+ \frac{1}{2}\Gamma\left(x, y, \frac{h}{2}, x', y', \frac{h}{2}\right). \tag{2.1}$$

С другой стороны, функцию Грина можно представить в виде

$$\Gamma(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} -$$
$$- \frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-h)^2}}}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-h)^2}} f_1(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\,d\bar{x}\,d\bar{y} -$$
$$- \frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+z^2}}}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+z^2}} f_2(\bar{x}, \bar{y}\ x', y', h)\,d\bar{x}\,d\bar{y}.$$

Такое представление соответствует расщеплению функции Грина на потенциал, создаваемый единичной массой, расположенной в точке (x', y', z'), и потенциалы, порождаемые непрерывным распределением масс на плоскостях $z = h$ и $z = 0$ с неотрицательными плотностями $f_1(\bar{x}, \bar{y},$

* L_s^1 есть пространство функций, определенных на S и суммируемых $\| W_h \| = \iint_S | W_h | dS$.

$x', y', h)$ и $f_2(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)$. При этом суммарная масса, распределенная на плоскостях, будет меньше единицы:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \{f_1(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h) + f_2(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\}\, d\bar{x}\, d\bar{y} < 1.$$

Формула (2.1) тогда может быть записана в виде

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}} = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+\frac{h^2}{4}}}}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+\frac{h^2}{4}}}\{f_1(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h) +$$

$$+ f_2(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\}\, d\bar{x}\, d\bar{y}. \tag{2.2}$$

Интегральное слагаемое в правой части равенства (2.2) представляет собой потенциал, создаваемый распределением масс с неотрицательной плотностью $\frac{1}{2}\{f_1(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h) + f_2(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\}$ на плоскости $z = \frac{h}{2}$ в точках плоскости $z = 0$.

Согласно известным предложениям теории выметания, сформулированным для ядра $\frac{e^{-\lambda\rho}}{\rho}$ в [1], можно вымести массу на плоскость $z = 0$ таким образом, чтобы в каждой точке этой плоскости значения потенциала остались неизменными.

Новое распределение масс будет снова иметь неотрицательную плотность, а сама масса будет меньше $\frac{1}{2}$. Таким образом, мы получим следующее представление:

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}} = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}}}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}} f(\bar{x}, y, x' \; y', h)\, d\bar{x}\, d\bar{y}. \tag{2.3}$$

Отметим, что плотность распределения $f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)$ легко вычислить фактически, например, с помощью преобразований Фурье.

Поскольку явный вид функции $f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)$ понадобится в следующем параграфе, мы приведем его уже сейчас

$$f(\bar{x}, \bar{y}, x' \; y', h) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot nh\left(\frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{(x'-\bar{x})^2+(y'-\bar{y})^2+(nh)^2}}}{(x'-\bar{x})^2+(y'-\bar{y})^2+(nh)^2} + \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x'-\bar{x})^2+(y'-\bar{y})^2-(nh)^2}}}{[(x'-\bar{x})^2+(y'-\bar{y})^2+(nh)^2]^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{2.4}$$

Возвращаясь к формуле (2.3) и выметая распределенную на всей плоскости $z = 0$ массу на множество S так, чтобы на S значения потенциала, стоящего в правой части этой формулы, не изменились, приходим к следующему представлению в точках $(x, y) \in S$:

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}} =$$

$$= -\iint_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}}}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}} K(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\, d\bar{x}\, d\bar{y} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}, \tag{2.5}$$

причем

$$K(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \iint_S K(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\, d\bar{x}\, d\bar{y} < \frac{1}{2}.$$

Свободный член уравнения (1.4′) представим в виде

$$\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}} = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}}}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}} \times$$

$$\times\, \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \xi, \eta, \zeta)\, d\bar{x}\, d\bar{y}. \tag{2.6}$$

Здесь масса величины $\frac{1}{2}$ выметается из источника $\left(\xi, \eta, \frac{h}{2}-\zeta\right)$ на S, и поэтому

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \xi, \eta, \zeta) \geqslant 0 \text{ и } \iint_S \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \xi, \eta, \zeta)\, d\bar{x}\, d\bar{y} < \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Подставив (2.5) и (2.6) в (1.4′), находим

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}}}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}} \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \xi, \eta, \zeta)\, d\bar{x}\, d\bar{y} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}}}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}} \Big\{W_h(\bar{x}, \bar{y}) -$$

$$- \iint_S K(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\, W_h(x', y')\, dx'\, dy'\Big\}\, d\bar{x}\, d\bar{y},$$

откуда

$$W_h(x, y) - \iint_S K(x, y, x', y', h)\, W_h(x', y')\, dx'\, dy' = \varphi(x, y, \xi, \eta, \zeta, h). \tag{2.8}$$

Обозначим через A интегральный оператор в левой части уравнения (2.8). Из отмеченных выше свойств функции $K(x,y\ x', y', h)$ следует, что в пространстве L_S^1 норма этого оператора не больше $\frac{1}{2}$, и, значит, уравнение (2.8) имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений

$$W_h = (E - A)^{-1}\varphi = \varphi + A\varphi + A^2\varphi + \cdots \tag{2.9}$$

Наконец, так как $\varphi \geqslant 0$ и $K \geqslant 0$, то

$$W_h(x, y) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \|W_h\|_{L_S^1} \leqslant 2\|\varphi\|_{L_S^1} < 1. \tag{2.10}$$

§ 3. Обобщенные емкости

Фундаментальная роль уравнения (1.4′) в нашей задаче дает основания для введения следующего понятия обобщенной емкости множества.

Рассмотрим в соответствии с (1.4′) уравнение

$$\iint_D \sum_0^\infty (-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}\,\varphi(x',\ y')\,dx'\,dy' = 1 \qquad (3.1)$$

$$(x,\ y) \in D.$$

Разрешимость уравнения (3.1) можно установить точно так же, как это было сделано в § 2 для (1.4′). Из тех же соображений выводится и неотрицательность $\varphi(x,\ y)$.

Величину $\iint_D \varphi(x',\ y')\,dx'\,dy'$ назовем c_h-емкостью множества D. Отличие от обычного определения состоит в том, что вместо ядра $\frac{1}{r}$ здесь берется другое ядро.

Лемма. *Пусть* $\omega(p)$ *— произвольное распределение масс в* D *и функция*

$$F(x,\ y) = \iint_D \sum_0^\infty (-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}\,d\omega(x',\ y')$$

непрерывна. Тогда в D *существует точка* $(x_0,\ y_0)$ *такая, что*

$$F(x_0,\ y_0) = \frac{\iint_D d\omega(x',\ y')}{c_h}. \qquad (3.2)$$

Доказательство. Умножим (3.1) на $d\omega(x,\ y)$ и проинтегрируем по D:

$$\iint_D \varphi(x',\ y')\left(\iint_D \sum_0^\infty (-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}\,d\omega(x,\ y)\right)dx'\,dy' =$$

$$= \iint_D d\omega(x',\ y')$$

или

$$\iint_D \varphi(x',\ y')\,F(x',\ y')\,dx'\,dy' = \iint_D d\omega(x',\ y').$$

Так как $\varphi(x',\ y')$ неотрицательна, а $F(x,\ y)$ непрерывна, то

$$\min_D F(x,y)\iint_D \varphi(x,\ y)\,dx\,dy \leqslant \iint_D \varphi(x,y)\,F(x,\ y)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \max_D F(x,\ y)\iint_D \varphi(x,\ y)\,dx\,dy,$$

отсюда

$$\min_D F(x,\ y) \leqslant \frac{\iint_D d\omega(x,\ y)}{c_h} \leqslant \max_D F(x,\ y),$$

откуда и следует требуемое.

Теперь будут даны некоторые оценки обобщенных емкостей через емкости, отвечающие ядру $\frac{e^{-\lambda r}}{r}$.

Пусть D — произвольная область плоскости xoy и $\psi(x, y)$ удовлетворяет в этой области уравнению

$$\iint_D \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\psi(x', y')\,dx'\,dy' = 1. \tag{3.3}$$

Положим

$$\tilde{c} = \iint_D \psi(x, y)\,dx\,dy. \tag{3.4}$$

Так как функция

$$\gamma(x, y, z) = \iint_D \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}\psi(x', y')\,dx'\,dy' \tag{3.5}$$

удовлетворяет во всем пространстве, кроме точек области D, уравнению

$$\Delta\gamma - \lambda^2\gamma = 0, \tag{3.6}$$

стремится к нулю на бесконечности, является положительной ($\psi(x, y) \geqslant 0$) и равна единице на D, то в силу принципа максимума она всюду меньше единицы.

Умножим обе части формулы (2.3) на $\varphi(x', y')\,\psi(x, y)$ и проинтегрируем по области D по точкам (x', y') и (x, y):

$$\iint_D \iint_D \sum_0^\infty (-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(nh)^2}}\varphi(x', y')\,dx'\,dy'\,\psi(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D \iint_D \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\psi(x, y)\,dx\,dy\,\varphi(x', y')\,dx'\,dy' -$$

$$- \iint_D \iint_D \varphi(x', y') \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\,\gamma(\bar{x}, \bar{y}, 0)\,d\bar{x}\,d\bar{y}\,dx'\,dy'\,\psi(x, y)\,dx\,dy.$$

Учитывая (3.1) и (3.3), запишем последнее равенство так:

$$\tilde{c} = c_h - \iint_D \varphi(x', y') \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\,\gamma(\bar{x}, \bar{y}, 0)\,d\bar{x}\,d\bar{y}\,dx'\,dy'. \tag{3.7}$$

Отсюда, с одной стороны, так как все подынтегральные функции неотрицательны, получаем неравенство

$$\tilde{c} \leqslant c_h. \tag{3.8}$$

С другой стороны, заменяя $\gamma(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ единицей и помня, что

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\,d\bar{x}\,d\bar{y} < \frac{1}{2},$$

найдем

$$\tilde{c} \geqslant c_h - \frac{1}{2} c_h = \frac{1}{2} c_h$$

или

$$c_h \leqslant 2\tilde{c}. \tag{3.9}$$

Если подобным же образом воспользоваться формулой (2.2), то получим

$$c_h - \tilde{c} = \frac{1}{2} \iint\limits_D \iint\limits_D \varphi(x', y') \psi(x, y) \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + \frac{h^2}{4}}}}{\sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + \frac{h^2}{4}}} \times$$
$$\times (f_1(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)) + f_2(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy'\, dx\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{h} \iint\limits_D \iint\limits_D \varphi(x', y') \psi(x, y) \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} (f_1(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h) +$$
$$+ f_2(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h))\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy'\, dx\, dy <$$
$$< \frac{1}{h} \iint\limits_D \varphi(x', y')\, dx'\, dy' \iint\limits_D \psi(x, y)\, dx\, dy = \frac{c_h \tilde{c}}{h}.$$

С учетом (3.8) и (3.9) это дает оценку

$$0 \leqslant c_h - \tilde{c} \leqslant \frac{2\tilde{c}^2}{h}. \tag{3.10}$$

Это неравенство полезно при $h \gg c$. Для оценки c_h при $h \ll c$ нам понадобится оценить интеграл

$$\iint\limits_{(\bar{x}-x')^2 + (\bar{y}-y')^2 \geqslant R^2} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y, h)\, d\bar{x}\, d\bar{y}$$

Пользуясь формулой (2.4), получаем

$$\iint\limits_{(\bar{x}-x')^2 + (\bar{y}-y')^2 \geqslant R^2} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\, d\bar{x}\, d\bar{y} =$$
$$= \sum_1^\infty (-1)^{n+1} nh \int\limits_R^\infty \left(\frac{\lambda e^{-\lambda \sqrt{\rho^2 + (nh)^2}}}{\rho^2 + (nh)^2} + \frac{e^{-\lambda \sqrt{\rho^2 + (nh)^2}}}{(\rho^2 + (nh)^2)^{3/2}} \right) \rho\, d\rho =$$
$$= -\sum_1^\infty (-1)^{n+1} nh \int\limits_R^\infty \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{-\lambda \sqrt{\rho^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (nh)^2}} \right) d\rho = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \cdot nh \frac{e^{-\lambda \sqrt{R^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{R^2 + (nh)^2}}. \tag{3.11}$$

В частности, при $R = 0$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\, d\bar{x}\, d\bar{y} = \frac{e^{-\lambda h}}{1 + e^{-\lambda h}}. \tag{3.12}$$

Рассматривая члены последнего ряда как вычеты функции $\dfrac{ze^{-\lambda h\sqrt{\frac{R^2}{h^2}+z^2}}}{\sin\pi z\sqrt{\frac{R^2}{h^2}+z^2}}$ в полюсах 1, 2, 3, ... * находим

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}nh\frac{e^{-\lambda\sqrt{R^2+(nh)^2}}}{\sqrt{R^2+(nh)^2}}=\frac{1}{2i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{ze^{-\lambda h\sqrt{\frac{R^2}{h^2}+z^2}}}{\sin\pi z\sqrt{\frac{R^2}{h^2}+z^2}}dz, \tag{3.13}$$

где интеграл справа берется вдоль мнимой оси, и так как при указанном выборе ветви корень либо чисто мнимый, либо отрицательный, то

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}nh\frac{e^{-\lambda\sqrt{R^2+(nh)^2}}}{\sqrt{R^2+(nh)^2}}\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|\,dx}{|\operatorname{sh}\pi x|\left|\sqrt{\frac{R^2}{h^2}-x^2}\right|}\leqslant\frac{Ah}{R}, \tag{3.14}$$

где A — некоторая не зависящая от h и R константа.

Пусть наряду с (3.3) и (3.4)

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\eta(x',\ y')\,dx'\,dy'=1 \tag{3.15}$$

и

$$c=\iint\limits_{D}\eta(x',\ y')\,dx'\,dy'. \tag{3.16}$$

Умножим обе части формулы (2.3) на $\varphi(x',\ y')\,\eta(x,\ y)$ и снова проинтегрируем по области D по точкам $(x',\ y')$ и $(x,\ y)$

$$c=\iint\limits_{D}\varphi(x,\ y)\iint\limits_{D}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\eta(x',\ y')\,dx'\,dy'\,dx\,dy-$$

$$-\iint\limits_{D}\varphi(x',\ y')\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\bar{x},\ \bar{y},\ x',\ y',\ h)\,\gamma_1(\bar{x},\ \bar{y},\ 0)\,d\bar{x}\,d\bar{y}\,dx'\,dy',$$

где функция

$$\gamma_1(x,\ y,\ z)=\iint\limits_{D}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+z^2}}}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+z^2}}\eta(\bar{x},\ \bar{y})\,d\bar{x}\,d\bar{y}$$

---

* Ветвь функции $\sqrt{\frac{R^2}{h^2}+z^2}$ определяется разрезами, идущими от точек $\pm\frac{iR}{h}$ к $\pm i\infty$ соответственно и положительностью на вещественной оси.

удовлетворяет, очевидно, неравенствам $0 \leqslant \gamma_1(x, y, z) \leqslant 1$. Имеем далее

$$c = \iint_D \iint_D \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \eta(x', y') \varphi(x, y)\, dx'\, dy'\, dx\, dy -$$

$$-\iint_D \iint_D \frac{1-e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \eta(x', y') \varphi(x, y)\, dx'\, dy'\, dx\, dy -$$

$$-\iint_D \varphi(x', y') \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy' +$$

$$+\iint_D \varphi(x', y') \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)(1-\gamma_1(\bar{x}, \bar{y}, 0))\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy' =$$

$$= c_h - \iint_D \iint_D \frac{1-e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \eta(x', y') \varphi(x, y)\, dx'\, dy'\, dx\, dy -$$

$$-\frac{e^{-\lambda h}}{1+e^{-\lambda h}} c_h + \iint_D \varphi(x', y') \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)(1 -$$

$$-\gamma_1(\bar{x}, \bar{y}, 0))\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy'.$$

Мы воспользовались при этом равенством (3.12)

Отсюда в силу неравенства $\gamma_1(\bar{x}, \bar{y}, 0) \leqslant 1$, получим

$$\left| c - \frac{1}{2} c_h \right| \leqslant \frac{1-e^{-\lambda h}}{1+e^{-\lambda h}} c_h + \lambda c_h c +$$

$$+\iint_D \varphi(x', y') \iint_{(\bar{x}-x')^2+(\bar{y}-y')^2 \geqslant R^2} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)(1 -$$

$$-\gamma_1(\bar{x}, \bar{y}, 0))\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy' + \iint_D \varphi(x', y') \iint_{(\bar{x}-x')^2+(\bar{y}-y')^2 \leqslant R^2} f(\bar{x}, \bar{y},$$

$$x', y', h)(1-\gamma_1(\bar{x}, \bar{y}, 0)\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy',$$

где $R > 0$ — пока произвольно.

Третье слагаемое в правой части оценивается на основании (3.14) следующим образом:

$$\iint_D \varphi(x', y') \iint f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)(1-\gamma_1(\bar{x}, \bar{y}, 0))\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Ah}{R} \iint_D \varphi(x', y')\, dx'\, dy' = \frac{Ahc_h}{R}. \tag{3.17}$$

Последнее слагаемое запишем так:

$$\iint_D \varphi(x', y') \iint_{(\bar{x}-x')^2+(\bar{y}-y')^2 \leqslant R^2} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)(1 -$$

$$-\gamma_1(\bar{x}, \bar{y}, 0))\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy' = \iint_D \varphi(x', y') \iint_{(\bar{x}-x')^2+(\bar{y}-y')^2 \leqslant R^2} f(\bar{x}, \bar{y}, x',$$

$$y', h)(1-\gamma_0(\bar{x}, \bar{y}, 0))\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy' + \iint_D \varphi(x', y') \iint f(\bar{x}, \bar{y}, x',$$

$$y', h)(\gamma_0(\bar{x}, \bar{y}, 0) - \gamma_1(\bar{x}, \bar{y}, 0))\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy',$$

где

$$\gamma_0(x, y, z) = \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \eta(x', y')\, dx'\, dy',$$

$$\gamma_0(\bar{x}, \bar{y}, 0) - \gamma_1(\bar{x}, \bar{y}, 0) = \iint\limits_D \frac{1 - e^{-\lambda\sqrt{(\bar{x}-x')^2+(\bar{y}-y')^2}}}{\sqrt{(\bar{x}-x')^2+(\bar{y}-y')^2}} \eta(x', y')\, dx'\, dy' \leqslant$$

$$\leqslant \lambda c \tag{3.18}$$

Поэтому имеем*

$$\iint\limits_D \varphi(x', y') \iint\limits_{(\bar{x}-x')^2+(\bar{y}-y')^2 \leqslant R^2} f(\bar{x}, \bar{y}, x', y', h)(1 -$$

$$- \gamma_1(\bar{x}, \bar{y}, 0))\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, dx'\, dy' \leqslant \lambda c c_h + \max_{d((x,y),D) < R} (1 - \gamma_0(x, y, 0))\, c_h. \tag{3.19}$$

Обозначив величину $\max\limits_{d((x,y),D)<R} (1 - \gamma_0(x, y, 0))$ через $m(R)$, и объединяя оценки (3.17), (3.19), найдем

$$\left|c - \frac{1}{2} c_h\right| \leqslant \frac{1 - e^{-\lambda h}}{1 + e^{-\lambda h}} c_h + 2\lambda c c_h + m(R)\, c_h + \frac{Ahc_h}{R} \leqslant$$

$$\leqslant 2\frac{1 - e^{-\lambda h}}{1 + e^{-\lambda h}} \tilde{c} + 2\lambda c\tilde{c} + 2m(R)\, \tilde{c} + \frac{2Ah\tilde{c}}{R}.$$

Так как для достаточно малой области D всегда справедливо неравенство

$$\tilde{c} < (1 + \lambda)\, c,$$

то для для таких областей будет верна оценка

$$\left|c - \frac{1}{2} c_h\right| \leqslant 2(1 + \lambda)\left(h + \lambda c + m(\mathrm{R}) + \frac{h}{R}\right) c. \tag{3.20}$$

Оценки (3.10) и (3.20) будут использованы при рассмотрении некоторых частных случаев данной задачи.

§ 4. Окончание исследования функции Грина

До сих пор изменение множества S не связывалось с величиной h Теперь будут сделаны необходимые предположения.

Обозначим через D_i^h связные компоненты множества S, через r_{ij}^h — расстояние между D_i^h и D_j^h, через c_h^i — c_h-емкость компоненты D_i^h.

Множество $S = S_h$ при $h \to 0$ подчиним следующим требованиям:

а) диаметры компонент D_i^h равномерно стремятся к нулю при $h \to 0$;

б) функция

$$\delta(\rho) = \varlimsup_{h\to 0} \max \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij} < \rho}} \frac{c_h^i}{r_{ij}^h}$$

стремится к нулю при $\rho \to 0$;

* $d((x, y), D)$ — расстояние от точки (x, y) до области D.

в) существует непрерывная функция $f(P)$ на плоскости xoy такая, что каков бы ни был круг σ этой плоскости

$$\lim_{h\to 0}\sum c_h^i = \iint_\sigma f(P)\,dP.$$

(Суммирование слева распространяется на все связные компоненты множества S_h, содержащиеся строго внутри σ).

Возвратимся к формулам (1.9), (1.9′).

Из неравенств (2.10) следует возможность выбора такой последовательности $h\to 0$, что существует слабый предел функций $W_h(x, y)$, который мы обозначим через $\omega(x, y)$.

Предельный переход в формулах (1.9) и (1.9′) по такой последовательности дает

$$G^+(P, Q, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right) - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}\,d\omega(x', y')$$
$$\text{при } z>0, \tag{4.1}$$

$$G^-(P, Q, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}\,d\omega(x', y') \text{ при } z<0. \tag{4.2}$$

Функции $G^+(P, Q, \lambda)$ и $G^-(P, Q, \lambda)$, очевидно, удовлетворяют уравнению $\Delta u - \lambda^2 u = \delta(P, Q)$ при $z>0$ и $\Delta u - \lambda^2 u = 0$ при $z<0$.

Дальнейшие рассуждения лишь с незначительными изменениями воспроизводят аналогичные места работы [4].

Обращаясь снова к (1.4′), выделим в стоящей справа сумме слагаемое, отвечающее связной компоненте D_i^h. В силу леммы § 3, в некоторой точке (x_i, y_i) это слагаемое представимо в форме

$$\iint\limits_{D_i h}\sum_0^\infty (-1)^n\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_i-x')^2+(y_i-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x_i-x')^2+(y_i-y')^2+(nh)^2}}\,W_h(x', y')\,dx'\,dy' =$$
$$= \frac{\iint\limits_{D_i^h} W_h(x', y')\,dx'\,dy'}{c_h^i}.$$

Подставим в (1.4)′ вместо точки (x, y) точку (x_i, y_i):

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_i-\xi)^2+(y_i-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}}}{2\sqrt{(x_i-\xi)^2+(y_i-\eta)^2+\left(\frac{h}{2}-\zeta\right)^2}} = \frac{\iint\limits_{D_i^h} W_h(x', y')\,dx'\,dy'}{c_h^i} +$$
$$+ \sum_{j\neq i}\iint\limits_{D_j^h}\sum_0^\infty (-1)^n\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_i-x')^2+(y_i-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x_i-x')^2+(y_i-y')^2+(nh)^2}}\,W_h(x', y')\,dx'\,dy', \tag{4.3}$$

так как $W_h \geqslant 0$, то для любого круга σ

$$\sum_{(\sigma)} \iint_{D_i^h} W_h(x', y')\, dx'\, dy' \leqslant \frac{1}{2\left|\frac{h}{2} - \zeta\right|} \sum_{(\sigma)} c_h^i, \tag{4.3'}$$

и в силу условия в)

$$\varlimsup_{h \to 0} \sum_{(\sigma)} \iint_{D_i^h} W_h(x', y')\, dx'\, dy' \leqslant \text{const} \iint_{(\sigma)} f(P)\, dP.$$

Значит, если множество S_h изменяется в соответствии с требованием в), предельное распределение $\omega(x, y)$ окажется абсолютно непрерывным, и, обозначая через $\varphi(x, y)$ его плотность, мы можем переписать (4.1) и (4.2) так:

$$G^+(P, Q, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} + \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-h)^2+(z+\zeta)^2}}\right) - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}} \times$$
$$\times\, \varphi(x', y')\, dx'\, dy', \quad z > 0; \tag{4.4}$$

$$G^-(P, Q, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}\, \varphi(x', y')\, dx'\, dy', \quad z < 0. \tag{4.5}$$

Отсюда сразу вытекает, что при $z = 0$

$$\frac{\partial G^+}{\partial z} = \frac{\partial G^-}{\partial z} = \frac{1}{2}\varphi(x, y) \tag{4.6}$$

во всех точках Лебега функции $\varphi(x, y)$, т. е. почти всюду. Ниже будет показано, что $\varphi(x, y)$ непрерывна, и, значит, (4.6) имеет место всюду при $z = 0$.

Возьмем теперь произвольную точку $P(x_0, y_0)$ на плоскости $z = 0$ и рассмотрим окружность $\sigma(P, \rho)$ радиуса $\rho < 1$ с центром в ней и те D_i^h, которые попадают внутрь этой окружности. Для этих отверстий запишем равенство (4.3) несколько иначе:

$$\frac{\iint_{D_i^h} W_h(x', y')\, dx'\, dy'}{c_h^i} = \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\zeta^2}}}{2\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\zeta^2}} -$$
$$- \sum_{\substack{j \neq i \\ \left(r_{ij}^h \geqslant \rho^{\frac{1}{3}}\right)}} \iint_{D_j^h} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2+(nh)^2}}\, W_h(x', y')\, dx'\, dy' -$$
$$- \alpha_i^h - \beta_i^h - \gamma_i^h; \tag{4.7}$$

где

$$\alpha_i^h = \sum_{\substack{j \neq i \\ \left(r_{ij}^h < \rho^{\frac{1}{3}}\right)}} \iint\limits_{D_i^h} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2 + (nh)^2}} W_h(x', y')\,dx'\,dy',$$

$$\beta_i^h = \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - h)^2 + \zeta^2}} - \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2 + \left(\frac{h}{2} - \zeta\right)^2}}}{\sqrt{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2 + \left(\frac{h}{2} - \zeta\right)^2}}\right\},$$

$$\gamma_i^h = \sum_{\substack{j \neq i \\ \left(r_{ij}^h > \rho^{\frac{1}{3}}\right)}} \iint\limits_{D_i^h} \left(\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2 + (nh)^2}} -\right.$$

$$\left. - \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (nh)^2}}\right) W_h(x', y')\,dx'\,dy'.$$

Покажем, что

$$\overline{\lim_{\substack{h \to 0 \\ \rho \to 0}}}\, \alpha_i^h = \overline{\lim_{\substack{h \to 0 \\ \rho \to 0}}}\, \beta_i^h = \overline{\lim_{\substack{h \to 0 \\ \rho \to 0}}}\, \gamma_i^h = 0.$$

Действительно,

$$0 < \alpha_i^h \leqslant \sum_{\substack{j \neq i \\ \left(r_{ij}^h < \rho^{\frac{1}{3}}\right)}} \iint\limits_{D_j^h} \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2}}}{\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2}} W_h(x', y')\,dx'\,dy' \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{j \neq i \\ \left(r_{ij}^h < \rho^{\frac{1}{3}}\right)}} \frac{\iint\limits_{D_j^h} W_h(x', y')\,dx'\,dy'}{r_{ij}^h} \leqslant \mathrm{const} \sum_{\left(r_{ij}^h < \rho^{\frac{1}{3}}\right)} \frac{c_h^j}{r_{ij}^h}$$

(см. оценку (4.5)) или $0 < \alpha_i^h \leqslant \mathrm{const}\,\delta\left(\rho^{\frac{1}{3}}\right)$ (см. предложение б) этого пункта).

Далее, так как расстояние от точки (x_0, y_0) до точек (x_i, y_i) не превышает ρ, то

$$|\beta_i^h| < \mathrm{const}\,\rho.$$

Наконец, для оценки величины γ_i^h заметим, что

$$\left|\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2 + (nh)^2}} - \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (nh)^2}}\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{\rho_i^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{\rho_i^2 + (nh)^2}} - \frac{e^{-\lambda\sqrt{\rho_0^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{\rho_0^2 + (nh)^2}}\right)\right| =$$

$$= \left| \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \lambda \left(\frac{e^{-\lambda \sqrt{s^2+(nh)^2}}}{s^2+(nh)^2} - \frac{e^{-\lambda \sqrt{s^2+(nh)^2}}}{(s^2+(nh)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) s \right| |\rho_i - \rho_0| \leqslant$$

$$\leqslant s |\rho_i - \rho_0| \left\{ \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda e^{-\lambda \sqrt{s^2+(nh)^2}}}{s^2+(nh)^2} + \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\lambda \sqrt{s^2+(nh)^2}}}{(s^2+(nh)^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant s |\rho_i - \rho_0| \left\{ \frac{\lambda e^{-\lambda s}}{s^2} + \frac{e^{-\lambda s}}{s^3} \right\} \leqslant |\rho_i - \rho_0| \left\{ \frac{\lambda}{s} + \frac{1}{s^2} \right\},$$

где

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2}, \quad \rho_0 = \sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2},$$

а S заключено между большей и меньшей из этих величин. Так как точка (x', y') лежит вне круга радиуса $\rho^{\frac{1}{3}}$ с центром в точке (x_0, y_0), а точка (x_i, y_i) — внутри концентрического ему круга радиуса ρ, то

$$|\rho_i - \rho_0| \left\{ \frac{\lambda}{s} - \frac{1}{s^2} \right\} \leqslant \rho \left\{ \frac{\lambda}{\rho^{\frac{1}{3}} - \rho} + \frac{\lambda}{(\rho^{\frac{1}{3}} - \rho)^2} \right\} < \operatorname{const} \rho^{\frac{1}{3}}$$

при достаточно малом ρ. Поэтому

$$|\gamma_i^h| \leqslant \operatorname{const} \rho^{\frac{1}{3}}.$$

Далее,

$$\left| \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{e^{-\lambda \sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2}}}{\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2}} \varphi(x', y')\, dx'\, dy' - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{j \neq i \\ \left(r_{ij}^h \geqslant \rho^{\frac{1}{3}}\right)}} \iint\limits_{D_j^h} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\lambda \sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (nh)^2}} W_h\, dx'\, dy' \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{e^{-\lambda \sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2}}}{\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2}} \varphi(x', y')\, dx'\, dy' - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{j \neq i \\ \left(r_{ij}^h \geqslant \rho^{\frac{1}{3}}\right)}} \iint\limits_{D_j^h} \frac{e^{-\lambda \sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2}}}{\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2}} W_h\, dx'\, dy' \right| +$$

$$+ \left| \sum_{\substack{j \neq i \\ \left(r_{ij}^h \geqslant \rho^{\frac{1}{3}}\right)}} \iint\limits_{D_j^h} \left(\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\lambda \sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (nh)^2}}}{\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (nh)^2}} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{e^{-\lambda \sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2}}}{2\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2}} \right) W_h\, dx'\, dy' \right|.$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства легко оценивается:

$$\varlimsup_{h\to 0}\left|\frac{1}{2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}\varphi(x',y')\,dx'\,dy'-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{\left(r_{ij}^h\geqslant\rho^{\frac{1}{3}}\right)}\iint\limits_{D_j^h}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}W_h\,dx'\,dy'\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\iint\limits_{\sigma\left(\rho^{\frac{1}{3}}+2\rho\right)}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}\varphi(x',y')\,dx'\,dy'.$$

Для оценки второго слагаемого заметим, что

$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2+(nh)^2}}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2+(nh)^2}}}{\sqrt{r^2+(nh)^2}}-\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2+(n+1)^2h^2}}}{\sqrt{r^2+(n+1)^2h^2}}\right),$$

где $r=\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}>\rho^{\frac{1}{3}}$. Ряд, стоящий справа, представим контурным интегралом

$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2+(nh)^2}}}{\sqrt{r^2+(nh)^2}}-\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2+(n+1)^2h^2}}}{\sqrt{r^2+(n+1)^2h^2}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2+z^2h^2}}}{\sqrt{r^2+z^2h^2}}-\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2+(z+1)^2h^2}}}{\sqrt{r^2+(z+1)^2h^2}}\right)\frac{1}{\sin\pi z}\,dz,$$

где ветви функций $\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2+z^2h^2}}}{\sqrt{r^2+z^2h^2}}$ и $\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2+(z+1)^2h^2}}}{\sqrt{r^2+(z+1)^2h^2}}$ определены разрезами, идущими от точек $\pm i\frac{r}{h}$ к $\pm i\infty$ и от точек $\pm\frac{ir}{h}-1$ к $\pm i\infty-1$ соответственно, и условием положительности на вещественной оси, а контур интегрирования Γ охватывает вещественную положительную полуось, расширяясь от нее в обе стороны.

Функция $\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2+z^2h^2}}}{\sqrt{r^2+z^2h^2}}-\frac{e^{-\lambda\sqrt{r^2+(z+1)^2h^2}}}{\sqrt{r^2+(z+1)^2h^2}}\right)\frac{1}{\sin\pi z}$ при указанном выборе контура стремится к нулю при $h\to 0$ для каждого фиксированного z и мажорируется функцией $c\left|\frac{1}{\sin\pi z}\right|$, которая суммируема на этом контуре. Поэтому по теореме Лебега стремится к нулю при $h\to 0$ и сам интеграл.

Отсюда и из (2.10) вытекает, что

$$\lim_{h\to 0}\sum_{\substack{j\neq i\\ \left(r_{ij}^h > \rho^{\frac{1}{3}}\right)}}\iint\limits_{D_j^h}\left(\sum_0^\infty (-1)^n \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2+(nh)^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2+(nh)^2}} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}\right) W_h\, dx'\, dy' = 0.$$

Равенство (4.7) можно написать так:

$$\frac{\iint\limits_{D_i^h} W_h(x',\ y')\, dx'\, dy'}{c_h^i} = \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\zeta^2}}}{\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\zeta^2}} -$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}\varphi(x',\ y')\, dx'\, dy' + \varepsilon_i^h. \qquad (4.8)$$

На основании приведенных выше оценок

$$\overline{\lim_{h\to 0}}|\varepsilon_i^h| \leqslant \mathrm{const}\left[\delta\left(\rho^{\frac{1}{3}}\right) + \rho + \iint\limits_{\sigma\left(\rho^{\frac{1}{3}}+2\rho\right)}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\,\varphi(x',\ y')\, dx'\, dy'\right] = \varepsilon(\rho).$$

При этом $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon(\rho) = 0$. Из (4.8), умножая на c_h^i и суммируя по всем отверстиям, попадающим в $\sigma(P_0,\ \rho)$, выводим

$$\sum_{\sigma(\rho)}\iint\limits_{D_i^h} W_h(x',\ y')\, dx'\, dy' = \frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\zeta^2}}}{2\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\zeta^2}}\sum_{\sigma(\rho)} c_h^i -$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}\varphi(x',\ y')\, dx'\, dy'\sum_{\sigma(\rho)} c_h^i + \sum_{\sigma(\rho)} c_h^i\varepsilon_i^h. \qquad (4.8')$$

Перейдем в (4.4) и (4.5) к пределу при $z\to +0$ и $z\to -0$ и вычтем предельные равенства в точке $(x_0,\ y_0)$:

$$G^+|_{z=0} - G^-|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\zeta^2}}}{\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\zeta^2}} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}}{\sqrt{(x_0-x')^2+(y_0-y')^2}}\varphi\, dx'\, dy'.$$

Из этого равенства согласно (4.8′) следует

$$\lim_{h\to 0}\Big|\sum_{\sigma(\rho,\,P_0)}\iint_{D_i^h} W_h(x',\,y')\,dx'\,dy' - \pi\,(G^+(P_0,\,Q) - G^-(P_0,\,Q))\sum_{\sigma(\rho,\,P_0)} c_h^i\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(\rho)\iint_{\sigma(\rho,\,P_0)} f(x',\,y')\,dx'\,dy'.$$

Ввиду произвольной малости ρ мы получаем

$$\varphi(x_0,\,y_0) = \pi\,(G^+(P_0,\,Q) - G^-(P_0,\,Q))\,f(x_0,\,y_0). \tag{4.9}$$

Последняя формула показывает, что $\varphi(x,\,y)$ всюду непрерывна, равенства (4.6) выполняются всюду и

$$\frac{\partial G^+}{\partial z}\Big|_{z=+0} = \frac{\partial G^-}{\partial z}\Big|_{z=-0} = \frac{\pi}{2}(G^+(P_0,\,Q) - G^-(P_0,\,Q))\,f(x_0,\,y_0). \tag{4.10}$$

Итак, мы доказали, что из последовательности функций Грина $G_h(P,\,Q,\,\lambda)$ можно выделить сходящуюся к некоторой функции $G(P,\,Q,\,\lambda)$ подпоследовательность, причем предельная функция есть функция Грина следующей краевой задачи:

$$\Delta u - \lambda^2 u = g,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=+0} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=-0} = \frac{\pi}{2}(u|_{z=+0} - u|_{z=-0})\,f(x,\,y).$$

Обычным способом можно доказать единственность этой функции, а значит, сходиться будет и вся последовательность $G_h(P,\,Q,\,\lambda)$ при $h\to 0$. Переход к любым невещественным значениям λ^2 делается с помощью тождества Гильберта, так же как это сделано в [4].

Таким образом нами доказана

Теорема. *Пусть при $h\to 0$ выполнены условия.*

1) *Диаметры отверстий равномерно стремятся к нулю.*

2) *Функция*

$$\delta(\rho) = \lim_{h\to 0}\Big\{\max_{i}\sum_{\substack{j\neq i\\ r_{ij}^h<\rho}}\frac{c_h^i}{r_{ij}^h}\Big\}$$

стремится к нулю при $\rho\to 0$.

3) *Обобщенные емкости c_h^i проекций отверстий удовлетворяют такому предельному соотношению:*

$$\lim_{h\to 0}\sum_{(\sigma)} c_h^i = \iint_{\sigma} f(P)\,dP$$

для любого круга σ на плоскости, где $f(P)$ — непрерывная функция (суммирование слева распространено на все отверстия, содержащиеся внутри круга σ). Тогда функция Грина $G_h(P,\,Q,\,k)$ задачи (1) *при $h\to 0$ сходится к функции Грина следующей краевой задачи:*

$$\Delta u + k^2 u = g \quad (\mathrm{Jm}\,k > 0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=+0} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=-0} = \frac{\pi}{2}\{u|_{z=+0} - u|_{z=-0}\}\,f(x,\,y).$$

Сходимость равномерна, по точкам P, Q, меняющимся в любой конечной области, отстоящей на положительном расстоянии от плоскости $z = 0$.

§ 5. Некоторые частные случаи

Предположим, что выполнены следующие условия.

1) Диаметры d_i^n отверстий равномерно стремятся к нулю при $n \to \infty$.

2) $\delta(\rho) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left\{ \max\limits_{i_0} \sum\limits_{r_{ji_0}^n < \rho} \frac{c_j^n}{r_{ji_0}^n} \right\}$ стремится к нулю при $\rho \to 0$.

3) Емкости c_i^n проекций отверстий удовлетворяют предельному соотношению

$$\lim_{n\to 0} \sum_{(\sigma)} c_i^n = \iint_\sigma \varphi(P)\, dP$$

для любого круга σ плоскости, где $\varphi(P)$ — непрерывная функция (c_i^n — ньютоновские емкости).

Пусть далее h_n есть расстояние между плоскостями. Будем обозначать проекции отверстий через D_i^n, а их обобщенные емкости, определяемые с помощью формулы (3.1), через $C_{h_n}^i$.

Так как

$$c_{h_n}^i \leqslant 2(1+\lambda)\, c_n^i, \tag{5.1}$$

то условия 2) теоремы предыдущего параграфа будет автоматически выполнено, с какой бы скоростью ни стремилось к нулю h_n.

Мы хотим теперь выяснить, какие дополнительные предположения о скорости стремления к нулю расстояния h_n и о самих отверстиях обеспечивают выполнение и условия 3) той же теоремы и установить связь между функциями $f(P)$ и $\varphi(P)$. Естественно предположить, что если диаметры отверстий стремятся к нулю быстрее, чем расстояние между плоскостями, несущими отверстия, то мы будем иметь дело с почти независимым действием препятствий, в результате чего поток должен быть ослаблен в два раза по сравнению со случаем одной плоскости.

Напротив, если отверстия стремятся к нулю медленнее, чем расстояние между плоскостями, то наличие второй плоскости не должно вносить существенного изменения по сравнению со случаем одной плоскости.

В соответствии с этими интуитивными соображениями мы можем ожидать, что $f(P) = \varphi(P)$ в первом случае и $f(P) = 2\varphi(P)$ — во втором.

Из неравенства (3.10) вытекает

$$0 \leqslant \tilde{c}_n^i - c_n^i \leqslant c_{h_n}^i - c_n^i \leqslant \tilde{c}_n^i - c_n^i + \frac{2c_n^{i2}(1+\lambda)^2}{h_n} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(1+\lambda)\, c_n^{i2} + \frac{2c_n^{i2}(1+\lambda)^2}{h}.$$

Наконец,

$$0 \leqslant \sum_{(\sigma)} c_{h_n}^i - \sum_{(\sigma)} c_n^i \leqslant \text{const} \max_i c_n^i \sum_{(\sigma)} c_n^i +$$
$$+ \text{const} \frac{\max c_n^i}{h_n} \sum_{(\sigma)} c_n^i.$$

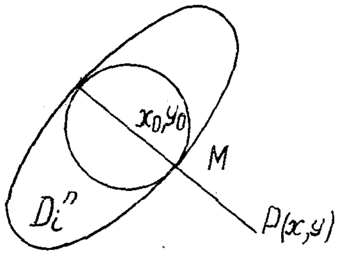
Следовательно, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max c_n^i}{h_n} = 0, \tag{5.2}$$

то

$$\sum_{(\sigma)} c_{h_n}^i \to \iint_{\sigma} \varphi(P)\, dP,$$

т. е. выполняется условие 3) теоремы параграфа 4. Итак, если выполнены условия 1), 2), 3) настоящего параграфа и имеет место (5.2), то справедливы утверждения теоремы, и граничное условие при $z = 0$ имеет вид



$$\frac{\partial G^+}{\partial z} = \frac{\partial G^-}{\partial z} = \frac{\pi}{2}\varphi(G^+ - G^-). \tag{5.3}$$

В работе [1], где приняты требования 1), 2), 3), выведено граничное условие, отличающееся от (5.3) коэффициентом в правой части, который там вдвое больше чем в (5.3). Тем самым оправдывается первая часть утверждения, *высказанного в начале этого параграфа.*

Переходя ко второй его части, обратимся к оценке (3.20) и рассмотрим входящую в нее величину $m(R)$. В качестве области D возьмем D_i^n. Пусть точка $P(x, y)$ удалена от края отверстия на расстояние, не превышающее R (рис. 2).

Проведем из точки $P(x, y)$ нормаль к границе области D_i^n, которая пересекает границу в некоторой точке M. Продолжим затем эту нормаль внутрь области и возьмем наибольший круг $C(M)$, центр которого (x_0^n, y_0^n) лежит на продолжении нормали, касающейся границы в точке M, и целиком содержащийся в D_i^n. Обозначим его радиус через $r_i^n(M)$ и положим

$$r^{(n)} = \min_i \{\min_M r_i^{(n)}(M)\}. \tag{5.4}$$

Пусть $v(x', y', z')$ есть функция, равная единице на круге $C(M)$, гармоническая во всем пространстве вне этого круга и стремящаяся к нулю на бесконечности.

Так как $\gamma_0(x', y', 0) = 1$ на D_i^n и $v(x', y', 0) = 1$ на части D_i^n, то в силу принципа максимума

$$\gamma_0(x', y', z') \geqslant v(x', y', z')$$

во всех точках, а следовательно,

$$1 - \gamma_0(x', y', z') \leqslant 1 - v(x', y', z'),$$
$$1 - \gamma_0(x, y, 0) \leqslant 1 - v(x, y, 0) \tag{5.5}$$

и

$$m(R) = \max_{d((x,y), D_i^n) < R} (1 - \gamma_0(x, y, 0)) \leqslant \max_{d((x,y), D_i^n) < R} (1 - v(x, y, 0)).$$

Введем цилиндрическую систему координат с полюсом в центре круга $C(M)$. Тогда из симметрии следует, что

$$v(x', y', z') = v(\rho, z').$$

Если $\hat{v}(x', y', z') = \hat{v}(\rho, z')$ есть функция, равная единице на единичном круге, концентрическом с рассматриваемым, гармоническая во всем пространстве и убывающая на бесконечности, то

$$v(\rho, z') = \hat{v}\left(\frac{\rho}{r_i^{(n)}(M)}, \frac{z'}{r_i^{(n)}(M)}\right), \tag{5.6}$$

и для точки $P(x, y)$ получаем

$$v(x, y, 0) = \hat{v}\left(\frac{r_i^{(n)} + R}{r_i^n}, 0\right) = \hat{v}\left(1 + \frac{R}{r_i^n}, 0\right).$$

Так как $\hat{v}(1, 0) = 1$ и функция $\hat{v}(x', y', z')$ непрерывна, то $(1 - v(x, y, 0) = 1 - \hat{v}\left(1 + \frac{R}{r_i^n}, 0\right) \to 0$, если $\frac{R}{r^{(n)}} \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть теперь $\frac{h_n}{r^{(n)}} \to 0$ при $n \to \infty$ и $R = R_n$ выбирается так, чтобы $\frac{R_n}{r^{(n)}} \to 0$. Тогда формула 3.20) дает оценку

$$\left|c_n^i - \frac{1}{2} c_{h_n}^i\right| \leqslant \varepsilon_n c_n^i, \text{ где } \varepsilon_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{(\sigma)} c_n^i - \frac{1}{2}\sum_{(\sigma)} c_{h_n}^i\right| = 0$$

для всякой области σ.

Таким образом, если выполнены требования 1), 2), 3) и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{r^{(n)}} = 0, \tag{5.7}$$

то

$$\sum_{(\sigma)} c_{h_n}^i \to 2 \iint_{\sigma} \varphi(P)\, dP.$$

Мы пришли к граничному условию, полученному в работе [1], чем оправдана и вторая часть утверждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, Г. В. Сузиков. Вторая краевая задача в областях со сложной границей. «Матем. сб.» т. 69 (111) : 1, 35-60, 1966.

2. Г. В. Сузиков, Е. Я. Хруслов. Задача диффузии в области с кусочно-полупроницаемой границей. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», в. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

3. Г. В. Сузиков, Е. Я. Хруслов. О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое. См. в настоящем сборнике.

4. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. «Матем. сб.», 65 (107) : 3, 458—472, 1964.

Поступила 7 декабря 1966 г.