ОПЕРАТОРНЫЙ УЗЕЛ В ЗАДАЧЕ ОБ ОТРАЖЕНИИ ДЛЯ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Д. М. Чаусовский

1. Понятие LC-графа обобщает понятие реактивного многополюсника. В настоящей статье рассматривается один класс LC-графов, а также определяются связанные с ними открытые системы и операторные узлы. Полученные результаты применяются к построению матриц полных проводимостей и волновых матриц многополюсников, соответствующих изучаемым LC-графам. Определения понятий открытой системы и операторного узла даны в [1, 2, 3].

2. Пусть G — конечный ориентированный граф (мы придерживаемся терминологии [4,5]; по терминологии [6] G — мультиграф). Отметим в нем n ребер, называемые далее *внешними* и обозначаемые через $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Остальные ребра назовем *внутренними*. Множество внутренних ребер разобьем на два класса: L — ребра q_{Li}, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, и C — ребра q_{Cj}, $1 \leqslant j \leqslant \nu$. Каждому L-ребру q_{Li} поставим в соответствие μ вещественных чисел L_{ik}, $1 \leqslant k \leqslant \mu$, а каждому C-ребру q_{Cj} — ν вещественных чисел C_{jk}, $1 \leqslant k \leqslant \nu$, так, чтобы матрицы

$$\Lambda = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1\mu} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{\mu 1} & L_{\mu 2} & \ldots & L_{\mu\mu} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1\nu} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{\nu 1} & C_{\nu 2} & \ldots & C_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

были симметричными и положительно определенными.

Граф G с выделенными в нем внешними L- и C-ребрами и набор чисел L_{ik}, C_{jk} назовем LC-графом. Обозначим через Y класс LC-графов, удовлетворяющих условию g_Y: отсутствуют циклы, содержащие только внешние ребра, и циклы, содержащие наряду с внешними ребрами еще разве лишь C-ребра.

Докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть G — LC — граф класса Y. Поставим в соответствие каждому внешнему ребру q_k непрерывную комплексную функцию $V_k(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Тогда каждому внутреннему ребру можно поставить в соответствие две функции $V_{Li}(t)$, $I_{Li}(t)$ (для ребер q_{Li}) и $V_{Cj}(t)$, $I_{Cj}(t)$ (для ребер q_{Cj}), а каждому внешнему ребру — еще одну функцию $I_k(t)$, так, чтобы выполнялись условия:*

К 1. Для каждого цикла Q графа G $\sum\limits_{q \in Q} (-1)^{\delta(q)} V_q \equiv 0$, где $\delta(q) = 1$, если q — внутреннее ребро и его направление совпадает с ориентацией цикла или же q — внешнее ребро и его направление противоположно ориентации цикла; в остальных случаях $\delta(q) = 0$;

К 2. Для каждого сечения S графа G $\sum_{q\in S}(-1)^{\varepsilon(q)} I_q \equiv 0$, *где* $\varepsilon(q) = 0$, *если направление q совпадает с ориентацией сечения, и* $\varepsilon(q)=1$ *в остальных случаях;*

К 3.

$$V_{Li} = \sum_{k=1}^{\mu} L_{ik}\frac{dI_{Lk}}{dt},\ 1 \leqslant i \leqslant \mu;\ I_{Cj} = \sum_{k=1}^{\nu} C_{jk}\frac{dV_{Ck}}{dt},\ 1 \leqslant j \leqslant \nu.$$

Доказательство. Пусть f — лес графа, G (лес графа — это объединение деревьев, взятых по одному из каждой компоненты связности), содержащий все внешние ребра и наибольшее возможное число C-ребер. В силу g_Y такой лес существует. Пусть L- и C-ребра, входящие в f, таковы: q_{Li}, $1 \leqslant i \leqslant r$ и q_{Cj}, $1 \leqslant j \leqslant p$. Введем обозначения

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} I_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix},\ V_L = \begin{bmatrix} V_{L1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{Lr} \end{bmatrix},\ I_L = \begin{bmatrix} I_{L1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{Lr} \end{bmatrix},\ V_C = \begin{bmatrix} V_{C1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{Cp} \end{bmatrix},$$

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{C1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{Cp} \end{bmatrix},\ \tilde{V}_L = \begin{bmatrix} V_{L(r+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{L\mu} \end{bmatrix},\ \tilde{I}_L = \begin{bmatrix} I_{L(r+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{L\mu} \end{bmatrix},\ \tilde{V}_C = \begin{bmatrix} V_{C(p+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{C\nu} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{I}_C = \begin{bmatrix} I_{C(p+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{C\nu} \end{bmatrix}.$$

Напишем уравнения $К\,1$ и $К\,2$ для фундаментальной системы циклов и фундаментальной системы сечений, определяемых лесом f [5,7]. В матричной форме они имеют вид

$$\begin{aligned} -A_{11}V + A_{12}V_L + A_{13}V_C + V_L = 0,&\quad I + B_{11}\tilde{I}_L + B_{12}\tilde{I}_C = 0,\\ -A_{21}V + A_{22}V_L + A_{23}V_C + V_C = 0.&\quad I_L + B_{21}\tilde{I}_L + B_{22}\tilde{I}_C = 0,\\ &\quad I_C + B_{31}\tilde{I}_L + B_{32}\tilde{I}_C = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Матрицы

$$Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & E & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & E \end{bmatrix},\quad S = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} \\ 0 & E & 0 & B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 & E & B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}$$

являются соответственно фундаментальной матрицей циклов и фундаментальной матрицей сечений графа G (E — единичные матрицы надлежащих размеров). Известно [7], что $QS' = 0$.

Поэтому

$$A_{ij} = -B'_{ji},\ i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Из g_Y и определения f следует, что $A_{22} = 0$ и $A_{21} = 0$. Поэтому система (1) имеет вид

$$\begin{aligned} -A_{11}V + A_{12}V_L + A_{13}V_C + \tilde{V}_L = 0,&\ I + B_{11}\tilde{I}_L = 0,\\ A_{23}V_C + \tilde{V}_C = 0,&\quad I_L + B_{21}\tilde{I}_L = 0\\ &\quad I_C + B_{31}I_L + B_{32}\tilde{I}_C = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Положим

$$L=\begin{bmatrix}L_{11} & \dots & L_{1r}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ L_{r1} & \dots & L_{rr}\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix}L_{1(r+1)} & \dots & L_{1\mu}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ L_{r(r+1)} & \dots & L_{r\mu}\end{bmatrix},\ \tilde{L}=\begin{bmatrix}L_{r+1,\,r+1} & \dots & L_{r+1,\,\mu}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ L_{\mu,\,r+1} & \dots & L_{\mu\mu}\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}C_{11} & \dots & C_{1p}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ C_{p1} & \dots & C_{pp}\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}C_{1(p+1)} & \dots & C_{1\nu}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ C_{p(p+1)} & \dots & C_{p\nu}\end{bmatrix},\quad \tilde{C}=\begin{bmatrix}C_{p+1,\,p+1} & \dots & C_{p+1,\,\nu}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ C_{\nu(p+1)} & \dots & C_{\nu\nu}\end{bmatrix}.$$

Уравнения $K3$ запишутся так:

$$V_L=L\frac{dI_L}{dt}+M\frac{d\tilde{I}_L}{dt},\quad \tilde{V}_L=\tilde{L}\frac{d\tilde{I}_L}{dt}+M'\frac{dI_L}{dt},$$

$$I_C=C\frac{dV_C}{dt}+N\frac{d\tilde{V}_C}{dt},\quad \tilde{I}_C=\tilde{C}\frac{d\tilde{V}_C}{dt}+N'\frac{dV_C}{dt}. \tag{3}$$

Комбинируя уравнения (2) и (3), получим

$$\begin{bmatrix}\Delta_L 0\\ 0\Delta_C\end{bmatrix}\times\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{I}_L\\ V_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & A_{13}\\ B_{31} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{I}_L\\ V_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}\\ 0\end{bmatrix}V, \tag{4}$$

$$I=-B_{11}\tilde{I}_L,\quad \begin{bmatrix}I_L\\ \tilde{V}_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-B_{21} & 0\\ 0 & -A_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{I}_L\\ V_C\end{bmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\Delta_L=\tilde{L}+A_{12}LA'_{12}+A_{12}M+M'A'_{12},\quad \Delta_C=C+B_{32}\tilde{C}B'_{32}+B_{32}N+N'B'_{32}.$$

Применяя формулу Бинэ—Коши, можно показать, что Δ_L и Δ_C — положительно определенные матрицы. Поэтому уравнение (4) может быть разрешено относительно $\tilde{I}_L$ и V_C, какова бы ни была непрерывная вектор-функция $V(t)$. Если определить I, I_L, $\tilde{V}_C$ равенствами (5), а V_L, $\tilde{V}_L$, I_C, $\tilde{I}_C$ — равенствами (3), мы получим набор функций, удовлетворяющих (2), (3), а следовательно, $K1$, $K2$, $K3$. Все эти функции определяются, очевидно, однозначно функцией $V(t)$ и начальными условиями, согласованными с $K1$ и $K2$.

3. Если E, H ... — гильбертовы пространства, то через $\tilde{E}$, $\tilde{H}$ ... мы будем обозначать линейные пространства вектор-функций аргумента t, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, со значениями в E, H ... соответственно. Пусть E — n-мерное координатное гильбертово пространство, H — пространство $(\mu+\nu)$-мерных вектор-столбцов со скалярным произведением $[h_1;\ h_2]=h_2^*Dh_1$, где

$$D=\begin{bmatrix}L & M & 0 & 0\\ M' & \tilde{L} & 0 & 0\\ 0 & 0 & C & N\\ 0 & 0 & N' & \tilde{C}\end{bmatrix}$$

($*$ обозначает переход к комплексно сопряженной матрице).

Положим $\varphi^-(t)=V(t)$, $\varphi^+(t)=I(t)$, $\psi(t)=[I_{L1}\ \dots\ I_{L\mu},\ V_{C1}\ \dots\ V_{C\nu}]'$. Имеем φ^-, $\varphi^+\in\tilde{E}$, $\psi\in\tilde{H}$. Назовем φ^- входным вектором, φ^+ — выходным, ψ — внутренним вектором. Из (4) и (5) следует, что при нулевых начальных условиях $\varphi^+ = \tilde{S}\varphi^-$, $\psi = \tilde{R}\varphi^-$, где $\tilde{S}$ и $\tilde{R}$ — линейные операторы, действующие из $\tilde{E}$ в $\tilde{E}$ и из $\tilde{E}$ в $\tilde{H}$ соответственно. Это означает, что $\tilde{E}$, $\tilde{H}$, $\tilde{S}$, $\tilde{R}$ образуют открытую систему

$$F\left(\tilde{E}\begin{matrix}\nearrow \tilde{S} \to \tilde{E} \\ \searrow \tilde{R} \to \tilde{H}\end{matrix}\right).$$

Ее мы назовем открытой системой на LC-графе класса Y.

4. Пусть E и H — гильбертовы пространства, $F = F\left(\tilde{E}\begin{matrix}\nearrow \tilde{S} - \tilde{E} \\ \searrow \tilde{R} - \tilde{H}\end{matrix}\right)$, ρ — самосопряженный положительный оператор в E. Для $\varphi^- \in \tilde{E}$ и $\varphi^+ = \tilde{S}\varphi^-$ положим $\varphi_d^- = \sqrt{\frac{\rho^{-1}}{2}}(\varphi^- + \rho\varphi^+)$, $\varphi_d^+ = \sqrt{\frac{\rho^{-1}}{2}}(\varphi^- - \rho\varphi^+)$. Если существуют такие линейные операторы $\tilde{S}_d$ и $\tilde{R}_d$, что $\varphi_d^+ = \tilde{S}_d\varphi_d^-$ и $\tilde{R}\varphi^- = \tilde{R}_d\varphi_d^-$, то открытую систему $F_d\left(\tilde{E}\begin{matrix}\nearrow \tilde{S}_d - \tilde{E} \\ \searrow \tilde{R}_d - \tilde{H}\end{matrix}\right)$ назовем ρ-диагональю системы F. Если ρ — единичный оператор, ρ-диагональ совпадает с диагональю открытой системы [3].

Теорема 2. *Открытая система F на LC-графе класса Y имеет ρ-диагональ F_d. Пусть $\varphi_d^- = \sqrt{\frac{\rho^{-1}}{2}}(V + \rho I)$, $\varphi_d^+ = \sqrt{\frac{\rho^{-1}}{2}}(V - \rho I)$, где ρ — самосопряженная положительно определенная матрица порядка n.*

С учетом (5) имеем

$$V = \sqrt{2\rho}\,\varphi_d^- + \rho B_{11}\tilde{I}_L, \quad \varphi_d^+ = \varphi_d^- + \sqrt{2\rho}B_{11}\tilde{I}_L.$$

Из (4)

$$\begin{bmatrix}\Delta_L & 0 \\ 0 & \Delta_C\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{I}_L \\ V_C\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-A_{11}\rho B_{11} & A_{13} \\ B_{31} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{I}_L \\ V_C\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11}\sqrt{2\rho} \\ 0\end{bmatrix}\varphi_d^-. \tag{7}$$

При нулевых начальных условиях уравнение (7) вместе с (5) и (6) определяет линейные операторы $\tilde{S}_d$ и $\tilde{R}_d$, такие, что $\varphi_d^+ = \tilde{S}_d\varphi_d^-$, $\psi = R_d\varphi_d^-$. Этим доказано существование ρ-диагонали F_d.

5. Пусть E, H, H^0 — гильбертовы пространства. Открытая система $F^0\left(\tilde{E}\begin{matrix}\nearrow \tilde{S} - \tilde{E} \\ \searrow \tilde{R}_0 - \tilde{H}^0\end{matrix}\right)$ называется основой открытой системы $F\left(\tilde{E}\begin{matrix}\nearrow \tilde{S} - \tilde{E} \\ \searrow \tilde{R} - \tilde{H}\end{matrix}\right)$, если 1) существует линейный оператор P, действующий из H^0 в H, такой, что $\tilde{R}\varphi^-(t) = P\tilde{R}^0\varphi^-(t)$ и $\|\tilde{R}\varphi^-(t)\|_H = \|R^0\varphi^-(t)\|_{H^0}$ для всех $t \in [t_0; t_1]$ и $\varphi^- \in \tilde{E}$; 2) системе F^0 принадлежит операторный узел.

Теорема 3. *Для ρ-диагонали F_d открытой системы F на LC-графе класса Y существует основа F_d^0. Операторный узел основы определяется топологией графа и параметрами L_{ik}, C_{jk} по формулам* (9) (*см. ниже*).

Через H^0 обозначим гильбертово пространство $(\mu - r + p)$-мерных вектор-столбцов со скалярным произведением $(h_1; h_2) = h_2^* \Delta h_1$, где

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_L & 0 \\ 0 & \Delta_C \end{bmatrix}.$$

Умножим уравнение (7) слева на $i\Delta^{-1}$. Получим

$$i\frac{dg(t)}{dt} + Tg(t) = \Gamma\varphi_d^-(t), \tag{8}$$

где

$$g = \begin{bmatrix} \tilde{I}_L \\ V_C \end{bmatrix},\ T = i\begin{bmatrix} -\Delta_L^{-1}A_{11}\rho B_{11} & \Delta_L^{-1}A_{13} \\ \Delta_C^{-1}B_{31} & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma = i\begin{bmatrix} \Delta_L^{-1}A_{11}\sqrt{2\rho} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

При нулевых начальных условиях уравнение (8) порождает линейный оператор $\tilde{R}_d^0$, действующий из $\tilde{E}$ в $\tilde{H}^0$, такой, что $g = \tilde{R}_d^0\varphi_d^-$. Из (6) и (9) и равенства $A_{11} = -B_{11}'$ имеем

$$\varphi_d^+(t) = \tilde{S}_d\varphi_d^-(t) = \varphi_d^-(t) - i\Gamma^*\Delta\tilde{R}_d^0\varphi_d^-. \tag{10}$$

Таким образом, построена открытая система $F_d^0\left(\tilde{E} \begin{matrix} \nearrow \tilde{S}_d - \tilde{E} \\ \searrow \tilde{R}_d^0 - \tilde{H}^0 \end{matrix}\right)$.

Будем рассматривать T как матрицу оператора T в H^0, Γ — как матрицу оператора Γ из E в H^0, ρ — как матрицу оператора ρ в E. Матрицы операторов T^+ и Γ^+, сопряженных по отношению к T и Γ, равны $\Delta^{-1}T^*\Delta$ и $\Gamma^*\Delta$. Справедливо равенство $T - T^+ = i\Gamma J\Gamma^+$, где J — единичный оператор в E. Следовательно, E, H^0, T, Γ, J образуют операторный узел

$$M = \begin{bmatrix} T & \Gamma & J \\ H^0 & & E \end{bmatrix}.$$

Равенство (10) может быть записано так:

$$\tilde{S}_d\varphi_d^- = \varphi_d^- - iJ\Gamma^+\tilde{R}_d^0\varphi_d^-. \tag{11}$$

В силу (8) и (11) узел M принадлежит системе F_d^0. Из второго равенства (5) и (7) $\tilde{R}_d\varphi_d^- = P\tilde{R}_d^0\varphi_d^-$, где оператор P, действующий из H^0 в H, представлен матрицей

$$\begin{bmatrix} B_{21} & 0 \\ E & 0 \\ 0 & E \\ 0 & -A_{23} \end{bmatrix}.$$

При этом $\|\tilde{R}_d\varphi_d^-(t)\|_H = \|R_d^0\varphi_d^-(t)\|_{H^0}$. Согласно определению F_d^0 — основа F_d. Теорема доказана.

6. Заметим, что из (2), (3) и (6) можно получить соотношение $iA\frac{d\psi}{dt} + B\psi = \hat{\Gamma}\varphi_d^-$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12}L + M' & A_{12}M + \tilde{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C + B_{32}N' & N + B_{32}\tilde{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = i\begin{bmatrix} E & B_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -A_{11}\rho B_{11} & A_{13} & 0 \\ 0 & B_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & E \end{bmatrix}, \quad \hat{\Gamma} = i\begin{bmatrix} 0 \\ A_{11}\sqrt{2\rho} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При этом $BA^+ - AB^+ = i\hat{\Gamma}J\hat{\Gamma}^+$, а область значений $\hat{\Gamma}$ (отображающего E в H) содержится в области значений A. Здесь J — единичный оператор в E.

7. Если матрица $\sum$ (см. п. 2) — диагональная, то LC-графу класса Y отвечает реактивный многополюсник с реальным многообмоточным трансформатором. Его мы будем называть многополюсником класса Y. Из теоремы 1 следует, что такой многополюсник обладает матрицей полных проводимостей $Y(\omega)$. В силу (4) и (5) имеем

$$Y(\omega) = [A'_{11}0]\left(\begin{bmatrix} 0 & A_{13} \\ B_{31} & 0 \end{bmatrix} + i\omega\begin{bmatrix} \Delta_L & 0 \\ 0 & \Delta_C \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Через операторы узла M, построенного в п. 5, $Y(\omega)$ выражается так:

$$Y(\omega) = \frac{i}{2}\sqrt{\rho^{-1}}\,\Gamma^+(A - \omega E)^{-1}\,\Gamma\sqrt{\rho^{-1}},$$

где $A = \frac{1}{2}(T + T^+)$.

Пусть каждое внешнее ребро q_k многополюсника класса Y заменено двухпроводной линией без потерь с равномерно распределенными параметрами и волновым сопротивлением ρ_k. Положим

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_n \end{bmatrix}.$$

Вектор-функция $\varphi_d^- = \sqrt{\frac{\rho^{-1}}{2}}(V + \rho I)$ интерпретируется как волна, падающая на многополюсник, а $\varphi_d^+ = \sqrt{\frac{\rho^{-1}}{2}}(V - \rho I)$ как отраженная волна Пользуясь (8) и (11), получаем представление волновой матрицы многополюсника в виде

$$S(\omega) = E - i\Gamma^+(T - \omega E)^{-1}\Gamma.$$

Таким образом, волновая матрица многополюсника класса Y равна характеристической матрице-функции операторного узла M (п. 5).

8. Результаты, аналогичные изложенным выше, могут быть получены и для LC-графов класса Z. Так мы называем LC-графы, удовлетворяющие условию g_z: отсутствуют сечения, образованные только внешними ребрами или только внешними и еще разве лишь L-ребрами.

Многополюсники, соответствующие LC-графам Z, имеют матрицу сопротивлений $Z(\omega)$. Для них также может быть построена волновая матрица. LC-графы классов Y и Z реализуются в виде многополюсников с реальными многообточными трансформаторами. Задача построения операторного узла (комплекса) для цепей с идеальными трансформаторами рассматривалась в работе А. Г. Руткаса.

Приношу глубокую благодарность А. Г. Руткасу, уделившему большое внимание этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Лившиц. О линейных физических системах, соединенных с внешним миром каналами связи. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 27, 1963.

2. М. С. Лившиц. Открытые системы как линейные автоматы. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 27, 1963.

3. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны (открытые системы). Изд-во «Наука», 1966.

4. Л. Д. Кудрявцев. О некоторых математических вопросах теории электрических цепей. УМН, т. 3, в. 4(26), 1948.

5. B. Reed Myril. The Seg: A new class of subgraphs. IRE Trans. CT, v. CT-8, March, 1961.

6. К. Берж. Теория графов и ее применения. Изд-во иностр. лит., М., 1963.

7. С. Сешу, Н. Балабанян. Анализ линейных цепей. Госэнергоиздат. М., 1963.

Поступила 19 октября 1966.