ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В АППРОКСИМАЦИОННОЙ ТЕОРЕМ КРОНЕКЕРА—ВЕЙЛЯ

И. Л. Вербицкий

Одной из основных теорем диофантова анализа является теоре Кронекера—Вейля. Ее можно сформулировать в такой форме. Пу имеются n линейно независимых вещественных чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$, n любы вещественных чисел $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и n положительных меньших едини чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Рассмотрим систему из неравенств:

$$|t\omega_j - \eta_j| < \varepsilon_j \pmod 1.$$

Если обозначить множество всех вещественных решений (1), попавш на интервал $a \leqslant t \leqslant a + T$, через $E_a(T)$, то равномерно по a

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\operatorname{mes} E_a(T)}{T} = 2^n \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n.$$

Соотношение (2) можно записать в виде

$$\operatorname{mes} E_a(T) = (2\varepsilon_1) \ldots (2\varepsilon_n) T + \varphi_a(T),$$

где равномерно по a $\varphi_a(t) = o(T)$ при $T \to \infty$.

Кроме того, множество решений системы (1) относительно плотн т. е. существует такое число $l > 0$, что всякий интервал длины l сод жит по крайней мере одно из решений системы.

В настоящей статье при некоторых дополнительных предположени относительно чисел ω_j и ε_j найдены оценки $\varphi_a(T)$ при $T \to \infty$.

Этим вопросом в несколько иной форме занимались раньше Ге и А. Островский [1, 2, 3, 4]. В частности, Гекке в работе [1] доказ что если α — алгебраическое число степени k, то для числа $N(x)$ ре ний неравенства (относительно неизвестных m и n) $0 \leqslant m\alpha - n \leqslant \rho$, п дополнительном условии $0 \leqslant m \leqslant x$ при целых m, n верно соотноше

$$N(x) = \rho x + O(x^{1 - \frac{2}{k} + \delta})$$

для любого $\delta > 0$. В той же работе доказано, что если $\rho = \{q\alpha\}$ *, г q — любое целое число, то $N(x) = \rho x + O(1)$.

А. Островский позднее показал [3], что при условии $\rho = \{q\alpha\}$ и ет место оценка $|N(x) - \rho x| \leqslant q$.

В работах [2] и [4] А. Островский детально исследовал связь ме поведением $N(x)$ при $x \to \infty$ и скоростью аппроксимации числа α раци нальными дробями. Среди прочих результатов в конце работы [4] А. О ровский сформулировал без доказательства следующую теорему.

---

* Через $\{\alpha\}$ обозначается дробная часть числа β.

Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — линейно независимые числа, и существуют такие константы $c > 0$, $r > 0$, что для каждого $t > 1$ и всех целых m_ν, $|m_\nu| \leqslant t$ выполняется неравенство

$$|m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n + m_{n+1}| \geqslant \frac{1}{ct^r},$$

то существует такое $\varkappa$, $0 < \varkappa < 1$, что число векторов $(\{\mu\alpha_1\}, \ldots, \{\mu\alpha_n\}) \times \times (\mu = 1, 2, \ldots, x)$, попавших в любой находящийся в кубе $0 \leqslant x_\nu \leqslant 1$ параллелепипед объема τ, равно

$$\rho x + 0(x^\varkappa).$$

А. Островский [4, стр. 46] обещал доказать эту теорему в одной из следующих статей, но нам не удалось разыскать это доказательство.

В настоящей работе с помощью метода, отличного от методов А. Островского и Гекке, доказано несколько теорем о поведении $\varphi_a(t)$. В частности, для решений системы (1) доказаны теоремы, аналогичные сформулированным выше теоремам Гекке и А. Островского. Мы получаем также оценку второго члена асимптотики в общей эргодической теореме Вейля.

Работа состоит из шести параграфов. В первом параграфе доказана применяющаяся в дальнейшем теорема, дающая достаточное условие существования дробного интеграла Вейля ограниченной почти периодической функции Степанова (S — п. п. ф.). Эта теорема аналогична теореме Бора о почти периодичности интеграла от почти периодической функции и представляет, как нам кажется, самостоятельный интерес. Здесь же приводится формулировка теоремы Б. М. Левитана о необходимых условиях существования интеграла у п. п. ф.

Во втором параграфе дана оценка $\varphi_a(t)$ сверху для случая $n = 2$.

В третьем параграфе указывается аналогичная оценка при произвольном n и при $n = 3$ приводится подробное доказательство.

В четвертом параграфе для случая $n = 2$ выясняется связь между поведением $\varphi_a(t)$ и арифметической природой чисел ε_1, ε_2.

В параграфе пять найдены оценки $\varphi_a(t)$ снизу, и в параграфе шесть дана оценка остаточного члена в общей эргодической теореме Вейля.

Мы будем пользоваться общепринятой терминологией теории почти-периодических функций (см., например, [8], [9]).

§ 1. Наш метод основан на двух теоремах о дробных интегралах от почти периодических функций Степанова.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — ограниченная S — п. п. ф. с рядом Фурье $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(\lambda_k)e^{i\lambda_k x}$, причем $a(0) = 0$.*

Если имеет место оценка

$$\left|\int_0^x f(t+u)\,dt\right| < M|x|^{1-\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

где M^0 не зависит от u, то при любом $\varepsilon \in (0, \alpha)$ у $f(x)$ существует дробный интеграл в смысле Вейля порядка $\alpha-\varepsilon$, являющийся п. п. ф. Бора. Другими словами, существует п. п. ф. Бора $f^{(-\alpha+\varepsilon)}(x)$, имеющая своим рядом Фурье ряд

$$f^{(-\alpha+\varepsilon)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a(\lambda_k)}{|\lambda_k|^{\alpha-\varepsilon}} \exp\left(i\lambda_k x - i\pi\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|}\right).$$

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *В предположениях теоремы равномерно относительно* x, $-\infty < x < \infty$, *сходится интеграл* $g(x) = \int\limits_0^\infty \frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du$.

Доказательство. Пусть $|f(x)| \leqslant M_1$, $\left|\int\limits_0^x f(t+u)\,dt\right| \leqslant M_2 |x|^{1-\alpha}$.

Обозначим $\int\limits_0^u f(x-t)\,dt = \Phi(x, u)$. Тогда имеем

$$\left|\int\limits_A^B \frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right| = \left|\int\limits_A^B u^{\alpha-1-\varepsilon} d_u \Phi(x, u)\right| = \left| u^{\alpha-1-\varepsilon}\Phi(x, u)\Big|_{u=A}^{u=B} + \right.$$
$$\left. + (1-\alpha+\varepsilon)\int\limits_A^B u^{\alpha-2-\varepsilon}\Phi(x, u)\,du\right| \leqslant 2M_2 A^{-\varepsilon} + M_2(1-\alpha+\varepsilon)\int\limits_A^B \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} \to 0$$

при A, $B \to \infty$,
откуда и следует доказываемое утверждение.

Лемма 2. Функция $g(x)$, *определенная в лемме 1, есть п. п. ф. Бора.*

Доказательство. В силу леммы 1 для любого $\varepsilon_1 > 0$ можно выбрать число $N > 0$ такое, что

$$\int\limits_N^\infty \frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du < \frac{\varepsilon_1}{3}. \tag{4}$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_0^\delta \frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right| < M_1 \int\limits_0^\delta \frac{du}{u^{1-\alpha+\varepsilon}} < \frac{\varepsilon_1}{12}.$$

Пусть τ является $k\varepsilon_1$-смещением $f(x)$, где $k > 0$. Покажем, что при надлежащем выборе k число τ будет также ε_1-смещением функции $g(x)$. Оценим разность $g(x+\tau) - g(x)$. Используя (4), имеем

$$|g(x+\tau) - g(x)| = \left|\int\limits_0^\infty \frac{f(x-u+\tau) - f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int\limits_0^N \frac{f(x-u+\tau) - f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right| + \left|\int\limits_N^\infty \frac{f(x-u+\tau)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right| + \left|\int\limits_N^\infty \frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right| \leqslant \frac{2\varepsilon_1}{3} +$$
$$+ \left|\int\limits_0^N \frac{f(x-u+\tau) - f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right|.$$

Оставшийся неоцененным интеграл разобьем на три части:

$$\left|\int\limits_0^N \frac{f(x-u+\tau) - f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right| \leqslant \left|\int\limits_0^\delta \frac{f(x-u+\tau)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right| + \left|\int\limits_0^\delta \frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right| +$$
$$+ \left|\int\limits_\delta^N \frac{f(x-u+\tau) - f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right| < \frac{\varepsilon_1}{6} + \left|\int\limits_\delta^N \frac{f(x-u+\tau) - f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right|.$$

Имеем

$$\left|\int\limits_{\delta}^{N}\frac{f(x-u+\tau)-f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\,du\right|=\left|\frac{1}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}\int\limits_{\delta}^{u}[f(x-t+\tau)-f(x-t)]\,dt\,\Big|_{u=\delta}^{u=N}+\right.$$

$$\left.+(1-\alpha+\varepsilon)\int\limits_{\delta}^{N}\frac{1}{u^{2-\alpha+\varepsilon}}\left\{\int\limits_{\delta}^{u}[f(x-t+\tau)-f(x-t)]\,dt\right\}du\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{N^{1-\alpha+\varepsilon}}\int\limits_{\delta}^{N}[f(x-t+\tau)-f(x-t)]\,dt+(1-\alpha+\varepsilon)\int\limits_{\delta}^{N}\frac{du}{u^{2-\alpha+\varepsilon}}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\int\limits_{\delta}^{u}[f(x-t+\tau)-f(x-t)]\,dt\right\}\right|\leqslant kN^{\alpha-\varepsilon}\varepsilon_1+kN\varepsilon_1\delta^{\alpha-1-\varepsilon}.$$

Это выражение будет меньше $\frac{\varepsilon_1}{6}$, если выбрать $k=\min\left(\frac{1}{24\,N^{\alpha-\varepsilon}},\frac{\delta^{1-\alpha+\varepsilon}}{12N}\right)$.
Отсюда ясно, что $|g(x+\tau)-g(x)|\leqslant\varepsilon_1$.
Лемма 2 доказана.

В дальнейшем покажем, что $g(x)$ с точностью до умножения на константу и есть функция $f^{(-\alpha+\varepsilon)}(x)$, существование которой утверждается в теореме. Для этого надо найти ряд Фурье $g(x)$. Так как $g(x)$ определяется через интеграл, сходящийся неабсолютно, то для нахождения ряда Фурье $g(x)$ приходится прибегнуть к искусственному приему. Обозначим

$$g_z(x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}e^{-zu}du.$$

Покажем, что $g_z(x)\to g(x)$ при $z\downarrow 0$ равномерно по x, $-\infty<x<\infty$. Для этого рассмотрим разность

$$g(x)-g_z(x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}(1-e^{-zu})\,du=\int\limits_0^{M}\frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}(1-e^{-zu})\,du+$$

$$+\int\limits_M^{\infty}\frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}du-\int\limits_M^{\infty}\frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}e^{-zu}du=I_1+I_2-I_3.$$

Так как $f(x)$ — ограниченная функция, то

$$\int\limits_0^{M}\frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}(1-e^{-zu})\,du\to 0 \text{ при } z\downarrow 0$$

равномерно по x при любом конечном M.
Оценим интеграл I_3:

$$\int\limits_M^{\infty}\frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}e^{-zu}du=e^{-zu}\int\limits_M^{u}\frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha+\varepsilon}}dt\,\Big|_{u=M}^{u=\infty}+z\int\limits_M^{\infty}e^{-zu}\left[\int\limits_M^{u}\frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha+\varepsilon}}dt\right]du=$$

$$=z\int\limits_M^{\infty}e^{-zu}\left[\int\limits_M^{u}\frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha+\varepsilon}}dt\right]du\to 0 \text{ при } M\to\infty$$

равномерно по всем $z > 0$, и $-\infty < x < \infty$, так как в силу леммы 1 при M, $N \to \infty$ равномерно по x, $-\infty < x < \infty$,

$$\int_M^N \frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha+\varepsilon}}\,dt \to 0.$$

Выберем теперь настолько большое M, что

$$\max\left(\left|\int_M^\infty \frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}e^{-zu}du\right|,\ \left|\int_M^\infty \frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}du\right|\right) < \frac{\delta_1}{3},$$

и затем, фиксируя M, настолько малое z, что $\left|\int_0^M \frac{f(x-u)}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}(1-e^{-zu})\,du\right| < \frac{\delta_1}{3}$. Тогда $|g(x) - g_z(x)| < \delta_1$ при всех x, и наше утверждение доказано. Легко видеть также, что $g_z(x)$ — п. п. ф. Бора. Найдем ряд Фурье $g_z(x)$. Ввиду абсолютной сходимости интеграла можно поменять порядок взятия среднего и интегрирования т. е.

$$\mathop{\mathfrak{M}}_x\{g_z(x)e^{-i\lambda x}\} = \int_0^\infty \frac{\mathop{\mathfrak{M}}\limits_x\{f(x-u)e^{-i\lambda x}\}}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}e^{-zu}du = \begin{cases} a(\lambda_k)\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-u(z+i\lambda_k)}}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}du & \text{при } \lambda = \lambda_k \\ 0 & \text{при } \lambda \neq \lambda_k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$g_z(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(\lambda_k)\int_0^\infty \frac{e^{-u(z+i\lambda_k)}}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}du \cdot e^{i\lambda_k x}.$$

Легко проверить, что при $z \downarrow 0$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda_k u}}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}e^{-zu}du \to \int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda_k u}}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}du.$$

Так как равномерно по x, $-\infty < x < \infty$, $g_z(x) \to g(x)$ при $z \downarrow 0$, то коэффициенты Фурье $g_z(x)$ сходятся к соответствующим коэффициентам Фурье $g(x)$. Если $g(x) \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c(\lambda_k)e^{i\lambda_k x}$, то

$$c(\lambda_k) = \lim_{z\downarrow 0} a(\lambda_k)\int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda_k u}}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}e^{-zu}du = a(\lambda_k)\int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda_k u}}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}du.$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda_k u}}{u^{1-\alpha+\varepsilon}}du = \frac{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}{|\lambda_k|^{\alpha-\varepsilon}}\exp\left(-i\pi\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|}\right),$$

то

$$g(x) \sim \Gamma(\alpha-\varepsilon) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a(\lambda_k)}{|\lambda_k|^{\alpha-\varepsilon}} \exp\left(i\lambda_k x - i\pi \frac{\alpha-\varepsilon}{2} \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|}\right),$$

откуда $f^{(-\alpha+\varepsilon)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)} g(x)$.

Тем самым теорема доказана.

Вторая нужная нам теорема — это теорема Б. М. Левитана [5], мы ее назовем теоремой 2.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — почти периодическая функция Бора, у которой существует дробный интеграл Вейля порядка α. Тогда*

$$\left|\int_0^x f(t+u)\,dt\right| < A|x|^{1-\alpha},$$

де $A = A(\alpha)$ зависит от α и не зависит от u и x.

Доказательство этой теоремы приводится в указанной работе Б. М. Левитана. Если в этом доказательстве заменить функцию $f(x)$ ее стекловским средним $\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$ и затем перейти к пределу при $h \to 0$, то можно получить утверждение теоремы для ограниченной S — п. п. ф. В дальнейшем будем теорему 2, обобщенную таким образом, называть теоремой 2′.

§ 2. Теорема Кронекера-Вейля, сформулированная во введении, может быть доказана методами теории почти периодических функций [8]. Это делается так. Обозначим через $\chi(t)$ характеристическую функцию множества решений системы (1). Оказывается [8], что эта функция почти периодична по Степанову, и свободный член ее ряда Фурье $a(0)$ равен $2^n\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$. Теорема Кронекера-Вейля вытекает из этого факта в силу определения свободного члена ряда Фурье п. п. ф.:

$$a(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} \chi(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\operatorname{mes} E_a(T)}{T}.$$

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться обозначениями:

$$f(t) = \chi(t) - a(0),$$

$$f(t) \sim \sum_{k_1,\ldots,k_n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sin 2\pi\varepsilon_1 k_1 \ldots \sin 2\pi\varepsilon_n k_n}{k_1 \ldots k_n} \exp\left[2\pi i \sum_{j=1}^{n} k_j\omega_j(t+\eta_j)\right]$$

штрих означает отсутствие свободного члена).

Так как в дальнейшем мы будем оценивать сумму модулей или сумму квадратов модулей коэффициентов этого ряда, а при этих оценках не существенны множители при коэффициентах ряда, равные по модулю единице, то, не уменьшая общности, можем положить $\eta_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ и счтиать

$$f(t) \sim \sum_{k_1,\ldots,k_n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sin 2\pi\varepsilon_1 k_1 \ldots \sin 2\pi\varepsilon_n k_n}{k_1 \ldots k_n} \exp\left(2\pi i \sum^{n} k_j\omega_j t\right).$$

Очевидно, что функция $\varphi_a(t) = \operatorname{mes} E_a(t) - a(0)\,t$ представима в виде

$$\varphi_a(t) = \int\limits_a^{a+t} f(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t f(\tau + a)\,d\tau,$$

и, таким образом, является интегралом от ограниченной S — п. п. ф. Поэтому, если мы найдем условия, при которых у $f(t)$ существует дробный интеграл какого-либо порядка, то с помощью теоремы 2′ мы сможем оценить $\varphi_a(t)$ сверху, а если мы укажем условия, при которых у $f(t)$ заведомо не существует дробного интеграла какого-либо порядка, то, применяя теорему 1, мы оценим $\varphi_a(t)$ снизу.

Будем сначала рассматривать наиболее простой случай $n = 2$, а затем обобщим полученные результаты.

В случае $n = 2$

$$f(t) \sim \sum_{k,\, l=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sin 2\pi\varepsilon_1 k \cdot \sin 2\pi\varepsilon_2 l}{kl} e^{2\pi i(k\omega_1 + l\omega_2)t}.$$

Запишем формально дробный интеграл некоторого порядка β для $f(t)$. Получим ряд

$$\frac{1}{(2\pi)^\beta} \sum_{k,\, l=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\varepsilon_1 k \cdot \sin 2\pi\varepsilon_2 l}{kl} \exp\left[-\frac{i\beta\pi}{2}\frac{k\omega_1 + l\omega_2}{|k\omega_1 + l\omega_2|} + 2\pi i(k\omega_1 + l\omega_2)\,t\right]. \qquad (5)$$

Очевидно, дробный интеграл существует, если ряд (5) сходится абсолютно, и не существует, если не сходится сумма квадратов коэффициентов ряда (5) (условия только достаточные). Обозначим $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \alpha$ * и рассмотрим ряд

$$|\omega_2|^\beta \sum_{k,\, l=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{kl\,|k\omega_1 + l\omega_2|^\beta} = \sum_{k,\, l=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{kl\,|k\alpha + l|^\beta} = \sum_{k,\, l=1}^{\infty} + \sum_{k,\, l=-\infty}^{-1} +$$

$$+ \sum_{k=1,\, l=-\infty}^{k=\infty,\, l=-1} + \sum_{k=-\infty,\, l=1}^{k=-1,\, l=\infty} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

Легко видеть, что ряды S_1 и S_2 сходятся при любом положительном α. Ряды S_3 и S_4 ничем существенным друг от друга не отличаются, поэтому достаточно рассмотреть один из них. Рассмотрим, например, S_3. Пусть α таково, что для любых целых p и q

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^m}, \qquad (6)$$

где c, m — фиксированные константы (в частности, (6) верно, если α — алгебраическое число степени m). Имеем

$$S_3 = \sum_{k=1,\, l=-\infty}^{k=\infty,\, l=-1} \frac{1}{kl\,|k\alpha + l|^\beta} = \sum_{k,\, l=1}^{\infty} \frac{1}{kl\,|k\alpha - l|^\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\beta}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l\left|\alpha - \frac{l}{k}\right|^\beta}.$$

---

* Так как ω_1 и ω_2 предполагаются несоизмеримыми, то α — иррациональное число. Не уменьшая общности, можно считать $\omega_1 > \omega_2$, т. е. $\alpha > 1$.

Преобразуем внутреннюю сумму

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l\left|\alpha-\frac{l}{k}\right|^{\beta}}=\sum_{l=1}^{[k\alpha]-1}+\sum_{l=[k\alpha]}^{[k\alpha]+1}+\sum_{l=[k\alpha]+2}^{\infty}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3.$$

Оценим сначала σ_3:

$$\sigma_3=\sum_{l=[k\alpha]+2}^{\infty}\frac{1}{l\left|\alpha-\frac{l}{k}\right|^{\beta}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(l+[k\alpha]+1)\left(\frac{l+1-\{k\alpha\}}{k}\right)^{\beta}}<k^{\beta}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{\beta}(l+k\alpha)}.$$

(Здесь и в дальнейшем $[\alpha]$ — целая часть числа α). Далее, для σ_2

$$\sigma_2=\frac{1}{[k\alpha]\left|\alpha-\frac{[k\alpha]}{k}\right|^{\beta}}+\frac{1}{([k\alpha]+1)\left|\alpha-\frac{[k\alpha]+1}{k}\right|^{\beta}}<\frac{2}{[k\alpha]}\frac{k^{m\beta}}{c^{\beta}}<c_1k^{m\beta-1},$$

где c_1 не зависит от k.

Из оценок σ_2 и σ_3 следует, что

$$S_3<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{\beta}(l+k\alpha)}+c_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2+(1-m)\beta}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{[k\alpha]-1}\frac{1}{l\,|k\alpha-l|^{\beta}}=S_3^{(1)}+S_3^{(2)}+S_3^{(3)}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{\beta}(l+k\alpha)}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{\beta}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(l+k\alpha)},$$

а

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(l+k\alpha)}\sim\frac{1}{l}\ln\left(1+\frac{l}{\alpha}\right)\ \text{при}\ l\to\infty,$$

то $S_3^{(1)}<\infty$.

Аналогично можно показать, что

$$S_3^{(3)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l\,|k\alpha-l|^{\delta}}<\infty.$$

Таким образом, если

$$S_3^{(2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2+(1-m)\beta}}<\infty, \tag{7}$$

то и ряд S_3 сходится. Но (7) справедливо, если $\beta<\frac{1}{m-1}$.

Следовательно, при выполнении условия (2) у $f(x)$ существует дробный интеграл порядка $\frac{1}{m-1}-\varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. В этом случае по теореме 2'

$$\left|\int_0^x f(t-u)\,dt\right|<A\,|x|^{1-\frac{1}{m}+\varepsilon}.$$

Итак, нами получена следующая теорема.

Теорема 3. *Если* α *таково, что для некоторых положительных констант* C, m *и любых целых* p, q

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^m},$$

то

$$\sup_{-\infty < a < \infty} |\varphi_a(x)| < A\,|x|^{1-\frac{1}{m-1}+\varepsilon},$$

где A — *постоянная, зависящая от* C *и* m.

Замечание. Отметим, что при доказательстве теоремы 3 нами был получен следующий результат: если ω_1 и ω_2 — линейно независимые числа, то ряд

$$\sum_{k,\, l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{kl\,|k\alpha + l|^{\beta}},$$

в котором $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, сходится при любом $\beta \in (0, 1]$.

§ 3. Рассмотрим теперь случай $n = 3$.

$$f(t) \sim \sum_{k_1,\, k_2,\, k_3=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\varepsilon_1 k_1 \cdot \sin 2\pi\varepsilon_2 k_2 \cdot \sin 2\pi\varepsilon_3 k_3}{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{3} k_j \omega_j t\right).$$

Пусть числа ω_1, ω_2, ω_3 таковы, что

$$|k_1\omega_1 + k_2\omega_3 + k_3\omega_3| > \frac{C}{t^m}, \tag{8}$$

если $|k_1| < t$, $|k_2| < t$, $|k_3| < t$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k_1,\, k_2,\, k_3=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3|^{\beta}\,|k_1 k_2 k_3|} = S$$

и докажем, что при $0 < \beta < \frac{1}{m}$ он сходится.

Заметим, что ряд $\sum\limits_{k_1,\, k_2,\, k_3=1}^{\infty} \frac{1}{|k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3|^{\beta}\, k_1 k_2 k_3}$ сходится при любых положительных ω_1, ω_2, ω_3. Поэтому надо исследовать остающуюся часть ряда S, ту, в которой k_1, k_2, k_3 не все имеют одинаковые знаки. Достаточно исследовать сумму

$$S' = \sum_{\substack{k_1,\, k_2=1 \\ k_3=-\infty}}^{\substack{k_3=-1 \\ k_1,\, k_2=\infty}} \frac{1}{|k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3|^{\beta}\, k_1 k_2\, |k_3|} =$$

$$= |\omega_3|^{-\beta} \sum_{k_1,\, k_2,\, k_3=1}^{\infty} \frac{1}{|k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - k_3|^{\beta}\, k_1 k_2 k_3},$$

$$\alpha_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2},\quad \alpha_2 = \frac{\omega_2}{\omega_3}.$$

Остальные части S исследуются аналогично.

Интересующий нас ряд распишем следующим образом:

$$\omega_3^\beta S' = \sum_{k_1,\,k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_1k_2} \sum_{k_3=1}^{\infty} \frac{1}{|k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-k_3|^\beta k_3} =$$

$$= \sum_{k_1,\,k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_1k_2}\left(\sum_{k_3=[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]+2}^{\infty} + \sum_{k_3=1}^{[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]+1} \right) = \sum_{k_1,\,k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_1k_2}(S_1'+S_2').$$

Оценим сначала первую из сумм, стоящих в скобках.

$$S_1' \leqslant \sum_{k_3=1}^{\infty} \frac{1}{k_3^\beta([k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]+k_3+1)} < \sum_{k_3=1}^{\infty} \frac{1}{k_3^\beta(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3)} < \frac{1}{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+1} +$$

$$+ \int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+x)} = \frac{1}{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+1} + \frac{1}{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)^\beta} \int_{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)}^{\infty} \frac{du}{u^\beta(1+u)} <$$

$$< \frac{1}{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+1} + \frac{1}{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)^\beta} \int_0^\infty \frac{du}{u^\beta(1+u)} = \frac{1}{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+1} + \frac{\pi}{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)^\beta \sin \pi\beta}.$$

Отсюда ясно, что

$$\sum_{k_1,\,k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_1k_2} \sum_{k_3=[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]+2}^{\infty} \frac{1}{|k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-k_3|^\beta k_3} < \infty.$$

Преобразуем теперь вторую сумму

$$S_2' = \sum_{k_3=1}^{[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]-1} \frac{1}{|k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-k_3|^\beta k_3} + \frac{1}{[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\}^\beta} +$$

$$+ \frac{1}{([k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]+1)(1-\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\})^\beta}.$$

Меняя порядок суммирования в сумме

$$\sum_{k_1,\,k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_1k_2} \sum_{k_3=1}^{[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]-1} \frac{1}{k_3|k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-k_3|^\beta},$$

убеждаемся, что она конечна при любом $\beta > 0$. Заметим, что условие (8) эквивалентно условию

$$|k_1\omega_1+k_2\omega_2+k_3\omega_3| > \frac{c_1}{(|k_1|+|k_2|+|k_3|)^m}.$$

Поэтому верна оценка

$$(\omega_3)^{-\beta}\left(\frac{1}{[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\}^\beta} + \frac{1}{([k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]+1)(1-\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\})^\beta}\right) <$$

$$< \frac{2(|k_1|+|k_2|+|[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]+1|)^{m\beta}}{c_1^\beta[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]}.$$

В свою очередь $\displaystyle\sum_{k_1,\,k_2=1}^{\infty} \frac{(k_1+k_2+1+[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2])^{m\beta}}{k_1k_2[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]} < \infty$, если $m\beta < 1$.

Значит, $S<\infty$ *при* $m\beta<1$, *следовательно,* $f(t)$ *имеет дробный интеграл порядка* $\frac{1}{m}-\varepsilon$, где $\varepsilon\in\left(0,\ \frac{1}{m}\right)$. Применяя теорему 2', получаем

$$\left|\int_0^x f(t+u)\,dt\right|<A\,|x|^{1-\frac{1}{m}+\varepsilon}.$$

Тем самым для $n=3$ доказана теорема.

Теорема 3'. *Если числа* $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n$ *таковы, что* $|k_1\omega_1+\cdots+k_n\omega_n|>\frac{c}{t^m}$ *при* $|k_j|<t$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$, *то справедлива оценка* $|\varphi_a(x)|<Ax^{1-\frac{1}{m}+\varepsilon}$, *где* A — *постоянная, зависящая лишь от* m, c *и* n.

Доказательство этой теоремы в случае произвольного n может быть проведено таким же образом, как и в случае $n=3$, но будет значительно более громоздким.

§ 4. В теоремах 3 и 3' мы не учитывали арифметическую природу чисел $\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n$. Здесь, ограничиваясь случаем $n=2$, мы покажем, что поведение $\varphi_a(t)$ зависит от чисел ε_1, ε_2. Формальный ряд Фурье для $\varphi_a(t)$ мажорируется рядом

$$S=\frac{1}{2\pi}\sum_{k_1,\,k_2=-\infty}^{\infty}\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_1k_1|}{|k_1|}\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_2k_2|}{|k_2|}\frac{1}{|k_1\omega_1+k_2\omega_2|}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\omega_2}\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_1k_1|}{|k_1|}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_2k_2|}{|k_2|\,|k_1\alpha+k_2|},\quad \alpha=\frac{\omega_1}{\omega_2}. \tag{9}$$

Из замечания к теореме 3 следует, что если сходится ряд

$$\tilde S=\sum_{k_1=1}^{\infty}\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_1k_1|}{k_1}\left(\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_2\,[\alpha k_1]|}{[\alpha k_1]\,\{\alpha k_1\}}+\frac{\sin 2\pi\varepsilon_2\,([\alpha k_1]+1)}{([\alpha k_1]+1)(1-\{\alpha k_1\})}\right),$$

то сходится и весь ряд S. Для исследования ряда $\tilde S$ оценим дроби $\frac{\sin 2\pi\varepsilon_1k_1|}{\{\alpha k_1\}}$ и $\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_1k_1|}{1-\{\alpha k_1\}}$. Легко видеть, что для любого целого числа ν и любого вещественного числа β имеет место неравенство $\{\nu\beta\}\leqslant\nu\{\beta\}$. Пусть теперь $\varepsilon_1=\{\nu\alpha\}$, где ν — произвольное целое число. Тогда, очевидно,

$$|\sin 2\pi\varepsilon_1k_1|=|\sin 2\pi k_1\{\nu\alpha\}|=|\sin 2\pi\{k_1\{\nu\alpha\}\}|\leqslant$$
$$\leqslant 2\pi\{k_1\{\nu\alpha\}\}=2\pi\{k_1\nu\alpha\}\leqslant 2\pi\nu\{k_1\alpha\}.$$

Отсюда получаем $\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_1k_1|}{\{k_1\alpha\}}\leqslant 2\pi\nu$.

Обозначим теперь $\{k_1\alpha\}=1-\beta$. Тогда $k_1\alpha=[k_1\alpha]+1-\beta$, откуда следует $|\sin 2\pi\varepsilon_1k_1|=|\sin 2\pi\nu\beta|\leqslant 2\pi\nu\beta$. Таким образом, имеем неравенство $\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_1k_1|}{1-\{\alpha k_1\}}\leqslant 2\pi\nu$.

Возвращаясь к ряду $\tilde S$, мы видим, что

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_1k_1|}{k_1}\left(\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_2\,[k_1\alpha]|}{[\alpha k_1]\,\{\alpha k_1\}}+\frac{|\sin 2\pi\varepsilon_2\,([\alpha k_1]+1)|}{([\alpha k_1]+1)(1-\{\alpha k_1\})}\right)\leqslant 4\pi\nu\sum_{k_1=1}^{\infty}\frac{1}{k_1\,[\alpha k_1]}<\infty.$$

Итак, нами получена

Теорема 4. *Если* $\varepsilon_{1,2} = \left\{\nu \frac{\omega_1}{\omega_2}\right\}$ *или* $\varepsilon_{1,2} = \left\{\nu \frac{\omega_2}{\omega_1}\right\}$, *где* ν — *любое целое число, то*

$$\sup_{-\infty < a < \infty} |\varphi_a(x)| < \infty.$$

§ 5. Все предыдущие рассмотрения были посвящены оценке роста $\varphi_a(t)$ сверху. Можно оценить рост $\varphi_a(t)$ снизу, пользуясь теми же методами. Докажем следующую теорему (для случая $n = 2$).

Теорема 5. *Если* $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ — *такое иррациональное число, что для любого целого* $m > 0$ *найдутся такие целые* p *и* q, *что*

$$|\alpha q - p| < \frac{c}{q^m},$$

то для всех $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *из квадрата* $0 < \varepsilon_1 < 1$, $0 < \varepsilon_2 < 1$, *кроме множества плоской меры нуль, при любом* $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{|x| \to \infty}} \frac{\sup\limits_{-\infty < a < \infty} |\varphi_a(x)|}{|x|^{1-\varepsilon}} = \infty^*. \tag{10}$$

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что теорема не верна. Тогда на некотором множестве E изменения $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ положительной плоской меры μ для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $|\varphi_a(x)| < A|x|^{1-\varepsilon}$, где A на зависит от a и x. Следовательно, по теореме 1 существует дробный интеграл порядка $\frac{\varepsilon}{2}$ для функции $f(t)$:

$$f^{\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}(t) \sim \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\varepsilon_1 k_1 \cdot \sin 2\pi\varepsilon_2 k_2}{|k_1\omega_1 + k_2\omega_2|^{\varepsilon/2} k_1 k_2} \exp\left(-\frac{i\pi\varepsilon}{4} \frac{k_1\omega_1 + k_2\omega_2}{|k_1\omega_1 + k_2\omega_2|} + \right.$$
$$\left. + 2\pi i (k_1\omega_1 + k_2\omega_2) t\right),$$

и по неравенству Бесселя мы должны получить

$$S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{k_1, k_2}^{\infty} \frac{\sin^2 2\pi\varepsilon_1 k_1 \ \sin^2 2\pi\varepsilon_2 k_2}{|k_1\omega_1 + k_2\omega_2|^{\varepsilon} k_1^2 k_2^2} < \infty.$$

Проинтегрируем абсолютно сходящийся ряд $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ по множеству E. По теореме Лебега о стремлении к нулю коэффициентов Фурье абсолютно интегрируемой функции получаем, что

$$\lim_{|k_1|, |k_2| \to \infty} \iint_E \sin^2 2\pi\varepsilon_1 k_1 \ \sin^2 2\pi\varepsilon_2 k_2 \, d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 = \frac{\mu}{4}.$$

Отсюда следует

$$S = \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{|k_1\alpha + k_2|^{\varepsilon} k_1^2 k_2^2} < \infty, \ \left(\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \tag{11}$$

* Множество плоской меры нуль, о котором идет речь в теореме 5, не пусто, так как из теоремы 4 следует, что оно содержит отрезки прямых $0 < \varepsilon_{1,2} < 1$; $\varepsilon_{2,1} = \left\{\nu \frac{\omega_2}{\omega_1}\right\}$ и $0 < \varepsilon_{2,1} < 1$; $\varepsilon_{1,2} = \left\{\nu \frac{\omega_1}{\omega_2}\right\}$ (ν — любое целое число).

но по условию теоремы существует бесконечное множество таких пар (k_1, k_2), что

$$|\alpha k_1 - k_2| < \frac{1}{k^{4/\varepsilon}}. \qquad (12)$$

Для достаточно больших k_1, k_2, удовлетворяющих (12), очевидно, $\frac{1}{|k_1\alpha - k_2|^{\varepsilon} k_1^2 k_2^2} > \alpha^2$. Значит, ряд S содержит бесконечную последовательность членов, точная нижняя грань которой больше нуля, т. е. этот ряд расходится. Полученное противоречие с неравенством (11) доказывает теорему.

Некоторые из интересующих нас ε_1, ε_2 можно указать непосредственно. Обозначим для этого через k_{1j} — те числа k_1, для которых имеет место (12), и через k_{2j} — соответствующие им k_2. Если среди k_{1j} найдется бесконечное множество четных чисел, то положим $\varepsilon_1 = \frac{1}{2(2r+1)}$ (r — любое фиксированное целое число), а если бесконечного множества четных k_{1j} не найдется, то мы положим $\varepsilon_1 = \frac{1}{4r}$. Пусть, например, имеется бесконечное множество четных k_{1j}. Обозначим соответствующие им k_{2j} через k'_{2j}. Среди k'_{2j} найдется либо бесконечное множество четных — в этом случае положим $\varepsilon_2 = \frac{1}{2(2u+1)}$ — либо бесконечное множество нечетных — в этом случае положим $\varepsilon_2 = \frac{1}{4u}$ (u — любое целое число. Тогда для всех выбранных k'_{2j} и соответствующих им k_{1j}

$$\sin^2 2\pi\varepsilon_1 k_1 \cdot \sin^2 2\pi\varepsilon_2 k_2 \geqslant \frac{\pi^2}{(2u+1)(2r+1)}.$$

Итак, при таком выборе чисел ε_1, ε_2 ряд $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ содержит бесконечную последовательность членов, точная нижняя грань которой больше нуля, откуда $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \infty$.

Замечание. Из (10) следует, что $\varphi_a(x)$ ни при каком a не является ограниченной функцией. В самом деле, $\varphi_a(x) = \int\limits_0^x f(t+a)\,dt$. Если бы при каком-то a мы имели $|\varphi_a(x)| < C$, то при любом a имели бы $|\varphi_a(x)| < 2C$, т. е. $\sup\limits_{-\infty<a<\infty} |\varphi_a(x)| < 2C$. Точно таким же образом, как и теорема 5 может быть доказана

Теорема 6. *Если* $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ — *такое иррациональное число, что для некоторой бесконечной последовательности целых p и q и некоторого постоянного C имеет место неравенство*

$$|\alpha q - p| < \frac{C}{q^m},$$

то для всех ε_1, ε_2 из квадрата $0 < \varepsilon_1 < 1$, $0 < \varepsilon_2 < 1$, кроме множества плоской меры нуль, при любом $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}} \frac{\sup\limits_{-\infty<a<\infty} |\varphi_a(x)|}{|x|^{1-\frac{2}{m}-\varepsilon}} = \infty.$$

Эта теорема легко обобщается на случай произвольного n.

Теорема 7. *Если линейно независимые числа* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *таковы, что существует бесконечная последовательность «векторов»* $(k_1, \ldots, k_n)$, *для которых*

$$|k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n| < \frac{C}{t^m}, \quad t = \max_j(|k_j|),$$

то для всех $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *из гиперкуба* $0 < \varepsilon_\nu < 1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ *кроме, быть может, множества n-мерной меры нуль, при любом* $\varepsilon > 0$ *справедливо*

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}} \frac{\sup\limits_{-\infty<a<\infty} |\varphi_a(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{m}-\varepsilon}} = \infty.$$

§ 6. К рассмотренным выше задачам непосредственно примыкает вопрос об исследовании остаточного члена в общей эргодической теореме Вейля.

Пусть имеется почти периодическая функция

$$f(t) \sim \sum_{k_1, \ldots, k_n=-\infty}^{\infty} a(k_1, \ldots, k_n) \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{n} k_j\omega_j t\right).$$

Известно, что $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_a^{a+T} f(t)\,dt = a(0, \ldots, 0)$, т. е. $\int\limits_a^{a+T} f(t)\,dt = a(0, \ldots$ $\ldots, 0)T + \varphi_a(T)$, где $\varphi_a(T) = o(T)$ равномерно по a при $|T| \to \infty$. Функцию $\varphi_a(T)$ назовем остаточным членом в формуле Вейля. Легко может быть доказана

Теорема 8. *Если числа* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *таковы, что*

$$|k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n| > \left(\sum_{j=1}^{n} |k_j|\right)^{-m},$$

а коэффициенты $a(k_1, \ldots, k_n)$ *ряда Фурье* $f(t)$ *удовлетворяют условию*

$$|a(k_1, \ldots, k_n)| < \left(\sum_{j=1}^{n} |k_j|\right)^{-n-m-\varepsilon}$$

то

$$\int\limits_a^{a+T} f(\tau)\,d\tau = a(0, \ldots, 0)t + O(1) \text{ при } t \to \infty$$

$\left(\text{\textit{точнее}}, \sup\limits_{-\infty<a<\infty} |\varphi_a(t)| = \sup\limits_{-\infty<a<\infty} \left|\int\limits_a^{a+T} f(\tau)\,d\tau - a(0, \ldots, 0)t\right| < \text{const}\right)$.

Доказательство. Очевидно,

$$\int\limits_a^{a+t} f(\tau)\,d\tau - a(0, \ldots, 0)t = \int\limits_a^{a+t} [f(\tau) - a(0, \ldots, 0)]\,d\tau \sim$$

$$\sim C + \sum_{k_1, \ldots, k_n=-\infty}^{\infty} \frac{a(k_1, \ldots, k_n)}{2\pi i \sum\limits_{j=1}^{n} k_j\omega_j} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{n} k_j\omega_j t\right).$$

По условию теоремы имеем

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{a(k_1, \ldots, k_n)}{\sum\limits_{j=1}^{n} k_j \omega_j} \right| \leqslant \frac{C_2}{C_1} \sum_{k_1, \ldots, k_n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} |k_j| \right)^{-n-\varepsilon} < \infty.$$

Следовательно, функция $\varphi_a(t) = \int\limits_a^{a+t} [f(\tau) - a(0, \ldots, 0)]\, d\tau$ есть п. п. ф. Бора и, стало быть, ограничена, что и требовалось доказать.

Эта теорема обобщает одну теорему С. Гартмана [6] (к этому же кругу вопросов относится работа [7]).

Можно оценить снизу остаточный член в формуле Вейля, а также, используя теоремы 1 и 2, дать для него более общие оценки роста, чем в теореме 8.

Выражаю глубокую благодарность Б. Я. Левину за постановку задачи и обсуждение и И. В. Островскому за некоторые замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Hecke. Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins. Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität. Bd. 1 (1922), 3/4 Heft, S. 54—76.

2. A. Ostrowski. Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen. Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität. Bd. I, (1922), 3/4 Heft, S. 76—98.

3. A. Ostrowski. Zur Theorie der linearen Diophantischen Approximationen. Jaresbericht d. Deut. Math.-Vereinigung. Bd. 36 (1927). S. 179.

4. A. Ostrowski. Zur Theorie der linearen Diophantischen Approximationen. Jaresbericht d. Deut. Math.-Vereinigung. Bd. 39 (1930). S. 34—46.

5. Б. М. Левітан. Про ряди Fourier одного класу майже періодичних функцій. «Зап. наук.-дослідн. ін-ту математики і механіки і Харківського математичного товариства», серія 4, том XIV, 105—116, 1937.

6. S. Hartman. Sur une méthode d'estimation des moyennes de Weyl pour les fonctions périodiques et presque périodiques. Studia Math. 12, 1—24, 1951.

7. L. G. Peck. On Uniform Distribution of Algebraic Numbers. Proc. Amer. Math. Soc. 4, 440—443, 1953.

8. Б. М. Левитан. Почти-периодические функции. Гостехиздат, М., 1953.

9. Р. С. Гутер, Л. Д. Кудрявцев, Б. М. Левитан. Элементы теории функций. (Справочная математическая библиотека). Физматгиз, М., 1963.

Поступила 9 сентября 1966 г.