ОБ УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ И НЕКОТОРЫХ F-ПРОСТРАНСТВАХ

Станимир Троянски

Ряд векторов линейно-топологического пространства называется условно сходящимся, если существуют две сходящиеся его перестановки, имеющие различные суммы. Совокупность всех точек пространства, могущих служить суммами данного ряда при всевозможных его перестановках, называется областью сумм этого ряда.

Теорема Штейница [1]. *Область сумм условно сходящегося ряда в n-мерном евклидовом пространстве E_n есть смещенное подпространство (т. е. множество элементов вида x_0+y, где $x_0 \in E_n$, а y пробегает линейное пространство $G_m \subset E_n$; $1 \leqslant m \leqslant n$).*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма Штейница. *Дано конечное множество векторов $\{x_j\}_{j=1}^N$ в E_n, причем*

$$\sum_{j=1}^{N} x_j = \theta; \ \|x_j\| \leqslant \varepsilon \ \ (j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ N).$$

Существует такое упорядочение этого множества (обозначим его снова $\{x_j\}_{j=1}^N$), что

$$\left\|\sum_{j=1}^{\nu} x_j\right\| \leqslant K_n \cdot \varepsilon \ \ (\nu=1,\ 2,\ \ldots\ N),$$

где K_n зависит только от размерности пространства.

Точное значение K_n неизвестно. В [2] (см. также [3]) получено

$$K_n \leqslant \sqrt{\frac{4^n-1}{3}}.$$

1. До сих пор оставался открытым вопрос — допускает ли теорема Штейница обобщение на бесконечномерные пространства.

В этом пункте предлагается обобщение теоремы Штейница на бесконечномерное F-пространство (s), элементами которого являются всевозможные числовые последовательности $x=\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, а метрика определена формулой

$$\rho(x,\ y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|};\ (x=\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty},\ y=\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}) \tag{1}$$

Лемма 1. *Дано конечное множество векторов $\{x_j\}_{j=1}^N$ в (s), причем*

$$\sum_{j=1}^{N} x_j=\theta;\ \rho(x_j,\ \theta)\leqslant\varepsilon\ (\varepsilon<1,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ N).$$

Существует такое упорядочение этого множества $\{x_j\}_{j=1}^{N}$, *что*

$$\rho\left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j, \theta\right) \leqslant \frac{5}{2}\sqrt[3]{2\varepsilon} \quad (\nu = 1, 2, \ldots N). \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим n-мерное подпространство $s^{(n)} \subset s$, образованное векторами, у которых только первые n координат могут быть отличными от нуля. Установим соотношения, связывающие в этом подпространстве метрику (1) и евклидову метрику.

$$\rho(x, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\xi_i|}{1+|\xi_i|} \leqslant \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2}}{1+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2}} = \frac{\|x\|_{E_n}}{1+\|x\|_{E_n}}. \tag{3}$$

Неравенство противоположного смысла имеет такой вид:

$$\rho(x, \theta) \geqslant \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|x\|_{E_n}}{1+\|x\|_{E_n}}. \tag{4}$$

Докажем его. Обозначим $\frac{|\xi_i|}{1+|\xi_i|} = \eta_i$, так, что $0 \leqslant \eta_i < 1$. Тогда

$$\rho(x, \theta) \geqslant \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\xi_i|}{1+|\xi_i|} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \eta_i. \tag{5}$$

С другой стороны, так как $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|$, то

$$\frac{\|x\|_{E_n}}{1+\|x\|_{E_n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\eta_i}{1-\eta_i}}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\eta_i}{1-\eta_i}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i^3 + \cdots}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i^2 + \cdots} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \cdot 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i^2 + \cdots}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i + \cdots} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i. \tag{6}$$

Сопоставляя (5) и (6), получаем неравенство (4). Неравенства (3) и (4) описывают изоморфизм между пространствами $s^{(n)}$ и E_n. Обозначим естественную проекцию $x \in s$ на подпространство $s^{(n)}$ через $x^{(n)}$. Спроектируем множество $\{x_j\}_{j=1}^{N}$ на $s^{(n)}$ и к полученной совокупности $\{x_j^{(n)}\}_{j=1}^{N}$ применим лемму Штейница (требуемое упорядочение снова обозначим $\{x_j^{(n)}\}_{j=1}^{N}$):

$$\left\|\sum_{j=1}^{\nu} x_j^{(n)}\right\|_{E_n} \leqslant K_n \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \|x_j^{(n)}\|_{E_n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots N). \tag{7}$$

Применяя последовательно (3), (4) и (7), получаем:

$$\rho\left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j,\ \theta\right) \leqslant \rho\left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j^{(n)},\ \theta\right) + \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\left\| \sum_{j=1}^{\nu} x_j^{(n)} \right\|_{E_n}}{1 + \left\| \sum_{j=1}^{\nu} x_j^{(n)} \right\|_{E_n}} + \frac{1}{2^n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_n \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \| x_j^{(n)} \|_{E_n}}{1 + K_n \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \| x_j^{(n)} \|_{E_n}} + \frac{1}{2^n} \leqslant K_n \frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \| x_j^{(n)} \|_{E_n}}{1 + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \| x_j^{(n)} \|_{E_n}} + \frac{1}{2^n} \leqslant K_n \cdot 2^n \times$$

$$\times \max_{1\leqslant j\leqslant N} \rho(x_j,\ \theta) + \frac{1}{2^n} \leqslant 4^n \cdot \varepsilon + \frac{1}{2^n}. \tag{8}$$

Так как последнее неравенство верно при любом n, его правую часть можно минимизировать по n. Окончательно получим (2), что и требовалось доказать.

Теорема Штейница в (s) выводится из леммы 1 точно так же, как в пространстве E_n из леммы Штейница (см. [3]).

2. В этом пункте докажем аналог теоремы Штейница в равномерно-гладких пространствах Банаха.

Пусть X — банахово пространство. Модуль гладкости пространства X определяется следующим образом:

$$\rho(\tau) = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=\tau}} \left(\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1 \right) \quad (\tau \geqslant 0). \tag{9}$$

Функция $\rho(\tau)$ — положительная, выпуклая, возрастающая; справедливы неравенства

$$\rho(\tau) \leqslant \tau \quad (\tau \in [0,\ \infty]),$$
$$\rho(\tau) \geqslant \sqrt{1+\tau^2} - 1 \quad (\tau \in [0,\ \infty]). \tag{10}$$

Существует действительное число $\alpha \geqslant 4$ такое, что

$$\rho(2\tau) \leqslant \alpha\rho(\tau) \quad (\tau \in [0,\ \infty]). \tag{11}$$

Неравенства (10) и (11) были доказаны Линденштраусом [5]. Пространство называется равномерно-гладким, если

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\rho(\tau)}{\tau} = 0.$$

Теорема. *Пусть дан условно сходящийся ряд векторов*

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j \tag{12}$$

в равномерно-гладком пространстве. Если ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho(\|x_j\|) < \infty, \tag{13}$$

то область сумм ряда (12) есть смещенное подпространство.

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 2. *Дано конечное множество векторов* $\{x_j\}_{j=1}^{N}$ *в* X, *причем*

$$\sum_{j=1}^{N} x_j = \theta,$$
$$\sum_{j=1}^{N} \rho(\|x_j\|) \leqslant 1. \tag{14}$$

Существует такое упорядочение этого множества (обозначим его снова $\{x_j\}_{j=1}^N$), что

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\nu} x_j \Big\| < e^{2\alpha}(1+\sqrt{3}) \Big[\sum_{j=1}^{N} \rho(\|x_j\|)\Big]^{\log_\alpha 2} \quad (\nu = 1,\ 2 \ldots N). \tag{15}$$

Доказательство. Для краткости обозначим через

$$\lambda = \Big[\sum_{j=1}^{N} \rho(\|x_j\|)\Big]^{-\log_\alpha 2} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \|x_j\|.$$

В качестве первого вектора возьмем любой из множества $\{x_j\}_{j=1}^N$ Пусть $S_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} x_j$ и пусть для всех $m \leqslant \nu$ выполняется $\|S_m\| \leqslant \frac{1}{\lambda} + \varepsilon$, а $\|S_\nu + y\| \geqslant \frac{1}{\lambda} + \varepsilon$, где y любой вектор из оставшихся векторов множества $\{x_j\}_{j=1}^N$.

Через f_ν обозначим нормированный линейный опорный функционал к S_ν; $x_{\nu+1}$ выберем так, чтобы $f_\nu(x_{\nu+1}) \leqslant 0$. Этот выбор всегда возможен, ибо если допустить, что для всех x_j при $\nu < j \leqslant N$ $f_\nu(x_j) > 0$, то суммируя по j эти неравенства, получим

$$f_\nu\Big(\sum_{j=\nu+1}^{N} x_j\Big) > 0,$$

а

$$f_\nu\Big(\sum_{j=\nu+1}^{N} x_j\Big) = f_\nu(-S_\nu) = -\|S_\nu\| \leqslant 0.$$

Пусть $x,\ y \in X$ и $\|x\| = \|y\| = 1$.

Покажем, что

$$\|x + hy\| \leqslant 1 + hf(y) + 2\rho(|h|), \tag{16}$$

где f — нормированный линейный опорный функционал к x. В силу (9)

$$2\rho(|h|) \geqslant \|x + hy\| + \|x - hy\| - 2.$$

Так как $f(x - hy) \leqslant \|x - hy\|$, то

$$2\rho(|h|) \geqslant \|x + hy\| + f(x - hy) - 2$$

Если заменить $f(x)$ единицей, получим (16). Положим в (16)

$$x = \frac{S_\nu}{\|S_\nu\|}, \quad y = \frac{x_{\nu+1}}{\|x_{\nu+1}\|}, \quad h = \frac{\|x_{\nu+1}\|}{\|S_\nu\|}$$

и вспомним, что $f_\nu(x_{\nu+1}) \leqslant 0$, а

$$\|S_\nu + x_{\nu+1}\| \leqslant \|S_\nu\| \Big[1 + 2\rho\Big(\frac{\|x_{\nu+1}\|}{\|S_\nu\|}\Big)\Big].$$

Так как $\rho(\tau)$ возрастающая функция, а

$$\|S_\nu\| \geqslant \|S_{\nu+1}\| - \|x_{\nu+1}\| > \frac{1}{\lambda},$$

то

$$\|S_{\nu+1}\| \leqslant \|S_\nu\| [1 + 2\rho(\lambda \|x_{\nu+1}\|)].$$

Отсюда следует, что

$$\|S_\nu\| \leqslant \left(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)\prod_{j=1}^{N}[1+2\rho(\lambda\|x_j\|)] \quad (\nu=1,\ 2\ \ldots N).$$

Так как $\ln(1+a)<a$ при $a>0$, то

$$\ln\|S_\nu\| \leqslant \ln\left(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)+2\sum_{j=1}^{N}\rho(\lambda\|x_j\|). \tag{17}$$

Существует натуральное число n такое, что

$$2^{n-1} \leqslant \lambda < 2^n. \tag{18}$$

Отсюда

$$n \leqslant \log_\alpha 2\lambda\cdot\log_2\alpha. \tag{19}$$

Из монотонности функции $\rho(\tau)$ и неравенств (17), (11), (18), (19) следует, что

$$\ln\|S_\nu\| < \ln\left(\varepsilon+\frac{1}{\lambda}\right)+2\alpha^n\cdot\sum_{j=1}^{N}\rho(\|x_j\|) \leqslant \ln\left(\varepsilon+\frac{1}{\lambda}\right)+2\alpha.$$

Потенцируя последнее неравенство, получим

$$\|S_\nu\| < e^{2\alpha}\left(\varepsilon+\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\nu=1,\ 2\ \ldots N). \tag{20}$$

В силу (10) и (14)

$$1 \geqslant \sum_{j=1}^{N}\rho(\|x_j\|) \geqslant \sqrt{1+\varepsilon^2}-1.$$

Отсюда

$$\varepsilon \leqslant \sqrt{3}\left[\sum_{j=1}^{N}\rho(\|x_j\|)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Из (20) и (21) вытекает (15), что и требовалось доказать.

Дальше доказательство теоремы ведется точно так же, как и доказательство теоремы Штейница в пространстве E_n (см., например, [3]). Неизвестно, насколько условие (13) необходимо.

Кадец [4] доказал, что если ряд (12) в L^p сходится условно и

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^p < \infty \text{ при } 1<p\leqslant 2$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^2 < \infty \text{ при } p\geqslant 2,$$

то областью сумм ряда (12) является смещенное подпространство.

Известно [5], что L^p $(p>1)$ равномерно гладко с модулем гладкости

$$\rho(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\tau^p}{p}+0(\tau^{2p}) & \text{при } 1<p\leqslant 2\\ (p-1)\tau^2+0(\tau^4) & \text{при } p\geqslant 2.\end{cases}$$

Следовательно, указанная теорема Кадеца является частным случаем теоремы нашей заметки.

В заключение автор выражает глубокую благодарность М. И. Кадецу за постановку задач и руководство в процессе их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Steinitz. Bedingt Konvergente Reihen und Konvexe Sisteme, Journal f. d. reine und angew. Math. 143, 128—175, 144, 1—40, 1913.

2. V. Bergström. Ein neuer Beweis eines Satzes von. E. Steinitz, Abhandlungen aus dem matematischen Seminar der Hamburgishen Universität, 8. Bd., 148—152, 1931.

3. М. И. Кадец. Об одном свойстве векторных ломаных в n-мерном пространстве. УМН, VII, в. 1 (53) 139—143, 1953.

4. М. И. Кадец. Об условно сходящихся рядах в пространстве L^p. УМН, IX, в. 1 (59), 107—109, 1954.

5. J. Lindenstrauss. On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces, Michigan Math. J., 10, № 3, 241—252, 1963.

Поступила 1 ноября 1966 г.