МНОГОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА — ХОПФА ДЛЯ КОНУСОВ

В. С. Рабинович

В статье рассматривается вопрос о решении в замкнутом виде уравнений, являющихся многомерными аналогами хорошо известного уравнения Винера — Хопфа

$$A\varphi = \varphi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty.$$

Введем некоторые определения и обозначения [3].

Определение 1. *Выпуклым конусом V_+ в n-мерном вещественном пространстве R^n называется всякое непустое множество $V_+ \subset R^n$, такое что:*

а) если $t \in V_+$ и $\lambda > 0$, то $\lambda t \in V_+$,

б) если $t, s \in V_+$, то $t + s \in V_+$,

в) множество V_+ не содержит прямой,

г) множество V_+ открыто в R^n.

Положим $V_- = \{t \in V_-,$ если $-t \in V_+\}$,

$$V_\pm^* = \left\{t \in V_\pm^*, \text{ если } (t, x) = \sum_{i=1}^n t_i x_i > 0, \ \forall x \in V_\pm\right\}.$$

Определение 2. *Трубчатой областью D в n-мерном комплексном пространстве C^n называется множество точек $z = x + iy$ таких, что $x \in R^n$, $y \in \operatorname{Im} D \subset R^n$ ($\operatorname{Im} D$ — основание трубчатой области). Типом D называется максимальный конус V_D, любой сдвиг вершины которого внутрь $\operatorname{Im} D$ помещается в $\operatorname{Im} D$. Если V_D не содержит прямых, то область D называется по существу ограниченной.*

Определение 3. *Пусть $a(t) = a(t_1, \ldots, t_n)$ — непрерывная положительная функция, причем $a(t+s) \leqslant a(t)\,a(s)$ $(t, s \in R^n)$.*

Будем говорить, что $\varphi(t) \in L_p^{\langle a \rangle}(\Omega)$ $(\Omega \subset R^n)$, если

$$\|\varphi\|_{L_p^{\langle a \rangle}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|\varphi(t)|\,a(t))^p\,dt\right)^{1/p} < \infty \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Через $L_\infty^{\langle a \rangle}(\Omega)$ обозначим пространство существенно ограниченных с весом $a(t)$ функций и нормой

$$\|\varphi\|_{L_\infty^{\langle a \rangle}(\Omega)} = \sup_{t \in \Omega} \operatorname{ess} \frac{\varphi(t)}{a(t)} < \infty.$$

Будем рассматривать следующее уравнение:

$$A\varphi = \varphi(t) - \int_{V_+} k(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t), \quad t \in V_+, \tag{*}$$

где

$$k(t) \in L^{\langle a\rangle}(R^n), \quad f(t) \in L_p^{\langle a\rangle}(V_+), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

При $n=1$ конус $V_+ = (0, \infty)$ — правая полуось, и уравнение вида (*) подробно исследовано многими авторами (см., например, [1]). Оказалось, что A — оператор Нетера при следующем необходимом и достаточном условии:

$$1 - K(x) \neq 0, \quad x \in R^1 \cup \infty$$

($K(x)$ — преобразование Фурье ядра $k(t)$).

В работах [5], [6] исследовалось уравнение

$$A\varphi = \varphi(t) - \int_{R^n_+} k(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t), \quad t \in R^n \tag{**}$$

где

$$R^n_+ = \{x_1 > 0, \ -\infty < x_i < \infty\}, \quad k(t) \in L(R^n), \quad f(t) \in L_p(R^n_+).$$

В этих работах показано, что уравнение (**) имеет единственное решение в $L_p(R^n_+)$ $(1 < p < \infty)$ при следующем необходимом и достаточном условии:

$$1 - K(x) \neq 0, \quad x \in R^n \cup \infty. \tag{***}$$

Единственность решения в этом случае следует из того, что $R^n \cup \infty$ при $n > 1$ односвязно.

И. Б. Симоненко недавно показал, что уравнение (*) удовлетворяет теории Нетера, если конус V_+ гладкий (т. е. поверхность, которую он вырезает на единичной сфере, гладкая), при условии (***), которое является необходимым и достаточным для нётеровости ($a(t) \equiv 1$).

В данной работе решение уравнения (*) сводится к некоторой задаче линейного сопряжения для функций многих комплексных переменных в трубчатых областях типа $V^*_\pm$, так как естественной областью определения преобразования Фурье функции, сосредоточенной в $V_\pm$ и принадлежащей к $L^{\langle a\rangle}(V_\pm)$, является трубчатая область типа $V^*_\pm$ [3].

§ 1. 1°. В дальнейшем потребуются некоторые предложения теории коммутативных нормированных колец [2].

Комплексно-значные измеримые функции из $L^{\langle a\rangle}(R^n)$ $(L^{\langle a\rangle}(V_\pm))$ образуют коммутативное нормированное кольцо со сверткой в качестве умножения

$$u = f * p = \int_{R^n(V_\pm)} f(t-s)\,g(s)\,ds.$$

Кольцо, полученное из $L^{\langle a\rangle}$ формальным присоединением единицы δ, будем обозначать $\tilde{L}^{\langle a\rangle}$, норма в $\tilde{L}^{\langle a\rangle}$ задается следующим образом: если $\tilde{f} = \lambda\delta + f$, где λ — число, то

$$\|\tilde{f}\|_{\tilde{L}^{\langle a\rangle}} = |\lambda| + \|f\|_{L^{\langle a\rangle}}.$$

Для произвольного вектора $t \in R^n$ ($t \in V_\pm$) с направляющими косинусами $\omega = (\omega_1, \ldots \omega_n)$ положим

$$\alpha(\omega) = \lim_{|t| \to \infty} \frac{\ln a(t)}{-|t|}, \quad t = |t|\,\omega, \quad |t| = \left(\sum |t_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

$$\alpha_1(\omega) = \lim_{|t| \to \infty} \frac{\ln a(-t)}{|t|}.$$

Для любого направления $\omega = (\omega_1, \ldots \omega_n)$ имеют место следующие соотношения [7, стр. 260]:

$$-\infty < \alpha(\omega) \leqslant \alpha_1(\omega) < \infty, \tag{1.2}$$

причем

$$\alpha(-\omega) = \alpha_1(\omega).$$

Каждому элементу $\lambda\delta + f \in \tilde{L}^{\langle a \rangle}(R^n)$ ($\tilde{L}^{\langle a \rangle}(V_\pm)$) поставим в соответствие его преобразование Фурье по формуле

$$\lambda\delta + f \to \lambda + \int_{R^n(V_\pm)} f(t)\, e^{i(t,\, z)}\, dt = F(z). \tag{1.3}$$

Функции $F(z)$, определяемые формулой (1.3), образуют коммутативное нормированное кольцо $\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(R^n)$ ($\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(V_\pm)$) с нормой $\|F\|_{\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}} = \|f\|_{\tilde{L}^{\langle a \rangle}}$ и обычным умножением. Формула (1.3) устанавливает изоморфизм колец $\tilde{L}^{\langle a \rangle}$ и $\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}$ в силу известного свойства преобразований Фурье.

Функции $F(z) \in \mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(R^n)$ ($\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(V_\pm)$) аналитичны в соответствующей трубчатой области $M(R^n)$ ($M(V_\pm^*)$), где $M(R^n)$ — трубчатая область с выпуклым ограниченным основанием ($M(V_\pm^*)$ — существенно ограниченная область типа $V_\pm^*$).

Функция $\alpha(\omega)$, определенная формулой (1.1), является опорной для $\operatorname{Im} M(R^n)$ ($\operatorname{Im} M(V_\pm^*)$), т. е. для любого вектора $t \in R^n(V_\pm)$, где $t = |t|\,\omega$, имеем

$$(\omega, y) > \alpha(\omega), \quad y \in \operatorname{Im} M(R^n) \quad (y \in \operatorname{Im} M(V_\pm^*)).$$

Для доказательства аналитичности $F(z)$ оценим интеграл

$$\left| \int_{R^n(V_\pm)} f(t)\, e^{i(t,\, z)}\, dt \right| \leqslant \sup_{\substack{t \in R^n \\ (t \in V_\pm)}} \frac{e^{-(t,\, y)}}{a(t)} \int_{R^n(V_\pm)} a(t)\, |f(t)|\, dt.$$

Легко показать, что для $y \in \operatorname{Im} M(R^n)$ ($y \in \operatorname{Im} M(V_\pm^*)$) $\sup \frac{e^{-(t,\, y)}}{a(t)} < 1$, откуда следует абсолютная сходимость интеграла Фурье и аналитичность $F(z)$ в $M(R^n)$ ($M(V_\pm^*)$). Замыкание $M(R^n)$ $M(V_\pm^*)$ до бикомпакта одной бесконечно-удаленной точкой обозначим $\overline{M}(R^n)$ ($\overline{M}(V_\pm^*)$). Относительно пространства максимальных идеалов кольца $\tilde{L}^{\langle a \rangle}(R^n)$ ($\tilde{L}^{\langle a \rangle}(V_\pm)$) и изоморфного ему кольца $\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(R^n)$, ($\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(V_\pm^*)$) имеет место следующая

Теорема 1.1 [3]. Пространством максимальных идеалов колец

$$\tilde{L}^{\langle a \rangle}(R^n) \quad (\tilde{L}^{\langle a \rangle}(V_\pm^\mp)) \text{ и } \mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(R^n) \quad (\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(V_\pm))$$

является замыкание трубчатой области голоморфности $\overline{M}(R^n)$ ($\overline{M}(V_\pm^*)$).

Используя теорию аналитических функций от элементов нормированного кольца [2, § 13], получим теорему Винера—Леви.

Теорема 1.2. Пусть $\Phi(z)$ — однозначная аналитическая функция в области D многолистной римановой поверхности над C^1, $F(z) \in \mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(R^n)$ ($F(z) \in \mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(V_\pm)$), и замыкание множества значений, принимаемых $F(z)$, лежит в D. Тогда вместе с $F(z)$ кольцу $\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(R^n)$ ($\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(V_\pm^*)$) принадлежит и $\Phi(F(z))$.

Следствие. *Пусть $F(z) \neq 0$ для любого $z \in \overline{M}(R^n)$ и $F(\infty) = \lambda$, тогда* $\ln F(z) \in \mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(R^n)$, *т. е. существует такая функция $l(t) \in L^{\langle a \rangle}(R^n)$, что*

$$\ln F(z) = \lambda + \int\limits_{R^n} l(t)\, e^{i(t,z)}\, dt.$$

Так как $\overline{M}(R^n)$ при $n > 1$ односвязно, то из непрерывности $F(z) \neq 0$ при $z \in \overline{M}(R^n)$ следует возможность выбора однозначной ветви логарифма, такой, что

$$\ln F(\infty) = \lambda.$$

2°. Обозначим $R^n_{[\delta]}$ — октант в R^n, где δ — некоторый упорядоченный набор ± 1, причем ± 1 на i-м месте означает, что октант $R^n_{[\delta]}$ лежит в полупространстве $x_i \gtrless 0$. Пространство R^n разбивается в сумму 2^n октантов $R^n_{[\delta]}$.

Под факторизацией функции $G(z) \in \mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(R^n)$ будем понимать ее представление в виде произведения 2^n функций $G_{[\delta]}(z)$, аналитически продолжимых в трубчатые области $M(R^n_{[\delta]})$, т. е.

$$G(z) = \prod_{\delta} G_{[\delta]}(z). \tag{1.4}$$

Факторизацию назовем канонической, если $G_{[\delta]} \neq 0$ при $z \in \overline{M}(R^n)$.

Теорема 1.3. $G(z) \in \mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(R^n)$ допускает каноническую факторизацию тогда и только тогда, когда $G(z) \neq 0$ при $z \in \overline{M}(R^n)$.

При условии $G_{[\delta]}(\infty) = 1$ каноническая факторизация единственна.

В силу следствия теоремы 1.2 существует функция $l(t) \in L^{\langle a \rangle}(R^n)$ такая, что

$$\ln G(z) = \int\limits_{R^n} l(t)\, e^{i(t,z)}\, dt, \quad z \in \overline{M}(R^n).$$

Обозначим

$$G_{[\delta]}(z) = \exp\Big(\int\limits_{R^n_{[\delta]}} l(t) e^{i(z,t)}\, dt\Big).$$

На основании теоремы 1.2 и условия (1.3) существует функция $\gamma_{[\delta]}(t) \in L^{\langle a \rangle}(R^n_{[\delta]})$ такая, что

$$G_{[\delta]}(z) = 1 + \int\limits_{R^n_{[\delta]}} \gamma_{[\delta]}(t)\, e^{i(z,t)}\, dt. \tag{1.5}$$

Из (1.4) следует (1.2).

Единственность следует из того, что кольца $\mathfrak{R}^{\langle a \rangle}(R^n_{[\delta]})$ замкнуты, *Замечание.* Для того, чтобы в разложении (1.2) отсутствовал какой-либо из сомножителей $G_{[\delta]}(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $F^{-1}[\ln G(z)]=0$ в $R^n_{[\delta]}$, где F^{-1} — обратное преобразование Фурье.

Теорема 1.4. Для того, чтобы $G(z)\in\mathfrak{R}^{\langle a\rangle}(R^n)$ допускала представление

$$G(z)=G_+(z)\,G_-(z),\tag{1.6}$$

где $G_\pm(z)$ аналитичны в $M(V^*_\pm)$, необходимо и достаточно, чтобы

1) $G(z)\neq 0$ при $z\in\overline{M}(R^n)$,

2) $F^{-1}[\ln G(z)]=0$ вне $V_+\cup V_-$.

При условии $G_\pm(\infty)=1$ факторизация единственна.

Доказательство теоремы 1.4 проводится точно так же, как и теоремы 1.3. Теорема 1.4 при $a(t)\equiv 1$ содержится в работе [4].

§ 2. 1°. Рассмотрим следующее уравнение:

$$(E-K)\,\varphi\equiv\varphi(t)-\int\limits_{V+}k(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t),\ \ t\in V_+,\tag{*}$$

где

$$k(t)\in L^{\langle a\rangle}(R^n),\ \ f(t)\in L^{\langle a\rangle}(V_+).$$

Потребуем выполнения следующих условий:

1) $1-K(z)\neq 0$ при $z\in\overline{M}(R^n)$,

2) $F^{-1}[\ln(1-K(z)]=0$ вне $V_+\cup V_-$.

(Прописные буквы всюду обозначают преобразования Фурье функций, обозначаемых строчными).

Положим, как обычно,

$$\psi(t)=\begin{cases}0 & ,\ t\in V_+\\ -\int\limits_{V_+}k(t-s)\,\varphi(s)\,ds, & t\,\overline{\in}\,V_+,\end{cases}$$

тогда уравнение (*) можно переписать так:

$$\varphi(t)-\int\limits_{R^n}k(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t)+\psi(t),\quad t\in R^n.\tag{2.1}$$

Применяя к (2.1) преобразование Фурье, получим

$$(1-K(z))\Phi_+(z)=F_+(z)+\Psi(z),\ \ z\in M(R^n),\tag{2.2}$$

где $\Phi_+(z)$, $F_+(z)\in\mathfrak{R}^{\langle a\rangle}(V_+)$, $\Psi(z)$ такова, что $F^{-1}[\Psi(z)]=0$ в конусе V_+.

Из теоремы 1.4 следует, что

$$[1-K(z)]^{-1}=G_+(z)\,G_-(z),\tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned}G_+(z)&=1+\int\limits_{V+}\gamma_+(t)e^{i(z,t)}\,dt\in\mathfrak{R}^{\langle a\rangle}(V_+),\\ G_-(z)&=1+\int\limits_{V-}\gamma_-(t)e^{-i(z,t)}\,dt\in\mathfrak{R}^{\langle a\rangle}(V_-),\end{aligned}\tag{2.4}$$

и $\gamma_\pm(t)\in L^{\langle a\rangle}(V_+)$, $G_\pm(z)\neq 0$ $\forall z\in\overline{M}(V_\pm)$.

Отсюда в силу теоремы 1.1 имеем

$$G^{-1}_\pm(z)\in\mathfrak{R}^{\langle a\rangle}(V_\pm).$$

Из (2.2) и (2.3) получаем

$$G_+^{-1}\Phi_+ = G_-F_+ + G_-\Psi. \tag{2.5}$$

Обозначим через P_+ проектор из кольца $\mathfrak{N}^{\langle a\rangle}(R^n)$ в кольцо $\mathfrak{N}^{\langle a\rangle}(V_+)$, т. е.

$$P_+\left(\lambda + \int\limits_{R^n} k(t)\, e^{i(z,t)}dt\right) = \lambda + \int\limits_{V_+} k(t)\, e^{i(z,t)}\, dt.$$

Применяя к (2.5) проектор P_+, получим

$$G_+^{-1}\Phi_+ = P_+(G_-F_+) + P_+(G_-\Psi), \tag{2.6}$$

Покажем, что

$$P_+(G_-\Psi) = 0. \tag{2.7}$$

Действительно, используя правила композиции преобразований Фурье, получим

$$G_-\Psi = \int\limits_{R^n\setminus V_+} \psi(t)\, e^{i(z,t)}\, dt + \int\limits_{R^n} e^{i(z,t)}\, dt \int\limits_{\Omega_t} \psi(\tau)\,\gamma_-(\tau - t)\, d\tau,$$

где $\Omega_t = (t, \infty)_{V_+} \cap R^n\setminus V_+$, и $(t, \infty)_{V_+} = \{\tau\colon\ \tau - t \in V_+\}$ — луч в смысле конуса V_+. Так как $\Omega_t = \varnothing$, когда $t \in V_+$, то $P_+(G_-\Psi) = 0$.

Таким образом, из (2.6) и (2.7) следует, что если в $L^{\langle a\rangle}(V_+)$ существует решение уравнения (*), то оно единственно и его преобразование Фурье находится по формуле

$$\Phi_+ = G_+P_+(G_-F_+). \tag{2.8}$$

С другой стороны, для любой функции $f(t) \in L^{\langle a\rangle}(V_+)$ равенство (2.8) определяет функцию $\Phi_+(z) \in \mathfrak{N}^{\langle a\rangle}(V_+)$, и легко показать, что $F^{-1}[\Phi_+] = \varphi(t)$ есть действительно решение уравнения (*).

Из этих рассуждений следует, что оператор $E - K$ обратим в $L^{\langle a\rangle}(V_+)$. Из формулы (2.8), используя правила композиции преобразований Фурье, легко найти аналитическое выражение для $[E - K]^{-1}$:

$$\varphi = [E - K]^{-1}f = f(t) + \int\limits_{V_+} \gamma(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau, \tag{2.9}$$

где

$$\gamma(t, \tau) = \gamma_+(t - \tau) + \gamma_-(\tau - t) + \int\limits_{V_+} \gamma_+(t - s)\,\gamma_-(\tau - s)\, ds, \tag{2.10}$$

$\gamma_\pm(t)$ — функции, определяемые формулами (2.4) и исчезающие вне конуса $V_\pm$.

Для ядра $\gamma(t, \tau)$ справедлива следующая оценка:

$$|\gamma(t, \tau)| \leqslant r(t - \tau), \tag{2.11}$$

где $r(t) \geqslant 0$ для всех $t \in R^n$ и $r(t) \in L^{\langle a\rangle}(R^n)$. Действительно,

$$|\gamma(t, \tau)| \leqslant |\gamma_+(t - \tau)| + |\gamma_-(\tau - t)| + \int\limits_{R^n} |\gamma_+(t - s)|\,|\gamma_-(\tau - s)|\, ds =$$

$$= |\gamma_+(t - \tau)| + |\gamma_-(\tau - t)| + \int\limits_{R^n} |\gamma_+(t - \tau + s)|\,|\gamma_-(s)|\, ds = r(t - \tau),$$

и легко показать, что $r(t) \in L^{\langle a\rangle}(R^n)$.

Из оценки (2.11) следует, что оператор $[E-K]^{-1}$ действует как ограниченный из $L_p^{\langle a\rangle}(V_+)$ в $L_p^{\langle a\rangle}(V_+)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Таким образом, имеет место

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия*

1) $1-K(z) \neq 0$ *для* $z \in \overline{M}(R^n)$,

2) $F^{-1}[\ln(1-K(z))]=0$ *вне* $V_+ \cup V_-$, *тогда оператор* $E-K$ *обратим в* $L_p^{\langle a\rangle}(V_+)$, *а уравнение* (*) *имеет единственное решение для любой правой части* $f(t) \in L_p^{\langle a\rangle}(V_+)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. *Решение уравнения* (*) *дается формулами* (2.9), (2.10).

Замечание. Результат, полученный в теореме 2.1, аналогичен результату работы Крейна [1] для $n=1$, когда индекс оператора $E-K$ равен нулю.

3°. Пусть $n=2$, $R^2=R_{++} \cup R_{-+} \cup R_{--} \cup R_{+-}$, где $R_{\pm\mp}$—соответствующие квадранты R^2. Будем рассматривать уравнение

$$\varphi(t)-\int_{R_{++}} k(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t), \quad t \in R_{++}. \tag{A}$$

Условие 2) теоремы 2.1 заменим следующим более ослабленным условием:

2[1]) $F^{-1}[\ln(1-K(z))]=0$, в R_{+-}, тогда уравнение (A) также допускает решение в замкнутом виде.

Полагая

$$\psi(t)=\begin{cases}-\int\limits_{R_{++}} k(t-s)\varphi(s)\,ds, & t\,\overline{\in}\,R_{++}\\ 0 & t \in R_{++},\end{cases}$$

уравнение (A) можно переписать так:

$$\varphi(t)-\int_{R^2} k(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t)+\psi(t), \quad t \in R^2. \tag{2.12}$$

Применяя к (2.12) преобразование Фурье, получим

$$\Phi_{++}(z)(1-K(z))=F_{++}(z)+\Psi(z), \quad z \in \overline{M}(R^n). \tag{2.13}$$

В силу условий 1) и 2[1]) $1-K(z)$ допускает следующую факторизацию:

$$1-K(z)=G_+(z)G_{--}^{-1}(z), \quad z \in \overline{M}(R^n), \tag{2.14}$$

где $G_+(z) \in \mathfrak{M}^{\langle a\rangle}(R_+)$, $R_+=\{x_2>0,\ -\infty<x_1<\infty\}$ и $G_{--}(z) \in \mathfrak{M}^{\langle a\rangle}(R_{--})$, т. е.

$$G_+(z)=1-\int_{R_+}\gamma_+(t)e^{i(z,t)}\,dt, \quad z \in M(R_+), \tag{2.15}$$

$$G_{--}(z)=1-\int_{R_{++}}\gamma_{--}(t)e^{-i(z,t)}\,dt, \quad z \in M(R_{--}),$$

Соотношение (2.13), используя (2.14), перепишем как

$$G_+(z)\Phi_{++}(z)=G_{--}(z)F(z)+G_{--}(z)\Psi(z). \tag{2.16}$$

Применяя к (2.16) проектор P_{++} и учитывая, что

$$P_{++}(G_{--}(z)\Psi(z))=0,$$

получим

$$P_{++}(G_+(z)\Phi_{++}(z))=P_{++}(G_{--}(z)F(z)). \tag{2.17}$$

Из соотношения (2.17) следует, что

$$\int\limits_{R_{++}} e^{i(z,t)}[\varphi(t)-\int\limits_{R_{++}}\gamma_+(t-s)\varphi(s)\,ds]\,dt=\int\limits_{R_{++}} e^{i(z,t)}\omega(t)\,dt, \tag{2.18}$$

где

$$\omega(t)=F^{-1}P_{++}(G_{--}(z)F(f)).$$

Легко показать, что $\omega(t)\in L^{\langle a\rangle}(V_+)$, если $f(t)\in L^{\langle a\rangle}(V_+)$. Соотношение (2.18) означает, что каждое решение уравнения (A) есть решение уравнения

$$\varphi(t)-\int\limits_{R_{++}}\gamma_+(t-s)\varphi(s)\,ds=\omega(t),\quad t\in R_{++}, \tag{2.19}$$

где $\gamma_+(t)=0$ вне R_+.

Нетрудно видеть, что каждое решение уравнения (2.19) есть решение уравнения (A), и следовательно, (2.19) и (A) равносильны.

Покажем, что (2.19) имеет единственное решение. Дополняя, как и раньше, уравнение (2.19) так, чтобы оно имело место на всем R_+, и применяя преобразование Фурье, получим

$$G_+(z)\Phi(z)=\Omega(z)+Q_{-+}(z),\ z\in\overline{M}(R_+). \tag{2.20}$$

Вспомогательная функция $Q_{-+}(z)\in\mathfrak{N}^{\langle a\rangle}(R_{-+})$ вводится как обычно. Так как $G_+(z)\neq 0$ при $z\in\overline{M}(R_+)$, то возможно представление

$$G_+^{-1}(z)=G_{++}(z)G_{-+}(z). \tag{2.21}$$

Используя (2.21) и применяя P_{++} к (2.20), получим

$$\Phi=G_{++}P_{++}(G_{-+}P_{++}(G_{--}Ff)). \tag{2.22}$$

В силу (2.15) существует такая функция $\tilde{T}\in\mathfrak{N}^{\langle a\rangle}(R^n)$, что

$$\Phi=P_{++}((1-\tilde{T}(z))\ F(z))=F(f+F^{-1}P_{++}(\tilde{T}Ff))$$

или

$$\varphi=[E-K]^{-1}f=[E-F^{-1}P_{++}(\tilde{T}F)]f.$$

Оператор $A=F^{-1}\,P_{++}(\tilde{T}F)$ является оператором свертки с ядром $T=F^{-1}\tilde{T}\in L^{\langle a\rangle}(R^2)$ и действует как ограниченный оператор из $L_p^{\langle a\rangle}(R_{++})$ в $L_p^{\langle a\rangle}(R_{++})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

Теорема 2.2. *Пусть* $k(t)\in L^{\langle a\rangle}(R^2)$ *и выполняются следующие условия:*

1) $1-K(z)\neq 0,\ z\in\overline{M}(R^2)$,
2) $F^{-1}[\ln(1-K(z))]=0$ в R_{+-}.

Тогда уравнение (A) *имеет единственное решение для любой правой части* $f(t)\in L_p^{\langle a\rangle}(R_{++})$, *и решение также принадлежит* $L_p^{\langle a\rangle}(R_{++})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

К пунктам 2° и 3° § 2 относится следующее замечание. Легко показать, что оператор $[E-K]^{-1}$ является ограниченным оператором не только из $L_p^{\langle a\rangle}$ в $L_p^{\langle a\rangle}$, но также и из $L_q^{\langle a^{-1}\rangle}$ в $L_q^{\langle a^{-1}\rangle}$, где $L_q^{\langle a^{-1}\rangle}$— пространство, сопряженное к $L_p^{\langle a\rangle}$, и норма в $L_q^{\langle a^{-1}\rangle}$ вводится как

$$\|u\|=\left(\int\left(\frac{|u(t)|}{a(t)}\right)^q dt\right)^{1/q},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Следовательно, как уравнения (*), так и (А) имеют единственное решение в $L_q^{\langle a^{-1}\rangle}(1 \leqslant q \leqslant \infty)$.

Уравнение (А) эквивалентно следующей задаче линейного сопряжения для аналитических функций двух комплексных переменных:

$$G(z)\,\Phi_{++}(z) = F(z) + \Phi_{-+}(z) + \Phi_{--}(z), + \Phi_{+-}(z), \quad z \in M(R^2), \qquad (2.23)$$

где $G(z)$, $F(z) \in \mathfrak{R}^{\langle a\rangle}(R^2)$, $\Phi_{\pm\mp}$ — искомые аналитические функции.

Таким образом, задача (2.23) имеет единственное решение в классе $\mathfrak{R}^{\langle a\rangle}(R_{[\delta]})$ при следующих условиях: 1) $G(z) \neq 0$, $z \in \overline{M}(R^2)$, 2) $F^{-1}[\ln G(z)] = 0$, в R_{+-} и это решение дается формулой (2.22).

Автор выражает благодарность В. А. Какичеву за научное руководство, И. Б. Симоненко и С. Г. Гиндикину за советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. Интегральное уравнение на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргумента. УМН, с. XVIII, 5(83), 1958.

2. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, 1960.

3. С. Г. Гиндикин. Аналитические функции в трубчатых областях. ДАН СССР, т. 145, № 6, 1962.

4. В. С. Владимиров. Задача линейного сопряжения для голоморфных функций многих комплексных переменных. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 29(4), 1965.

5. Л. С. Гольденштейн. О многомерных интегральных уравнениях Винера — Хопфа. «Изв. АН Молд. ССР, сер. физ-матем. и техн.», № 6, 27—38, 1964.

6. Л. С. Гольденштейн, И. Ц. Гохберг. О многомерном интегральном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов и его дискретном аналоге. ДАН СССР, т. 131, № 1, 9—12, 1960.

7. Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила 7 декабря 1966 г.