ОБ ИЗМЕРИМОСТИ СИММЕТРИЧЕСКИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

И. Н. Песин

Действительная конечная функция $f(x)$ называется симметрически непрерывной в точке x_0, если

$$f(x_0+h)-f(x_0-h)\xrightarrow{h\to 0}0. \qquad (1)$$

Мы рассматриваем функцию, симметрически непрерывную в каждой точке интервала (a, b). В настоящее время мы весьма далеки от понимания смысла локальной симметрии множеств и, в частности, графиков функций. Так, нам неизвестна конструктивная характеристика симметрически непрерывных функций, т. е. неизвестно, входят ли такие функции в классификацию Бэра. Вместе с тем они давно привлекали внимание математиков (Штейнгауз, Мазуркевич, Серпинский, Хаусдорф и др.), интересовавшихся тем, насколько разрывными могут быть симметрически непрерывные функции. Тем не менее о симметрически непрерывных функциях, не подчиненных никаким дополнительным ограничениям, до последнего времени известен был единственный результат, принадлежащий Фриду [1]: *функция, симметрически непрерывная в точках резидуального множества*, непрерывна на резидуальном множестве*. Нерешенным остается вопрос о мощности множества точек разрыва [2]. Цель настоящей заметки — доказать, что множество точек разрыва почти всюду симметрически непрерывной функции имеет меру нуль (теорема без доказательства была сообщена в [3]).

Срезанные функции симметрически непрерывной функции также симметрически непрерывны, поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда функция ограничена. Итак, пусть $f(x)$ ограничена и удовлетворяет условию (1) в почти всех точках x интервала (a, b); мы предположим на время, что множество A точек симметрического разрыва есть множество 1-ой категории. Наряду с функцией $f(x)$ рассмотрим функцию $\omega(x)$ — колебание функции $f(x)$ в точке x. Функция $\omega(x)$ полунепрерывна и, как показывает простая проверка, симметрически непрерывна во всякой точке симметрической непрерывности функции $f(x)$. На основании сформулированной выше теоремы Фрида мы заключаем, что множество $E_0=\{x:\omega(x)=0\}$ нулей функции $\omega(x)$ образует резидуал; свойство полунепрерывности сверху функции $\omega(x)$ позволяет нам теперь заключить, что множество ее точек непрерывности совпадает с множеством E_0 и всюду плотно на (a, b). Теорема будет доказана, если мы покажем, что $m\breve{E}_0=b-a$. Рассуждая от противного, мы придем к тому, что при некотором положительном α множество $E_\alpha=\{x:\omega(x)>\alpha\}$ имеет положитель-

* Резидуальным множеством, или резидуалом, называют множество, дополнительное к множеству первой категории.

ную меру. Положим $\mathcal{E}_k = \left\{x : \omega(x+t) - \omega(x-t) < \varepsilon,\ |t| < \frac{1}{k}\right\}$. Из представления $E_\alpha = E_\alpha \cap A + \sum\limits_k E_\alpha \cap \mathcal{E}_k$ получим, что при некотором n множество $E_\alpha \cap \mathcal{E}_n$ имеет положительную внешнюю меру. Пусть x_0 — точка внешней плотности этого множества; она же подавно является точкой плотности множества E_α. Дальнейшие рассмотрения будут происходить в окрестности Δ точки x_0 длины, меньшей $\frac{1}{n}$ и такой, что плотность (внешняя) множеств E_α и $E_\alpha \cap \mathcal{E}_n$ в ней превышает $^9/_{10}$. Пусть $x_1 \in \Delta$, и $\omega(x_1) = 0$. Для всякого x, принадлежащего $\Delta \cap E_\alpha$, $\omega(x) - \omega(x_1) = \omega(x) > \alpha$; если теперь заставить x пробегать все множество $\Delta \cap E_\alpha$, то в силу предположенных свойств окрестности Δ, может случиться, что средняя точка $\frac{x + x_1}{2}$ непременно попадет в точку из $\Delta \cap E_\alpha \cap \mathcal{E}_n$, и мы получим противоречие, если с самого начала возьмем ε меньше α. Таким образом, теорема доказана для случая, когда функция $f(x)$ симметрически разрывна на множестве A меры нуль и первой категории.

Симметрическая непрерывность функции $\omega(x)$ была ранее замечена Маркусом [4]; отметим определенное сходство схемы доказательства со схемой, использованной Хинчиным [5] при доказательстве дифференцируемости функций с конечным симметрическим растяжением. А. Я. Хинчин считает исследуемые функции заранее измеримыми и предлагает доказательство их измеримости [5, стр. 213] читателю. Тем не менее ситуация оказалась здесь более сложной, и само доказательство измеримости оказывается, по-видимому, не более простым, чем доказательство упомянутой теоремы в [5].

Откажемся теперь от предположения о том, что множество A первой категории. Предыдущие рассуждения не могут быть повторены из-за невозможности применить теорему Фрида; множество точек симметрической *непрерывности может оказаться априори не резидуальным. То, что* на самом деле это не так, следует из рассмотрения некоторой функции, почти всюду равной нулю. Именно, рассмотрим функцию

$$\omega_s(x) = \limsup_{h \to 0} (f(x+h) - f(x-h)).$$

Заметим, что, как следует из недавних результатов С. П. Пономарева [6], для случая произвольной функции $f(x)$ функция $\omega_s(x)$ может оказаться неизмеримой. Если $f(x)$ симметрически непрерывна в точке x_0, то, как легко проверить, таковой является также $\omega_s(x)$. Следовательно, для нашего случая $\omega_s(x)$ почти всюду равна нулю и почти всюду симметрически непрерывна. Покажем, что при всяком положительном a множество

$$E_a = \{x : \omega_s(x) > a\}$$

нигде не плотно. Предположим, что E_a плотно на сегменте T. Представим T в следующем виде:

$$T = A \cap T + \sum_k T \cap \mathcal{E}_k, \quad \mathcal{E}_k = \left\{x : \omega_s(x+t) - \omega_s(x-t) < \varepsilon, \quad |t| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, придем к множеству $\mathcal{E}_n$, имеющему $x_0 \in T$ точкой внешней плотности, и достаточно малой окрестности Δ точки x_0. *Роль точки x_1 играет теперь точка из Δ, в которой $\omega_s(x_1) > a$.*

Как и ранее, противоречие получится, если ε меньше a. Таким образом, множество $\{x : \omega_s(x) > 0\}$, т. е. множество A оказывается множеством первой категории. Теорема полностью доказана.

Как теорема Фрида, так и предложенная теорема могут быть перенесены на случай n-мерного евклидового пространства. Сформулируем следующую проблему: будет ли функция $f(x)$, определенная на (a, b) и симметрически непрерывная на некотором измеримом множестве, почти всюду непрерывна на этом множестве? В случае, если $f(x)$ измерима, известен утвердительный ответ.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Fried. Sur les fonctions symétriquement continues. Fund. Math., 29, 134—136, 1937.

2. F. Hausdorff. Probleme 62. Fund. Math., 25, 578, 1935.

3. И. Н. Песин. Вимірність майже всюди симетрично неперервних функцій. Доповіді та повідомлення Львівськ. держ. ун-ту, в. 9, ч. II, 23, 1961.

4. С. Маркус. Об одной проблеме Гаусдорффа. Бюллетень польской академии наук, т. IV, № 4, 195 — 199, 1956.

5. A. Khintchine. Recherches sur la structure des fonctions mesurables. Fund. Math. 9, 212—280, 1927.

6. С. П. Пономарев. О некоторых вопросах симметрической непрерывности и симметрической дифференцируемости. Автореф. канд. дисс., ЛГУ, Львов, 1966.

Поступила 7 июня 1966 г.