КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В БИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

В. А. Какичев

I. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

§ 1. Задачи о скачке

1. 1°. **Одномерная краевая задача Римана** в простейшей постановке заключается в следующем [1], [2]. Найти пару функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, голоморфных соответственно в областях D^+ и D^-, по линейному соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),\ t \in C, \tag{1.1}$$

где $C = \partial D^+$ — простая замкнутая кривая, ограничивающая область D^+, D^- — дополняет $D^+ \bigcup C$ до расширенной плоскости, причем $z = 0 \in D^+$, а заданные функции $G(t)$ и $g(t)$ точек контура C удовлетворяют на нем условию Гельдера и $G(t) \neq 0$ на C.

При $g(t) \equiv 0$ задача (1.1) называется однородной, а при $g(t) \not\equiv 0$ — неоднородной.

Методика решения задачи Римана такова. Сначала с помощью формул Сохоцкого для интеграла типа Коши с плотностью, равной $g(t)$, решается задача о скачке: $G(t) = 1$. Затем с помощью обобщенной теоремы Лиувилля решается задача, которую мы назовем элементарной: $G(t) = t^{\varkappa}$, $g(t) = 0$. Наконец, методом факторизации однородная задача приводится к элементарной с $\varkappa = \mathrm{Ind}_C G$. Число $\varkappa$ называется индексом задачи (1.1). Неоднородная задача Римана также приводится к элементарной после факторизации и замены возникающего при этом свободного члена разностью предельных значений функций, голоморфных соответственно в D^+ и D^-.

В первой части настоящего сообщения изучаются двумерные задачи о скачке и элементарные задачи для функций голоморфных в бицилиндрических областях и удовлетворяющих условию линейного сопряжения вида (1.1) на общем остове границ рассматриваемых бицилиндрических областей. Возможности факторизации в применении к двумерным задачам нам представляются весьма ограниченными. Результаты, полученные этим методом, изложены во второй части работы.

Для двумерных задач линейного сопряжения, в отличие от одномерных, теория Нетера не всегда имеет место. Неоднородные задачи, как правило, разрешимы лишь при выполнении счетного множества необходимых и достаточных условий разрешимости, а однородные имеют конечное или счетное множество линейно независимых решений. Таким образом, здесь мы имеем дело со случаем задач, нормально разрешимых по Хаусдорфу [3]. Если к условию линейного сопряжения присоединить еще условия типа условий Коши для дифференциальных уравнений, заданных на двумерных «дисках», то у таких краевых задач линейного сопряжения число решений конечно. Недавно И. Б. Симоненко получил необходимые и достаточные условия нетеровости двумерных задач линейного сопряжения.

Отметим еще, что в [4] изучена задача линейного сопряжения для функций многих переменных, голоморфных в трубчатых областях. Читатель легко заметит, что результаты, полученные методом факторизации в данной работе, являются своеобразным дискретным аналогом соответствующих результатов работы [4].

Распространение полученных здесь фактов на случай n $(n > 2)$ переменных связано лишь с техническими трудностями. Краткое содержание данной работы было доложено на Международном конгрессе математиков [5] в августе 1966 г. в Москве.

1.2°. Интеграл типа Коши для бицилиндрических областей определяется формулой

$$F(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{C\times\Gamma} \frac{f(t, \omega)\, dt\, d\omega}{(t-z)(\omega - w)} \equiv K(f), \tag{1.2}$$

где $C = \partial D^+$ $(\Gamma = \partial\Delta^+)$ — простой гладкий замкнутый контур, $C\times\Gamma$ — остов (общая часть) границ бицилиндрических областей $D^+\times\Delta^+$, $D^+\times\Delta^-$, $D^-\times\Delta^+$ и $D^-\times\Delta^-$, ориентированных естественным образом; D^- (Δ^-) дополняет $D^+\cup C$ $(\Delta^+\cup\Gamma)$ до полной комплексной плоскости переменного $z\,(w)$; $z = 0 \in D^+$ $(w = 0 \in \Delta^+)$; $f(t, \omega) \in H(C\times\Gamma) \equiv H$, — функция, удовлетворяющая на $C\times\Gamma$ условию Гельдера.

Интеграл (1.2) определяет четыре функции $F^{\pm\pm}(z, w)$ и $F^{\pm\mp}(z, w)$, голоморфные соответственно в областях $D^\pm\times\Delta^\pm$ и $D^\pm\times\Delta^\mp$, т. е. ряды Лорана и Гартогса [6]

$$\begin{aligned}
F^{++}(z, w) &= \sum_{k,\, l=0}^{\infty} F_{kl} z^k w^l = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \varphi_k^+(w) = \sum_{l=0}^{\infty} w^l \psi_l^+(z),\\
F^{+-}(z, w) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} F_{k,-l} z^k w^{-l} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \varphi_k^-(w) = \sum_{l=1}^{\infty} w^{-l} b_l^+(z),\\
F^{-+}(z, w) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} F_{-k,l}\, z^{-k} w^l = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} a_k^+(w) = \sum_{l=0}^{\infty} w^l \psi_l^-(z),\\
F^{--}(z, w) &= \sum_{k,\, l=1}^{\infty} F_{-k,-l} z^{-k} w^{-l} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} a_k^-(w) = \sum_{l=1}^{\infty} w^{-l} b_l^-(z)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

сходятся абсолютно и равномерно в некоторых областях, принадлежащих соответственно $D^+\times\Delta^+$, $D^+\times\Delta^-$, $D^-\times\Delta^+$, $D^-\times\Delta^-$ и содержащих точки $(0, 0)$, $(0, \infty)$ и $(\infty, 0)$, (∞, ∞), а функции $\varphi_k^-(w)$, $a_k^-(w)$ и $\psi_l^-(z)$, $b_l^-(z)$ $(\psi_l^+(z)$, $b_l^+(z)$ и $\varphi_k^+(w)$, $a_k^+(w))$ голоморфны в областях Δ^- и D^- $(D^+$ и $\Delta^+)$.

Введем обозначения для двумерных дисков

$$D_0^\pm = \{(z, w): z\in D^\pm,\ w = 0\},\quad D_\infty^\pm = \{(z, w): z\in D^\pm,\ w = \infty\},$$

$$\Delta_0^\pm = \{(z, w): w\in\Delta^\pm,\ z = 0\},\quad \Delta_\infty^\pm = \{(z, w): w\in\Delta^\pm,\ z = \infty\},$$

и операторов дифференцирования

$$\frac{\partial}{\bar{\partial} z} = -z^2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial^k}{\bar{\partial} z^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\bar{\partial} z^{k-1}} \left(\frac{\partial}{\bar{\partial} z}\right), \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Используя эти обозначения, отметим, например, такие равенства, вытекающие из (1.3) и (1.2):

$$\frac{1}{k!\,l!} \frac{\partial^{k+l} F^{+-}(0, \infty)}{\partial z^k \bar{\partial} w^l} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{C \times \Gamma} f(t, \omega) \frac{\omega^{l-1}}{t^{k+1}} \, dt \, d\omega = F_{k,-l},$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, \ l = 1, 2, \ldots)$$

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k F^{\substack{++\\+-}}}{\partial z^k} \Bigg|_{\Delta_{\partial}^{\pm}} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_C \frac{dt}{t^{k+1}} \int\limits_\Gamma \frac{f(t, \omega)}{\omega - w} \, d\omega = \varphi_k^{\pm}(w), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{l!} \frac{\partial^l F^{\mp -}}{\bar{\partial} w^l} \Bigg|_{D_\infty^{\mp}} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_\Gamma \omega^{l-1} \, d\omega \int\limits_C \frac{f(t, \omega)}{t - z} \, dt = b_l^{\mp}(z), \quad l = 1, 2, \ldots .$$

Если плотность f интеграла (1.2) из класса H, то определяемые им голоморфные функции имеют следующие предельные значения [2], [7]:

$$4F^{\pm\pm}(t, \omega) = \lim_{(z,\, w) \to (t,\, \omega)} F^{\pm\pm}(z, w) = [(\pm I + S_t)(\pm I + S_\omega)] f,$$

$$4F^{\pm\mp}(t_1\, \omega) = \lim_{(z,\, w) \to (t,\, \omega)} F^{\pm\mp}(z, w) = [(\pm I + S_t)(\mp I + S_\omega)] f, \tag{1.5}$$

где $If \equiv f$ и

$$S_t f \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_C \frac{f(t_1, \omega)}{t_1 - t} \, dt_1, \ t \in C, \ S_\omega f \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(t, \omega_1)}{\omega_1 - \omega} \, d\omega_1, \ \omega \in \Gamma, \tag{1.6}$$

причем из формул (1.5) следует, что

$$F^{++}(t, \omega) - F^{-+}(t, \omega) - F^{+-}(t, \omega) + F^{--}(t, \omega) = f(t, \omega). \tag{1.7}$$

Предельные значения $F^{\pm\pm}$ и $F^{\pm\mp}$ удовлетворяют условию Гельдера, вообще говоря, с меньшими показателями, чем плотность f.

Наряду с классом H, состоящим из функций, удовлетворяющих на $C \times \Gamma$ условию Гельдера, введем еще классы: а) $H^{\pm\pm}$ ($H^{\pm\mp}$)-функций голоморфных в $D^{\pm} \times \Delta^{\pm}$ ($D^{\pm} \times \Delta^{\mp}$), предельные значения которых на $C \times \Gamma$ принадлежат классу H; б) $H_0^{++} = H^{++}$, $H_0^{\pm\mp}$ и H_0^{--}-функций соответственно класса $H^{\pm\mp}$ и H^{--}, исчезающих в бесконечно удаленных точках. Аналогичный смысл имеют классы $H(C)$, $H^{\pm}(C)$ и $H_0^{-}(C)$ ($H(\Gamma)$, $H^{\pm}(\Gamma)$ и $H_0^{-}(\Gamma)$) функций, зависящих от одного переменного $z\,(w)$.

Для того, чтобы функция $F \in H$ была функцией класса $H_0^{\pm\pm}$ ($H_0^{\pm\mp}$), необходимо и достаточно, чтобы [7]

$$F = \pm S_t F = \pm S_\omega F \quad (F = \pm S_t F = \mp S_\omega F). \tag{1.8}$$

Отсюда и из (1.3) имеем

$$F^{\pm\pm} = \pm S_t F^{\pm\pm} = \pm S_\omega F^{\pm\pm}, \quad F^{\pm\mp} = \pm S_t F^{\pm\mp} = \mp S_\omega F^{\pm\mp}. \tag{1.9}$$

Если $F^{++} \in H^{++}$, $F^{--} \in H_0^{--}$ и $F^{\pm\mp} \in H_0^{\pm\mp}$, то из (1.4) и (1.8) следует, что φ_k^+, ψ_l^+, b_k^+, $a_l^+ \in H^+$, φ_k^-, ψ_k^-, b_l^-, $a_l^- \in H_0^-$ и

$$S_t \psi_k^{\pm} = \pm \psi_k^{\pm}, \quad S_\omega \varphi_k^{\pm} = \pm \varphi_k^{\pm}, \quad S_t b_k^{\pm} = \pm b_k^{\pm}, \quad S_\omega a_k^{\pm} = \pm a_k^{\pm}. \tag{1.10}$$

Отметим еще некоторые классы функций, встречающихся ниже. Пусть $\psi^+(z) \in H^+(C)$, тогда $z^{-r}\psi^+(z) \in H^+(C)$ при всех $r = 0, 1, \ldots$. Если же $r < 0$, то $z^{-r}\psi^+(z) \in H^+(C)$ только в том случае, когда

$$\frac{d^s\psi^+(0)}{dz^s} = 0, \; s = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{1.11}$$

Аналогично, если $\psi^-(z) \in H_0^-(C)$, то $z^r\psi^-(z) \in H_0^-(C)$ при $r \leqslant 0$ и при выполнении условий

$$\frac{d^s\psi^-(\infty)}{dz^s} = 0, \; s = 1, 2, \ldots, r, \tag{1.11'}$$

если $r > 0$.

Далее, если, например, $F^{+-}(z, w) \in \underset{0}{H}^{+-}$, то $z^{-r}w^{\rho}F^{+-}(z, w) \in \underset{0}{H}^{+-}$ при $r \leqslant 0$ и $\rho \leqslant 0$. Если же $r > 0$ $(\rho > 0)$, а $\rho \leqslant 0$ $(r \leqslant 0)$, то $z^{-r}w^{\rho}F^{+-}(z, w) \in \underset{0}{H}^{+-}$ при выполнении счетного множества условий

$$\frac{1}{k!\,l!}\,\frac{\partial^{k+l}F^{+-}(0, \infty)}{\partial z^k \partial w^l} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C\times\Gamma} f(t, \varphi)\, t^{-k-1}\omega^{l-1}\, dt\, d\omega = 0, \tag{1.12}$$

где $k = 0, 1, \ldots, r-1$, $l = 1, 2, \ldots$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, l = 1, 2, \ldots, \rho)$.

Наконец, если $r > 0$ и $\rho > 0$, то должно выполняться счетное множество условий вида (1.12) при $k = 0, 1, \ldots, r-1$, $l = 1, 2, \ldots$ и при $k = r, r+1, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots, \rho$.

Аналогичным образом можно записать условия, при которых

$$z^r w^{\pm\rho} F^{\overset{-+}{--}}(z, w) \in \underset{0}{H}^{\overset{-+}{--}} \text{ и } z^{-r}w^{-\rho}F^{++}(z, w) \in H^{++},$$

где

$$F^{\overset{-+}{--}} \in \underset{0}{H}^{\overset{-+}{--}} \text{ и } F^{++} \in H^{++}.$$

Заметим еще, что условия (1.12) можно записать в виде конечного числа равенств

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C F^{+-}(t, w)\, t^{-k-1}dt = 0, \; w \in \Delta^-, \;\; k = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{1.13}$$

1. 3°. Теорема Лиувилля читается так [8]. *Если функция $f(z, w)$ голоморфна во всех точках пространства C^2 и модуль ее ограничен одним и тем же числом, то она постоянна.*

Ниже будем использовать кроме этой теоремы Лиувилля еще «обобщенную теорему Лиувилля» в такой формулировке.

Пусть функция $f(z, w)$ голоморфна во всех точках пространства C^2 и по переменному $z\,(w)$ имеет на бесконечности порядок $n\,(m)$ в том смысле, что

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z, w)}{z^n} = k(w) \quad \left(\lim_{w\to\infty}\frac{f(z, w)}{w^m} = l(z)\right),$$

где $0 < |k(w)| < +\infty$ $(0 < |l(z)| < +\infty)$ при $0 < |w| < +\infty$ $(0 < |z| < +\infty)$, тогда

$$f(z, w) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} a_{pq} z^p w^q.$$

Зафиксируем произвольный набор чисел $z_0, z_1, \ldots, z_n$ таких, что

$$\det\begin{pmatrix} 1, & z_0, & \ldots, & z_0^n \\ 1, & z_1, & \ldots, & z_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & \ldots, & z_n^n \end{pmatrix} \neq 0,$$

и возьмем произвольное число $w = w_0$. Тогда по обобщенной теореме Лиувилля (см. [2, стр. 110]) для одного переменного имеем

$$f(z, w_0) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p(w_0) z^p, \quad f(z_j, w) = \sum_{q=0}^{m} \beta_q(z_j) w^q, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Отсюда

$$\sum_{p=0}^{n} \alpha_p(w_0) z_j^p = \sum_{q=0}^{m} \beta_q(z_j) w_0{}^q \,(\equiv f(z_j, w_0)) \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Из последней системы следует, что $\alpha_p(w)$, $p = 0, 1, \ldots, n$ являются полиномами относительно w степени не выше m, что и доказывает теорему.

Используя теорему Лиувилля и методику доказательства теоремы Гартогса об аналитическом продолжении [6], нетрудно убедиться в справедливости такой теоремы.

Пусть фукция $F^{++}(z, w)$ $(F^{+-}(z, w)$ голоморфна в $D^+ \times \Delta^+$ $(D^+ \times \Delta^-)$, а функция $F^{--}(z, w)$ $(F^{-+}(z, w)$ голоморфна в $D^- \times \Delta^-$ $(D^- \times \Delta^+)$, причем $F^{++} = F^{--}$ $(F^{-+} = F^{+-})$ на $C \times \Gamma$, тогда для всех $(z, w) \in C^2$ $F^{++}(z, w) = F^{--}(z, w) = \mathrm{const}$ $(F^{+-}(z, w) = F^{-+}(z, w) = \mathrm{const})$.

1. 4°. Задача о скачке. В [7] было показано, что общее решение краевой задачи о скачке (1.7) при $f \in H$, т. е. задачи нахождения четырех функций $F^{\pm\pm}(z, w)$ и $F^{\pm\mp}(z, w)$, голоморфных соответственно в областях $D^{\pm} \times \Delta^{\pm}$ и $D^{\pm} \times \Delta^{\mp}$, по условию (1.7), есть сумма интеграла (1.3) и произвольной постоянной. Решение этой задачи, исчезающее во всех бесконечно удаленных точках, единственно и дается интегралом (1.3). Отсюда вытекает

Предложение 1. *Всякая функция $f \in H$ единственным образом представима в виде суммы $F^{++} - F^{+-} - F^{-+} + F^{--}$ предельных значений функций $F^{\pm\pm} \in H_0{}^{\pm\pm}$ и $F^{\pm\mp} \in H_0{}^{\pm\mp}$.*

Так как

$$S[F^{++} + F^{--}] = F^{++} + F^{--}, \quad S[F^{+-} + F^{-+}] = -F^{+-} - F^{-+},$$
$$S_t[F^{++} - F^{+-}] = F^{++} - F^{+-}, \quad S_t[F^{-+} - F^{--}] = -F^{-+} + F^{--},$$
$$S_\omega[F^{++} - F^{-+}] = F^{++} - F^{-+}, \quad S_\omega[F^{+-} - F^{--}] = -F^{+-} + F^{--},$$

где $S = S_t S_\omega = S_\omega S_t$, то справедливо

Предложение 2. *Всякая функция $f \in H$ представима в виде суммы*

$$h_1 + g_1 = h_2 + g_2 = h - g,$$

где h_1, g_1, h_2, g_2, h, g из H и

$$S_t h_1 = h_1, \; S_t g_1 = -g_1, \; S_\omega h_2 = h_2, \; S_\omega g_2 = -g_2, \; Sh = h, \; Sg = -g.$$

Рассмотрим еще два типа вырожденных задач о скачке. Одна из вырожденных задач первого типа ставится так. Найти функции $F^{++} \in H^{++}$, $F^{\pm\mp} \in H_0{}^{\pm\mp}$ по условию

$$F^{++} - F^{-+} - F^{+-} = f(t, \omega), \; (t, \omega) \in C \times \Gamma. \qquad (1.14)$$

Пусть задача (1.14) имеет решение, тогда, применяя к (1.14) операторы S_t, S_ω и S и учитывая (1.9), найдем, что

$$(I - S_t - S_\omega + S) f = 0. \tag{1.15}$$

Условие (1.15) не только необходимо, но и достаточно для разрешимости задачи (1.14). Действительно, непосредственная проверка с учетом условия (1.15) показывает, что интеграл (1.2) дает единственное решение задачи. Аналогично рассматриваются другие три вырожденные задачи первого типа. В результате имеем

Предложение 3. *Для того, чтобы функция $f \in H$ была представима в виде одной из сумм $F^{\pm\pm} - F^{+-} - F^{-+}$, $F^{++} - F^{\pm\mp} + F^{--}$, где $F^{\pm\pm} \in H_0{}^{\pm\pm}$, $F^{\mp\pm} \in H_0{}^{\mp\pm}$, необходимо и достаточно, чтобы она соответственно удовлетворяла условиям*

$$(I \mp S_t \mp S_\omega + S) f = 0, \; (-I \pm S_t \mp S_\omega + S) f = 0.$$

Рассуждая точно так же, получим

Предложение 4. *Следующие шесть вырожденных задач о скачке второго типа $F^{\pm\pm} - F^{\pm\mp} = f$, $F^{\pm\pm} - F^{\mp\pm} = f$, $F^{\pm\pm} + F^{\mp\mp} = f$ разрешимы, и их решение дает интеграл типа Коши (1.2) при выполнении соответственно таких необходимых и достаточных условий*

$$(I \mp S_t f) = 0, \; (I \mp S_\omega) f = 0, \; (I \mp S) f = 0. \tag{1.15$'$}$$

Условия типа (1.15) и (1.15′) можно записать в виде счетного числа равенств вида (1.12)

Замечание. Более общая задача о скачке

$$aF^{++} + bF^{+-} + cF^{-+} + dF^{--} = f(t, \omega) \tag{1.16}$$

с постоянными коэффициентами a, b, c, d, а также ее многомерные аналоги изучена в работе [9]. Очевидно, что любая из возникающих в (1.16) ситуаций может быть сведена к задачам о скачке, рассмотренном выше. Соответствующие сингулярные интегральные уравнения изучены в [10] и [11].

§ 2. Однородная элементарная задача

2.1°. Вспомогательные задачи. Однородная элементарная задача линейного сопряжения заключается в нахождении четырех функций $\Phi^{\pm\pm}(z, w)$ и $\Phi^{\pm\mp}(z, w)$, голоморфных соответственно в областях $D^\pm \times \Delta^\pm$ и $D^\pm \times \Delta^\mp$ и удовлетворяющих на общем остове $C \times \Gamma$ этих областей линейному условию

$$\Phi^{++}(t, \omega) - t^r \omega^\rho \Phi^{-+}(t, \omega) - t^n \omega^\nu \Phi^{+-}(t, \omega) + t^m \omega^\mu \Phi^{--}(t, \omega) = 0, \tag{2.1}$$

в котором r, ρ, n, ν, и m, μ — целые числа.

Сначала рассмотрим вырожденные задачи второго типа — частные случаи задачи (2.1), которые необходимы для нахождения решения общей задачи (2.1), а также для выяснения тех краевых условий, при выполнении которых эта задача имеет конечное число линейно независимых решений.

Первый случай

$$\Phi^{++}(t, \omega) + t^m \omega^\mu \Phi^{--}(t, \omega) = 0. \tag{2.2}$$

Пусть сначала $m \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$, тогда, используя обобщенную теорему Лиувилля, найдем, что задача имеет $(m+1)(\mu+1)$ линейно независимых решений

$$\Phi_{kl}^{++} = z^k w^l, \quad \Phi_{kl}^{--} = -z^{k-m} w^{l-\mu}, \quad 0 \leqslant k \leqslant m, \quad 0 \leqslant l \leqslant \mu. \tag{2.3}$$

Если искать решение $\Phi^{--}(z, w)$ из класса H_0^{--}, то решений будет $m\mu$ и они получаются из (2.3) при $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $0 \leqslant l \leqslant \mu-1$.

Если же $m < 0$ или $\mu < 0$ ($m \leqslant 0$ или $\mu \leqslant 0$), то задача (2.2) в классе $H^{\pm\pm}$ ($H_0^{\pm\pm}$) неразрешима, т. е. имеет только тривиальное решение.

Задача

$$t^r \omega^\rho \Phi^{-+}(t, \omega) + t^n \omega^\nu \Phi^{+-}(t, \omega) = 0$$

приводится к задаче

$$t^s \Phi^{-+}(t, \omega) + \omega^\sigma \Phi^{+-}(t, \omega) = 0, \quad s = r - n, \quad \sigma = \nu - \rho, \tag{2.4}$$

линейно независимые решения которой при $s \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$ даются равенствами

$$\Phi_{kl}^{-+} = z^{k-s} w^l, \quad \Phi_{kl}^{+-} = -z^k w^{l-\sigma}, \quad 0 \leqslant k \leqslant s, \quad 0 \leqslant l \leqslant \sigma. \tag{2.4'}$$

Если отыскивать решения $\Phi^{\pm\mp} \in H_0^{\pm\mp}$, то в (2.4′) надо положить $0 \leqslant k \leqslant s-1$, $0 \leqslant l \leqslant \sigma-1$. Если $s < 0$ или $\sigma < 0$ ($s \leqslant 0$ или $\sigma \leqslant 0$), то в классе $H^{\pm\mp}$ ($H_0^{\pm\mp}$) задача (2.4) неразрешима.

Второй случай

$$\Phi^{++}(t, \omega) = t^n \Phi^{-+}(t, \omega). \tag{2.5}$$

Если $n = 0$, то любая функция $\varphi^+(w) \in H^+(\Gamma)$ будет решением задачи (2.5) и, следовательно, она имеет счетное количество линейно независимых решений $\Phi_k^{\pm\pm} = w^k$, $k = 0, 1, \ldots$ Если же отыскивать решение $\Phi^{-+}(z, w) \in H_0^{-+}$, то при $n = 0$ задача (2.5) имеет только тривиальное решение. Условие $\Phi^{-+} \in H_0^{-+}$ по существу является краевым условием $\Phi^{-+}|_{\Delta_\infty^+} = 0$. Для простоты в дальнейшем будем отыскивать решения, исчезающие во всех бесконечно удаленных точках.

Так как $\overset{++}{\Phi^{-+}} \in \overset{++}{H_0^{-+}}$, то, учитывая (2.5), получим функцию

$$\Phi^{++}(t, w) - t^n \Phi^{-+}(t, w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\Phi^{++}(t, \omega) - t^n \Phi^{-+}(t, \omega)}{\omega - w} d\omega = 0, \quad w \in \Delta^+,$$

аналитическую по $w \in \Delta^+$ и удовлетворяющую условию Гельдера по $t \in C$. Произвольно фиксируем $w \in \Delta^+$, тогда функция $\Phi^{++}(z, w)$ аналитична по z в D^+, а функция $z^n \Phi^{-+}(z, w)$ аналитична по z в D^-. В силу равенства (2.5) они образуют единую функцию, аналитическую по z во всей плоскости. Отсюда при $n > 0$ в силу обобщенной теоремы Лиувилля будем иметь

$$\Phi^{++} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \varphi_k^+(w), \quad \Phi^{-+} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{k-n} \varphi_k^+(w), \tag{2.6}$$

где $\varphi_k^+(w)$ — произвольные функции класса $H^+(\Gamma)$, и мы снова имеем дело со счетным количеством линейно независимых решений

$$\Phi_{kl}^{++} = z^k w^l, \quad \Phi_{kl}^{-+} = z^{k-n} w^l, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Чтобы задача (2.5) имела конечное число решений, будем отыскивать ее решения, удовлетворяющие краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^k\Phi^{-+}}{\bar\partial z^k}\right|_{\Delta^+_\infty} = k!\varphi^+_{n-k}(w),\ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{2.7}$$

где $\varphi^+_k(w)$ — уже наперед заданные функции класса $H^+(\Gamma)$.

Задача (2.5), (2.7) в классах $\overset{++}{H^{-+}_0}$ имеет единственное решение (2.6). Если $n \leqslant 0$, то задача (2.5) в классах $\overset{++}{H^{-+}_0}$ неразрешима.

Замечание. Вместо краевых условий (2.7) дифференциального вида можно было бы задавать им эквивалентные условия разностного типа

$$[z^k\Phi^{-+}(z, w) - \sum_{j=0}^{k} \varphi^+_{n-j+1}(w)z^{j-1}]|_{\Delta^+_\infty} = \varphi^+_{n-k}(w),\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Рассмотрим теперь несколько более общую задачу

$$\Psi^{++}(t, \omega) = t^n\omega^\nu\Psi^{-+}(t, \omega). \tag{2.8}$$

Положив $\omega^\nu\Psi^{-+} = \Phi^{-+}$, $\Psi^{++} = \Phi^{++}$, мы придем к задаче (2.5), используя решение которой, получим

$$\Psi^{++} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k\varphi^+_k(w),\ \Psi^{-+} = w^{-\nu}\sum_{k=0}^{n-1} z^{k-n}\varphi^+_k(w), \tag{2.9}$$

где $\varphi^+_k(w)$ заданы краевыми условиями (2.7), причем эти функции при $\nu > 0$ должны удовлетворять дополнительным условиям типа (1.11), т. е.

$$\varphi^+_k(w)\,w^{-\nu}\in H^+(\Gamma),\ 0 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{2.10}$$

Итак, формулы (2.9) дают решение задачи (2.8), (2.7) при $n > 0$ и $\nu \leqslant 0$. Эти же формулы дают решение задачи (2.8), (2.7), (2.10) при $n > 0$ и $\nu > 0$. При $n \leqslant 0$ задача (2.8) неразрешима.

Совершенно аналогично исследуются еще три задачи такого типа:

$$\Phi^{++}(t, \omega) = t^r\omega^s\Phi^{+-}(t, \omega), \tag{2.11}$$

$$\Phi^{+-}(t, \omega) = t^s\omega^r\Phi^{--}(t, \omega), \tag{2.11'}$$

$$\Phi^{-+}(t, \omega) = t^r\omega^s\Phi^{--}(t, \omega). \tag{2.11''}$$

Если $s \leqslant 0$, то все эти задачи не имеют решений, исчезающих на бесконечности, кроме тривиальных. Если же $s > 0$, то при выполнении соответственно краевых условий

$$\left.\frac{\partial^k\Phi^{+-}}{\bar\partial w^k}\right|_{D^+_\infty} = k!\,\psi^-_{s-k}(z), \tag{2.12}$$

$$\left.\frac{\partial^k\Phi^{--}}{\bar\partial z^k}\right|_{\Delta^-_\infty} = k!\,b^-_{s-k}(w), \tag{2.12'}$$

$$\left.\frac{\partial^k\Phi^{--}}{\bar\partial w^k}\right|_{D^-_\infty} = k!\,a^-_{s-k}(z), \tag{2.12''}$$

где $k = 1, \ldots, s$, при $r < 0$, и еще соответственно условий

$$\psi^+_k(z)\,z^{-r}\in H^+(C),\ b^-_k(w)\,w^r\in H^-_0(\Gamma),\ a^-_k(z)\,z^r\in H^-_0(C),$$

где $k = 1, \ldots, s$, при $r > 0$, единственное решение соответствующей задачи дается формулами

$$\Phi^{++} = \sum_{k=0}^{s-1} \omega^k \varphi_k^+(z), \quad \Phi^{-+} = z^{-r} \sum_{k=0}^{s-1} \omega^{k-s} \psi_k^+(z), \tag{2.13}$$

$$\Phi^{+-} = \sum_{k=0}^{s-1} z^k b_k^-(\omega), \quad \Phi^{--} = \omega^{-r} \sum_{k=0}^{s-1} z^{k-s} b_k^-(\omega), \tag{2.13'}$$

$$\Phi^{-+} = \sum_{k=0}^{s-1} \omega^k a_k^-(z), \quad \Phi^{--} = z^{-r} \sum_{k=0}^{s-1} \omega^{k-s} a_k^-(z). \tag{2.13''}$$

2.2⁰. **Основная элементарная задача** имеет вид

$$\Phi^{++}(t, \omega) - t^r \Phi^{-+}(t, \omega) - \omega^\nu \Phi^{+-}(t, \omega) + t^m \omega^\mu \Phi^{--}(t, \omega) = 0. \tag{2.14}$$

где $m \geqslant r > 0$ и $\mu \geqslant \nu > 0$.

Условие (2.14) перепишем так:

$$\Phi^{++} - t^r \Phi^{-+} = \omega^\mu [\omega^{\nu-\mu} \Phi^{+-} - t^m \Phi^{--}]. \tag{2.15}$$

Рассуждая, как и при решении задачи (2.5), найдем, что функция $\Phi^{++}(t, \omega) - t^n \Phi^{-+}(t, \omega)$ аналитична по $\omega \in \Delta^+$ и удовлетворяет условию Гельдера по $t \in C$, а функция $\omega^{\nu-\mu} \Phi^{+-}(t, \omega) - t^m \Phi^{--}(t, \omega)$ аналитична по $\omega \in \Delta^-$ и удовлетворяет условию Гельдера по $t \in C$.

Применяя теорему Лиувилля по переменной ω при $t \in C$ из (2.15), найдем, что

$$\Phi^{++} - t^r \Phi^{-+} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \omega^j \alpha_j(t) \equiv \sum_{j=0}^{\mu-1} \omega^j [a_j^+(t) - a_j^-(t)], \tag{2.16}$$

где $\alpha_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, \mu - 1$ — пока произвольные функции класса $H(C)$, $a_j^\pm(t) \in H_0^\pm(C)$ — предельные значения интеграла типа Коши

$$a_j^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\alpha_j(t)\, dt}{t - z}, \quad z \in D^\pm, \ j = 0, 1, \ldots, \mu - 1$$

при $z \to t \in C$.

Из (2.16) имеем

$$\Psi^{++} = t^r \Psi^{-+}, \quad \Psi^{-+} \in H_0^{-+}, \tag{2.17}$$

где

$$\Psi^{++} = \Phi^{++} - \sum_{j=0}^{\mu-1} \omega^j a_j^+(t), \quad \Psi^{-+} = \Phi^{-+} - t^{-r} \sum_{j=0}^{\mu-1} \omega^j a_i^-(t).$$

Используя решение задачи (2.5) и учитывая условие (2.17), получим

$$\Phi^{++} = \sum_{k=0}^{r-1} z^k \varphi_k^+(\omega) + \sum_{j=0}^{\mu-1} \omega^j a_i^+(z), \tag{2.18}$$

$$z^r \Phi^{-+} = \sum_{k=0}^{r-1} z^k \varphi_k^+(\omega) + \sum_{j=0}^{\mu-1} \omega^j a_i^-(z). \tag{2.19}$$

Рассуждая, как и только что, из соотношения

$$\Phi^{++}(t, \omega) - \omega^\nu \Phi^{+-}(t, \omega) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \beta_k(\omega) \equiv \sum_{k=0}^{m-1} t^k [b_k^+(\omega) - b_k^-(\omega)],$$

аналогично (2.16) получим

$$\Phi^{++}=\sum_{l=0}^{\nu-1} w^l\psi_l^+(z)+\sum_{i=0}^{m-1} z^i b_i^+(w), \tag{2.20}$$

$$w^\nu\Phi^{+-}=\sum_{l=0}^{\nu-1} w^l\psi_l^+(z)+\sum_{l=0}^{m-1} z^i b_i^-(w), \tag{2.21}$$

где $\psi_l^+(z)\in H^+(C)$, $l=0, 1, \ldots, \nu-1$, $\beta_k(\omega)\in H(\Gamma)$ и, значит, $b_k^+(w)\in H^+(\Gamma)$, $b_k^-(w)\in H_0^-(\Gamma)$, $k=0, 1, \ldots, m-1$.

Сопоставляя (2.18) и (2.20), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{m-1} z^k\beta_k^+(w)=\sum_{l=0}^{\mu-1} w^l\alpha_l^+(z)\equiv\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\mu-1} c_{kl}z^k w^l,$$

где

$$\beta_k^+(w)=\begin{cases} b_k^+(w)-\varphi_k^+(w)\equiv\sum\limits_{l=0}^{\mu-1} c_{kl}w^l, & k=0, 1, \ldots, r-1,\\ b_k^+(w)\equiv\sum\limits_{l=0}^{\mu-1} c_{kl}w^l, & k=r, r+1, \ldots, m-1,\end{cases}$$

$$\alpha_l^+(z)=\begin{cases} a_r^+(z)-\psi_l^+(z)\equiv\sum\limits_{k=0}^{m-1} c_{kl}z^k, & l=0, 1, \ldots \nu-1,\\ a_r^+(z)\equiv\sum\limits_{k=0}^{m-1} c_{kl}z^k, & l=\nu, \nu+1, \ldots, \mu-1.\end{cases}$$

Учитывая последние соотношения, (2.1), (2.19) (2.20), (2.21) и (2.14), найдем, что общее решение задачи (2.14) дают формулы (2.19), (2.21) и

$$\Phi^{++}=\sum_{k=0}^{r-1} z^k\varphi_k^+(w)+\sum_{j=0}^{\nu-1} w^j\psi_j^+(z)+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1} c_{kj}z^k w^j,$$

$$z^m\omega^\mu\Phi^{--}=\sum_{l=0}^{m-1} z^l b_l^-(w)+\sum_{i=0}^{\mu-1} w^i a_i^-(z)-\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1} c_{kj}z^k w^i, \tag{2.22}$$

где c_{kj} — произвольные постоянные.

Из формул (2.22), (2.19) и (2.21) видно, что

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^k\Phi^{-+}}{\partial z^k}\Big|_{\Delta_\infty^+}=k!\varphi_{r-k}^+(w), \quad k=1, \ldots, r,\\ &\frac{\partial^k\Phi^{+-}}{\partial w^k}\Big|_{D_\infty^+}=k!\psi_{\nu-k}^+(z), \quad k=1, \ldots, \nu,\\ &\frac{\partial^k\Phi^{--}}{\partial z^k}\Big|_{\Delta_\infty^-}=k!b_{m-k}^-(w), \quad k=1, \ldots, m,\\ &\frac{\partial^k\Phi^{--}}{\partial w^k}\Big|_{D_\infty^-}=k!a_{\mu-k}^-(z), \quad k=1, \ldots, \mu.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Если функции φ_k^+, ψ_l^+, b_j^-, a_i^- заданы, то задача (2.14) с краевыми условиями (2.23) имеет $m\mu$ линейно-независимых решений, определяемых по формулам (2.19) (2.21) и (2.22).

Рассмотрим теперь другие возможные соотношения между показателями m и r, μ и ν.

А) Если, например, $m > 0 = r$, то в формулах, дающих решение задачи (2.14), надо опустить суммы $\sum_{k=0}^{r-1} z^k \varphi_k^+ (w)$. Если же $m \geqslant 0 > r$, то, кроме этого, надо потребовать, чтобы $a_j^-(z)$, $j = 0, 1, \ldots, \mu - 1$ удовлетворяли условиям вида (1.11′). Аналогично изучается случай, когда $\nu \leqslant 0 < \mu$, а также когда $r \leqslant 0 \leqslant m$ и $\nu \leqslant 0 \leqslant \mu$.

Б) Пусть $r \leqslant m \leqslant 0$, тогда краевое условие (2.14) запишем так:

$$\Phi^{++} - \omega^{\nu}\Phi^{+-} = t^m [t^{r-m}\Phi^{-+} - \omega^{\mu}\Phi^{--}].$$

Отсюда, применяя теорему Лиувилля по z, найдем, что

$$\Phi^{++} = \omega^{\nu}\Phi^{+-} \quad \text{и} \quad \Phi^{-+} = \omega^{\mu} t^{m-r}\Phi^{--},$$

т. е. задача сведена к двум задачам, изученным выше.

Аналогично исследуется случай, когда $\nu \leqslant \mu \leqslant 0$, если же одновременно $r \leqslant m \leqslant 0$ и $\nu \leqslant \mu \leqslant 0$, то задача неразрешима.

В) Допустим, что $m \leqslant r$. В этом случае положим

$$\Phi^{++} = \Psi^{++}, \quad \Phi^{\pm\mp} = \Psi^{\pm\mp}, \quad t^{m-r}\Phi^{--} = \Psi^{--}$$

и краевое условие перепишем так:

$$\Psi^{++} - t^r\Psi^{-+} - \omega^{\nu}\Psi^{+-} - t^r\omega^{\mu}\Psi^{--} = 0.$$

Если, например, $\mu \geqslant \nu > 0$, то, используя решение задачи (2.14) при $m = r$, $\Phi^{\pm\pm}$ и $\Phi^{\pm\mp}$ найдем по обычным формулам. Однако, учитывая, что $m \leqslant r$, в последней формуле (2.22) надо положить (α) $b_l^-(w) = 0$, $l = m, m + 1, \ldots, r - 1$ при $0 \leqslant m \leqslant r$, ($\beta$) $b_l^-(w) = 0$, $l = 0, 1, \ldots, r - 1$, $\frac{\partial^k a_i^-(\infty)}{\partial z^k} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, \mu - 1$, $k = 1, 2, \ldots -m - 1$ при $m < 0 \leqslant r$, (γ) $\Phi^{--} \equiv 0$ при $m \leqslant r \leqslant 0$.

Все другие ситуации получаются в результате комбинации последних трех случаев.

Замечание. Случай, когда $r = m > 0$, $\nu = \mu > 0$ изучался в работе [12]. Высказанное там утверждение о конечности числа решений такой элементарной однородной задачи неверно.

2.3°. **Общая однородная элементарная задача (2.1)** приводится к основной элементарной следующим образом. Полагая $\Phi^{\pm\pm} = \Psi^{\pm\pm}$ и $\omega^{\rho}\Phi^{-+} = \Psi^{-+}$, $t^n\Phi^{+-} = \Psi^{+-}$, получим элементарную задачу (2.14). Используя решение этой задачи, данное выше, потребуем, чтобы в нем функции $\Phi^{-+} = \omega^{-\rho}\Psi^{-+}$ и $\Phi^{+-} = t^{-n}\Psi^{+-}$ принадлежали соответственно классам H_0^{-+} и H_0^{+-}. Например, если $m \geqslant r > 0$ и $\mu \geqslant \nu > 0$, то решение задачи дается формулами (2.22) и формулами (при $\rho < 0$ и $n < 0$)

$$z^r w^{\rho}\Phi^{-+}(z, w) = \sum_{k=0}^{r-1} z^k \varphi_k^+(w) + \sum_{j=0}^{\mu-1} w^j a_j^+(z),$$

$$z^n w^{\nu}\Phi^{+-}(z, w) = \sum_{l=0}^{\nu-1} w^l \psi_l^+(z) + \sum_{i=0}^{m-1} z^i b_i^-(w).$$

Если $\rho \geqslant 0$ ($n \geqslant 0$), то в последних формулах надо потребовать, чтобы $\varphi_k^+(w)$ ($\psi_k^+(z)$) удовлетворяли дополнительным условиям вида (2.10), а $a_l^+(z) \equiv 0$ ($b_l^+(w) \equiv 0$) для всех $l = 0, 1, \ldots, \min(\rho, \mu - 1)$ ($l = 0, 1, \ldots, \min(n, m - 1)$).

Отметим еще, что все задачи, рассмотренные в 2.1°, могут быть теперь получены как частные случаи из этой общей задачи.

Например, полагая $\Phi^{++}=\Phi^{--}=0$, $r=s$, $\nu=\sigma$, $\rho=n=0$, будем иметь

$$a_l^-(z)=b_k^-(w)=c_{kl}=0,\ l=0,1,\ \dots,\ \mu-1,\ k=0,1,\ \dots,\ m-1$$

$$\varphi_{kl}^+=0,\ k=0,1,\ \dots,\ s-1,\ l=\sigma,\ \sigma+1,\ \dots,\ \psi_{lk}^+=0,\ l=0,1,\ \dots,\ \sigma-1,\ k=s,\ s+1,\ \dots$$

$$\varphi_{kl}^+ + \psi_{lk}^+=0,\ l=0,1,\ \dots,\ \sigma-1,\ k=0,1,\ \dots,\ s-1,$$

где ψ_{lk}^+ (φ_{kl}^+) — коэффициенты разложений функций $\psi_l^+(w)$ $(\varphi_k^+(z))$ в ряды Тейлора. Отсюда

$$w^\sigma\Phi^{+-}(z,\ w)=\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{l=0}^{\sigma-1}c_{kl}w^lz^k=-z^s\Phi^{-+}(z,\ w),$$

где c_{kl} — произвольные постоянные, что совпадает с (2.14).

Из общего решения можно получить и решение вырожденных краевых задач первого типа, получающихся из условия (2.1) соответственно при $\Phi^{++}=0$, $\Phi^{+-}=0$, $\Phi^{-+}=0$ и $\Phi^{--}=0$.

§ 3. Неоднородная элементарная задача

Неоднородную элементарную задачу

$$\Psi^{++}-t^r\omega^\rho\Psi^{-+}-t^n\omega^\nu\Psi^{+-}+t^m\omega^\mu\Psi^{--}=f(t,\ \omega),\tag{3.1}$$

где $f\in H$ и, следовательно, $f=F^{++}-F^{-+}-F^{+-}+F^{--}$, можно записать в виде основной элементарной однородной задачи

$$\Phi^{++}-t^r\Phi^{-+}-\omega^\nu\Phi^{+-}+t^m\omega^\mu\Phi^{--}=0,\tag{3.2}$$

где

$$\Phi^{++}=\Psi^{++}-F^{++},\ \Phi^{-+}=\omega^\rho\Psi^{-+}-t^{-r}F^{-+},$$
$$\Phi^{+-}=t^n\Psi^{+-}-\omega^{-\nu}F^{+-},\ \Phi^{--}=\Psi^{--}-t^{-m}\omega^{-\mu}F^{--}.\tag{3.3}$$

Допустим сначала, что $m\geqslant r>0$ и $\mu\geqslant\nu>0$. Используя общее решение задачи (3.2) и учитывая обозначения (3.3), формально будем иметь

$$\begin{gathered}F^{-+}(z,\ w)+\sum_{k=0}^{r-1}z^k\tilde\varphi_k^+(w)+\sum_{j=0}^{\mu-1}w^j\tilde a_j^-(z)=z^rw^\rho\Psi^{-+}(z,\ w)\\ F^{+-}(z,\ w)+\sum_{l=0}^{\nu-1}w^l\tilde\psi_l^+(z)+\sum_{i=0}^{m-1}z^i b_i^-(w)=z^nw^\nu\Psi^{+-}(z,\ w),\\ F^{++}(z,\ w)+\sum_{k=0}^{r-1}z^k\tilde\varphi_k^+(w)+\sum_{j=0}^{\nu-1}w^j\tilde\psi_j^+(z)+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1}c_{kj}z^kw^j=\Psi^{++}(z,\ w),\\ F^{--}(z,\ w)+\sum_{l=0}^{m-1}z^l\tilde b_l^-(w)+\sum_{i=0}^{\mu-1}w^i\tilde a_i^-(z)+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1}c_{kj}z^kw^j=z^mw^\mu\Psi^{--}(z,\ w),\end{gathered}\tag{3.4}$$

где $\varphi_k^+(w)$, $\tilde\psi_j^+(z)$, $\tilde b_i^-(w)$, $\tilde a_i^-(z)$ — пока произвольные функции соответственно классов $H^+(C)$, $H^+(\Gamma)$, $H_0^-(\Gamma)$, $H_0^-(C)$, причем

$$w^\rho\left.\frac{\partial^k\Psi^{-+}(z,\ w)}{\partial z^k}\right|_{\Delta_\infty^+}=k!\tilde\varphi_{r-k}^+(w)+\left.\frac{\partial^k(z^{-r}F^{-+}(z,\ w))}{\partial z^k}\right|_{\Delta_\infty^+},\tag{3.5}$$

$$k=1,\ \dots,\ r,$$

$$
\begin{gathered}
z^n \frac{\partial^k \Psi^{+-}(z, w)}{\bar{\partial} w^k}\bigg|_{D_\infty^+} = k!\tilde{\psi}^+_{\nu-k}(z) + \frac{\partial^k (w^{-\nu}F^{+-}(z, w))}{\bar{\partial} w^k}\bigg|_{D_\infty^+}, \\
k = 1, \ldots, \nu, \\
\frac{\partial^k \Psi^{--}(z, w)}{\bar{\partial} z^k}\bigg|_{\Delta_\infty^-} = k!\tilde{b}^-_{m-k}(w) + w^{-\mu}\frac{\partial^k (z^{-m}F^{--}(z, w))}{\bar{\partial} z^k}\bigg|_{\Delta_\infty^-}, \\
k = 1, \ldots, m, \\
\frac{\partial^k \Psi^{--}(z, w)}{\bar{\partial} w^k}\bigg|_{D_\infty^-} = k!\tilde{a}^-_{\mu-k}(z) + z^{-m}\frac{\partial^k (w^{-\mu}F^{--}(z, w))}{\bar{\partial} w^k}\bigg|_{D_\infty^-}. \\
k = 1, \ldots, \mu.
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Из формул (3.4) можно получить общее решение задачи (3.1) при $m \geqslant r > 0$ и $\mu \geqslant \nu > 0$, потребовав, чтобы функции $\Psi^{\pm\pm}(z, w)$ и $\Psi^{\pm\mp}(z, w)$ принадлежали соответствующим классам. Например, если $\rho \leqslant 0$ и $n \leqslant 0$, то формулы (3.4) действительно дают общее решение задачи (3.1).

Рассмотрим задачу (3.1) с краевыми условиями, обеспечивающими ей конечное число решений. Если $m \geqslant r > 0$, $\mu \geqslant \nu > 0$, $\rho \leqslant 0$ и $n \leqslant 0$, то формулы (3.4) дают общее решение, содержащее $m\mu$ произвольных постоянных и удовлетворяющее краевым условиям (3.5), в которых функции $\tilde{\varphi}^+_k$, $\tilde{\psi}^+_j$, $\tilde{b}^-_i$ и $\tilde{a}^-_l$ наперед заданы.

Однако краевые условия (3.5) выглядят неестественно, так как они содержат производные от функций $F^{\pm\mp}$ и F^{--}, компонент правой части задачи (3.1). Поэтому краевые условия зададим, как и в случае однородной задачи, формулами (2.23), тогда, учитывая (2.23) и (3.5), решение (3,4) нашей задачи запишем так:

$$
\begin{gathered}
z^r w^\rho \Psi^{-+}(z, w) = F^{-+}(z, w) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{z^k}{(r-k)!} \frac{\partial^{r-k}(z^{-r}F^{-+}(z, w))}{\bar{\partial} z^{r-k}}\bigg|_{\Delta_\infty^+} - \\
- z^{-m}\sum_{j=0}^{\mu-1} \frac{w^j}{(\mu-j)!}\frac{\partial^{\mu-j}(w^{-\mu}F^{--}(z, w))}{\bar{\partial} w^{\mu-j}}\bigg|_{D_\infty^-} + \\
+ w^\rho \sum_{k=0}^{r-1} z^k \varphi^+_k(w) + \sum_{j=0}^{\mu-1} w^j a^-_j(z),
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

$$
z^n w^\nu \Psi^{+-}(z, w) = F^{+-}(z, w) - \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{w^l}{(\nu-l)!}\frac{\partial^{\nu-l}(w^{-\nu}F^{+-}(z, w))}{\bar{\partial} w^{\nu-l}}\bigg|_{D_\infty^-} -
$$

$$
- w^{-\mu}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{z^i}{(m-i)!}\frac{\partial^{m-i}(z^{-m}F^{--}(z, w))}{\bar{\partial} z^{m-i}}\bigg|_{\Delta_\infty^-} + z^n\sum_{l=0}^{\nu-1} w^l \psi^+_l(z) + \sum_{i=0}^{m-1} z^i b^-_i(w),
$$

$$
\begin{gathered}
\Psi^{++}(z, w) = F^{++}(z, w) - \sum_{k=0}^{r-1}\frac{z^k}{(r-k)!}\frac{\partial^{r-k}(z^{-r}F^{-+}(z, w))}{\bar{\partial} z^{r-k}}\bigg|_{\Delta_\infty^+} - \\
- \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{w^j}{(\nu-j)!}\frac{\partial^{\nu-j}(w^{-\nu}F^{+-}(z, w))}{\bar{\partial} w^{\nu-j}}\bigg|_{D_\infty^+} + w^\rho\sum_{k=0}^{r-1} z^k\varphi^+_k(w) + \\
+ z^n\sum_{j=0}^{\nu-1} w^j\psi^+_j(z) + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1} c_{kj} z^k w^j,
\end{gathered}
$$

$$z^m w^\mu \Psi^{--}(z, w) = F^{--}(z, w) - w^{-\mu}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{z^l}{(m-l)!}\left.\frac{\partial^{m-l}(z^{-m}F^{--}(z, w))}{\partial z^{m-l}}\right|_{\Delta_\infty^-} -$$
$$- z^{-m}\sum_{i=0}^{\mu-1}\frac{w^i}{(\mu-i)!}\left.\frac{\partial^{\mu-i}(w^{-\mu}F^{--}(z, w))}{\partial w^{\mu-i}}\right|_{D_\infty^-} + \sum_{l=0}^{m-}z^l b_l^-(w) + \tag{3.6}$$
$$+ \sum_{i=0}^{\mu-1}w^i a_i^-(z) - \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1}c_{kj}z^k w^j.$$

Анализ (3.6) показывает, что при $n \leqslant 0$ и $\rho \leqslant 0$ функции $\varphi_k^+(w)$ и $\psi_j^+(z)$ должны быть такими, чтобы

$$w^\rho \varphi_k^+(w) \in H^+(\Gamma),\ k = 0, 1, \ldots, r-1,\ z^n\psi_j^+(z) \in H^+(C),\ j = 0, 1, \ldots, \nu - 1,$$

т. е. они должны удовлетворять условиям типа (1.11).

Если же, например, $n > 0$, а $\rho \leqslant 0$, то задача (3.1), вообще говоря, неразрешима, если $f(t, \omega)$ произвольная функция класса H.

Пусть $F^{+-}(z, w) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j f_j^-(w)$, тогда при $n > 0$, $z^{-n}F^{+-} \in H_0^{+-}$ лишь в том случае, когда (сравни с (1.13))

$$f_j^-(w) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.7}$$

Кроме того, в (3.6) произвольные функции $b_i^-(w)$ при $i = 0, 1, \ldots$, $\min(m-1, -n)$ надо заменить соответственно функциями

$$\frac{1}{w^\mu(m-i)!}\cdot\left.\frac{\partial^{m-i}(z^{-m}F^{--}(z, w))}{\partial z^{m-i}}\right|_{\Delta_\infty^-}. \tag{3.8}$$

Формулы (3.6) по-прежнему будут давать решение задачи, причем в этом случае $z^n\psi_j^+(z) \in H^+(C)$ и на $\psi_j^+(z)$ не надо накладывать дополнительных условий.

Обсудим условия (3.8) и (3.7). Необходимое и достаточное условие разрешимости (3.7) равносильно тому, что ряд Лорана $F^{+-}(z, w)$ должен иметь счетное число коэффициентов, равных нулю, или, что то же самое, функция $f(t, \omega)$ должна удовлетворять счетному множеству условий разрешимости вида (1.12). Условие (3.8) означает, что в краевых условиях (2.23) произвольно задаются функции $b_i^-(w)$ только при $\min(m-1, -n) \leqslant i \leqslant m-1$, а при $0 \leqslant i \leqslant \min(m-1, -n)$ все они заменяются функциями (3.8).

Аналогично исследуется случай, когда $\rho > 0$ и $n \leqslant 0$, а также когда $\rho > 0$ и $n > 0$.

Полное исследование других возможных ситуаций проводить нет необходимости, так как это делается по схеме, описанной выше, а именно. Сначала находим общее решение задачи (3.2), затем, пользуясь формулами (3.3), записываем общее решение исходной задачи; в зависимости от показателей, требуя принадлежности решений классам $H_0^{\pm\mp}$ и $H_0^{\pm\pm}$, выясняем, какие ограничения надо наложить дополнительно как на функции, входящие в краевое условие (2.23), так и на правую часть (3.1), чтобы задача была разрешима.

В качестве иллюстрации общего метода рассмотрим одну вырожденную задачу второго типа:

$$\Psi^{++}(t, \omega) + t^m\omega^\mu\Psi^{--}(t, \omega) = f(t, \omega). \tag{3.9}$$

Пусть сначала $m>0$ и $\mu>0$, тогда, действуя по общей схеме, имеем (см. (3.1—3.5)) при $r=\rho=n=\nu=0$ и $\Psi^{\pm\mp}=0$

$$F^{-+}(z,\ w)=-\sum_{j=0}^{\mu-1} w^j\widetilde{a_j^-}(z),\quad F^{+-}(z,\ w)=-\sum_{i=0}^{m-1} z^i\widetilde{b_i^-}(w), \tag{3.10}$$

$$\Psi^{++}(z,\ w)=F^{++}(z,\ w)+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1} c_{kj}z^kw^j,\quad z^mw^\mu\Psi^{--}(z,\ w)=$$
$$=F^{--}(z,\ w)-F^{-+}(z,\ w)-F^{+-}(z,\ w)-\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1} c_{kj}z^kw^j. \tag{3.11}$$

Формулы (3.10) дают необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (3.9) при $m>0$ и $\mu>0$. Если функция $f=F^{++}-F^{-+}-F^{+-}+F^{--}$ такова, что ее компоненты $F^{\mp\pm}$ имеют вид (3.10), то задача разрешима и имеет $m\mu$ линейно независимых решений в классе $H_0^{\pm\pm}$, которые даются формулами (3.11), где c_{kj} — произвольные постоянные.

Если же $m>0$, а $\mu\leqslant 0$, то из (3.11) следует, что $\Psi^{++}=F^{++}$ и $z^mw^\mu\Psi^{--}=F^{--}-F^{-+}-F^{+-}$ и, значит, должны выполняться еще и условия

$$w^{-\mu}F^{--}\in H_0^{--},\quad w^{-\mu}F^{+-}\in H_0^{+-},\quad F^{-+}=0.$$

Таким образом, задача (3.9) при $m>0$ и $\mu\leqslant 0$ разрешима при выполнении следующих необходимых и достаточных условий на $f(t,\ \omega)$:

$$F^{-+}=0,\quad w^{-\mu}\widetilde{b_i^-}(w)\in H_0^-(\Gamma),\quad i=0,1,\ \ldots,\ m-1\quad (\text{см. } (3.10)),$$

$$F^{--}(z,\ w)=\sum_{k=1}^{\infty} w^{-k+\mu}f_k^-(z),$$

где $f_k^-(z)\in H_0^-(C)$, т. е. функция $f(t,\ \omega)$ должна удовлетворять счетному множеству условий, которые можно еще записать и так (сравни с (1.12)):

$$\int_{C\times\Gamma} f(t,\ \omega)\,t^{s-1}\omega^{\sigma-1}\,dt\,d\omega=0,$$

где s и σ пробегают две серии индексов $s=m,\ m+1,\ \ldots,\ \sigma=1,\ 2,\ \ldots$ и $s=-1,\ -2,\ \ldots,\ \sigma=-\mu+1,\ -\mu+2,\ \ldots$

Аналогично исследуются случаи, когда $m\leqslant 0$, $\mu>0$ и $m\leqslant 0$, $\mu\leqslant 0$.

Замечание. Наличие счетного количества условий разрешимости у неоднородной элементарной задачи при $\nu=\mu>0$ и $r=m>0$ впервые отмечено в работе М. Б. Гагуа [12]. Сам М. Б. Гагуа этого факта не замечал, на что ему (по просьбе автора) указал рецензент Ф. Д. Гахов (см. сноску в [12], стр. 345).

II. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ

§ 4. Индекс функции

Индекс непрерывной функции $G(t,\ \omega)$ точек остова $C\times\Gamma$, не обращающейся в нуль на $C\times\Gamma$, вдоль любой замкнутой кривой $L=\{(t,\ \omega): t=t(\theta),\ \omega=\omega(\theta),\ 0\leqslant\theta<\Theta\}$, лежащей на $C\times\Gamma$, определим как изменение ее аргумента при обходе L

$$k_L(G)\equiv \operatorname{Ind}_L G=\text{Изм.}_L\arg G(t,\ \omega)=\frac{1}{i}[\ln G(t,\ \omega)]_L=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t,\ \omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\Theta} d\ln G(t(\theta),\ \omega(\theta)).$$

Индекс $k_L(G)$ — целое число и при непрерывном варьировании малых участков контура L не меняет своего значения как функционал, непрерывно зависящий от контура L. А так как контур L гомологичен контуру $sC + \sigma\Gamma$, где s и σ — некоторые целые числа, то

$$k_L(G) = sl(G) + \sigma\lambda(G),$$

где

$$l(G) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C d \ln G(t, \omega), \quad \lambda(G) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma d \ln G(t, \omega).$$

Величины $l(G)$ и $\lambda(G)$ будем называть частными индексами функции $G(t, \omega)$. Они являются целыми числами и не зависят соответственно от $\omega \in \Gamma$ и от $t \in C$.

Если $k_L(G) = 0$ для любого контура L, то, в частности, $\lambda(G) = l(G) = 0$ и наоборот. Отсюда при $l(G) = \lambda(G) = 0$ функция $\ln G(t, \omega)$ однозначна на любой замкнутой кривой, лежащей на $C \times \Gamma$, а следодовательно, и на остове $C \times \Gamma$.

Из определения частных индексов следует, что

$$l(G_1 \cdot G_2^{\pm 1}) = l(G_1) \pm l(G_2), \quad \lambda(G_1 \cdot G_2^{\pm 1}) = \lambda(G_1) \pm \lambda(G_2).$$

Если функция $G(t, \omega)$ дифференцируема на $C \times \Gamma$, то

$$l(G) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\partial G}{\partial t}\frac{dt}{G}, \quad \lambda(G) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\partial G}{\partial \omega}\frac{d\omega}{G}.$$

Примеры. Если $G(t, \omega) = t^m\omega^\mu$, а C и Γ — единичные окружности, то $l(G) = m$, $\lambda(G) = \mu$. Если же $G(t, \omega) = t^m + \omega^\mu$, $C = \{t : |t| = 1\}$, $\Gamma = \left\{\omega : |\omega| = \frac{1}{2}\right\}$, то $l(G) = m$, $\lambda(G) = 0$.

Пусть $F^{++} \in H^{++}$, w_0 — любая точка из Δ^+, а z_0 — любая точка из D^+, тогда порядки нулей $n(F^{++})$ и $\nu(F^{++})$ функций $F^{++}(z, w_0)$ и $F^{++}(z_0, w)$ соответственно равны

$$n(F^{++}) = l(F^{++}), \quad \nu(F^{++}) = \lambda(F^{++}). \tag{4.1}$$

Учитывая ориентацию контуров C и Γ найдем, что наряду с (4.1) справедливы следующие равенства:

$$n(F^{--}) = -l(F^{--}), \quad \nu(F^{--}) = -\lambda(F^{--}), \tag{4.1'}$$

$$n(F^{\pm\mp}) = \pm l(F^{\pm\mp}), \quad \nu(F^{\pm\mp}) = \pm\lambda(F^{\pm\mp}), \tag{4.2}$$

где $F^{--} \in H^{--}$, $F^{\pm\mp} \in H^{\pm\mp}$.

§ 5. Вырожденные однородные задачи II типа

5.1°. Первый случай. Будем искать решение следующих двух краевых задач:

$$F^{++}(t, \omega) = G_1(t, \omega)F^{--}(t, \omega), \quad G_1(t, \omega) \neq 0, \tag{5.1}$$

и

$$F^{+-}(t, \omega) = G_2(t, \omega)F^{-+}(t, \omega), \quad G_2(t, \omega) \neq 0. \tag{5.1'}$$

Допустим, что задача (5.1) имеет решение, тогда, учитывая (4.1) и (4.1′), будем иметь

$$l_1 \equiv l(G_1) = l(F^{++}) - l(F^{--}) = n(F^{++}) + n(F^{--}) \geqslant 0,$$
$$\lambda_1 \equiv \lambda(G_1) = \lambda(F^{++}) - \lambda(F^{--}) = \nu(F^{++}) + \nu(F^{--}) \geqslant 0.$$

Отсюда для разрешимости задачи (5.1) необходимо, чтобы $\lambda_1 \geqslant 0$ и $l_1 \geqslant 0$. Аналогично найдем, что необходимое условие разрешимости задачи (5,1′) такое: $l_2 \equiv l(G_2) \geqslant 0$ и $\lambda_2 \equiv \lambda(G_2) \leqslant 0$.

Пусть сначала $l_1 = \lambda_1 = 0$ и $l_2 = \lambda_2 = 0$, тогда

$$n(F^{\pm\pm}) = \nu(F^{\pm\pm}) = 0 \text{ и } n(F^{\pm\mp}) = \nu(F^{\pm\mp}) = 0.$$

Отсюда функции $\ln G_1(t, \omega)$ и $\ln G_2(t, \omega)$ определены и однозначны на $C \times \Gamma$, *а функции* $\ln F^{\pm\pm}$ *и* $\ln F^{\pm\mp}$ голоморфны соответственно в областях $D^{\pm} \times \Delta^{\pm}$ и $D^{\pm} \times \Delta^{\mp}$. Фиксируя ветвь $\ln G_1(t, \omega)$ и $\ln G_2(t, \omega)$, логарифмируя (5.1) и (5.1′), получим задачи о скачке

$$\ln F^{++} - \ln F^{--} = \ln G_1 \text{ и } \ln F^{+-} - \ln F^{-+} = \ln G_2,$$

которые разрешимы (см. § 1) соответственно при выполнении необходимого и достаточного условия $\ln G_1 = S(\ln G_1)$ и $\ln G_2 = -S(\ln G_2)$.

Допустим, что эти условия выполнены, тогда, полагая

$$\gamma_1(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{C\times\Gamma} \frac{\ln G_1(t, \omega)\, dt d\omega}{(t-z)(\omega - w)} \equiv K(\ln G_1)$$

и

$$\gamma_2(z, w) = K(\ln G_2),$$

найдем, что

$$F^{\pm\pm}(z, w) = \exp(\pm\gamma_1^{\pm\pm}(z, w)) \text{ и } F^{\pm\mp}(z, w) = \exp(\pm\gamma_2^{\pm\pm}(z, w)).$$

Отсюда вытекает

Предложение 1. *Пусть* $l_1 = \lambda_1 = 0$, $\ln G_1 = S(\ln G_1)$, $G_1 \neq 0$ *на* $C \times \Gamma$ ($l_2 = \lambda_2 = 0$, $\ln G_2 = -S(\ln G_2)$, $G_2 \neq 0$ на $C \times \Gamma$), *тогда функцию* $G_1(t, \omega)$ $(G_2(t, \omega))$ *можно представить в виде отношения двух функций* $F^{++}(t, \omega) \in H^{++}$ *и* $F^{--}(t, \omega) \in H^{--}$ $(F^{+-}(t, \omega) \in H^{+-}$ *и* $F^{-+}(t, \omega) \in H^{-+})$, *не имеющих нулей соответственно в* $D^+ \times \Delta^-$ *и* $D^- \times \Delta^-$ $(D^+ \times \Delta^-$ *и* $D^- \times \Delta^+)$, *причем* $F^{--}(z, \infty) = F^{--}(\infty, w) = 1$ $(F^{+-}(z, \infty) = F^{-+}(z, w) = 1)$.

Пусть теперь $\lambda_1 > 0$, $l_1 > 0$ и $l_2 > 0$, $\lambda_2 < 0$, тогда, полагая $G_{10} = t^{-l_1}\omega^{-\lambda_1}G_1$ и $G_{20} = t^{-l_2}\omega^{-\lambda_2}G_2$, будем иметь

$$l(G_{10}) = \lambda(G_{10}) = 0 \text{ и } l(G_{20}) = \lambda(G_{20}) = 0.$$

Если, кроме того, $\ln G_{10} = S(\ln G_{10})$ *и* $\ln G_{20} = -S(\ln G_{20})$, *то на основании предложения* 1 будем иметь

$$G_{10}(t, \omega) = e^{\gamma_{10}^{++}(t, \omega)} e^{\gamma_{10}^{--}(t, \omega)}, \quad \gamma_{10}(z, w) = K(\ln G_{10}),$$

и

$$G_{20}(t, \omega) = e^{\gamma_{20}^{+-}(t, \omega)} e^{\gamma_{20}^{-+}(t, \omega)}, \quad \gamma_{20}(z, w) = K(\ln G_{20}).$$

Равенства (5.1) и (5.1′) с учетом только что отмеченных фактов можно записать так:

$$e^{-\gamma_{10}^{++}} F^{++} = t^{l_1}\omega^{\lambda_1} F^{--} e^{\gamma_{10}^{--}}, \tag{5.2}$$

и

$$e^{\gamma_{20}^{+-}} F^{+-} = t^{l_2}\omega^{\lambda_2} F^{-+} e^{-\gamma_{20}^{-+}}. \tag{5.2′}$$

Используя решение соответствующей элементарной задачи (см. § 2), получим

$$F_{r\rho}^{++} = e^{\gamma_{10}^{++}(z, w)} z^r w^\rho, \quad F_{r\rho}^{--} = e^{-\gamma_{10}^{--}(z, w)} z^{r-l_1} w^{\rho-\lambda_1}, \tag{5.3}$$
$$r = 0, 1, \ldots, l_1 - 1, \quad \rho = 0, 1, \ldots, \lambda_1 - 1.$$

и

$$F_{r\rho}^{+-} = e^{-\gamma_{20}^{+-}(z,\, w)} z^r w^{\lambda_2+\rho}, \quad F_{r\rho}^{-+} = e^{\gamma_{20}^{-+}(z,\, w)} z^{r-l_2} w^{\rho} \tag{5.3'}$$
$$r = 0, 1, \ldots, l_2 - 1, \; \rho = 0, 1, \ldots, -\lambda_2 - 1.$$

Таким образом, *если* $l_1 > 0$, $\lambda_1 > 0$ ($l_2 > 0$, $\lambda_2 < 0$), *то задача (5.1) ((5,1′)) в классе* $H_0^{\pm\pm}$ ($H_0^{\pm\mp}$) *имеет* $\varkappa_1 = l_1\lambda_1$ ($\varkappa_2 = -l_2\lambda_2$) *линейно независимых решений, определяемых по формуле (5.3) ((5.3′)), если только функция* G_{10} (G_{20}) *удовлетворяет необходимому и достаточному условию разрешимости* $\ln G_{10} = S(\ln G_{10})$ ($\ln G_{20} = -S(\ln G_{20})$).

Число $\varkappa_1$ ($\varkappa_2$) *будем называть индексом задачи (5.1) ((5.1′)). Если отыскивать решения в классе* $H^{\pm\pm}$ ($H^{\pm\mp}$), *то задача (5.1) ((5.1′)) имеет* $(l_1+1)(\lambda_1+1)$ ($(l_2+1)(-\lambda_2+1)$) *линейно независимых решений, определяемых по формулам (5.3) ((5.3′)) при* $r = 0, 1, \ldots, l_1$, $\rho = 0, 1, \ldots, \lambda_1$ ($r = 0, 1, \ldots, l_2$, $\rho = 0, 1, \ldots, -\lambda_2$).

5.2°. Второй случай. Рассмотрим теперь такую задачу:

$$F^{++}(t, \omega) = G_3(t, \omega) F^{-+}(t, \omega), \quad G_3(t, \omega) \neq 0. \tag{5.4}$$

Положив $l_3 = l(G_3)$, $\lambda_3 = \lambda(G_3)$, из (5.4) найдем, что

$$l_3 = n(F^{++}) + n(F^{-+}) \geqslant 0, \quad \lambda_3 = \nu(F^{++}) - \nu(F^{-+}).$$

Пусть сначала $l_3 = \lambda_3 = 0$, тогда $n(F^{\substack{++\\-+}}) = 0$, а $\nu(F^{\substack{++\\-+}}) \equiv \nu$ — любое натуральное число. Таким образом, в общей постановке задачи (5.4) ее решения $F^{++}(z_1, w)$, $F^{-+}(z_2, w)$ при любом $z_1 \in D^+$ и $z_2 \in D^-$ должны иметь одну и ту же сумму ν порядков нулей при $w \in \Delta^+$. Но если $\nu > 0$, то функции $\ln F^{\substack{++\\-+}}(z, w)$, очевидно, не являются голоморфными. Поэтому при $l_3 = \lambda_3 = 0$ надо уточнить постановку задачи. Мы *будем отыскивать решения задачи (5.4), не обращающиеся в нуль в соответствующих областях.*

Фиксируя ветвь $\ln G_3(t, \omega)$ и логарифмируя (!) (5.4), получим

$$\ln F^{++} - \ln F^{-+} = \ln G_3. \tag{5.5}$$

Задача (5.5) разрешима, если $\ln G_3 = S_\omega(\ln G_3)$. При выполнении последнего условия будем иметь

$$F^{\substack{++\\-+}}(z, w) = \exp\left(\gamma_3^{\substack{++\\-+}}(z, w)\right) \neq 0,$$

где

$$\gamma_3(z, w) = K(\ln G_3), \quad F^{-+}(\infty, w) = 1,$$

Аналогичные рассмотрения краевых условий

$$F^{++} = G_4 F^{+-}, \quad F^{-+} = G_5 F^{--}, \quad F^{+-} = G_6 F^{--} \tag{5.6}$$

приводят к следующему результату.

Предложение 2. *Пусть* $l(G_k) = \lambda(G_k) = 0$, $k = 3, 4, 5, 6$, $\ln G_3 = S_\omega(\ln G_3)$, $\ln G_4 = S_t(\ln G_4)$, $\ln G_5 = -S_t(\ln G_5)$, $\ln G_6 = -S_\omega(\ln G_6)$, *тогда функцию* $G_k \in H$ *можно представить соответственно в виде отношения функций*

$$G_3 = \frac{\Phi_3^{++}}{\Phi_3^{-+}}, \quad G_4 = \frac{\Phi_4^{++}}{\Phi_4^{+-}}, \quad G_5 = \frac{\Phi_5^{-+}}{\Phi_5^{--}}, \quad G_6 = \frac{\Phi_6^{+-}}{\Phi_6^{--}},$$

где $\Phi_k^{\pm\pm} \in H^{\pm\pm}$, $\Phi_k^{\pm\mp} \in H^{\pm\mp}$, *не имеют нулей в соответствующих областях и обращаются в единицу в бесконечно удаленных точках областей* $D^- \times \Delta^-$ *и* $D^\pm \times \Delta^\mp$.

Продолжим исследование задачи (5.4). Используя предложение 2, при $l_3=\lambda_3=0$ условие (5.4) перепишем так:

$$\frac{F^{++}(t,\omega)}{\Phi^{++}(t,\omega)}=\frac{F^{-+}(t,\omega)}{\Phi^{-+}(t,\omega)}.$$

Отсюда по теореме Лиувилля

$$F^{\overset{++}{-+}}(z,w)=\Phi^{\overset{++}{-+}}(z,w)\,\varphi^{+}(w), \tag{5.7}$$

где $\varphi^{+}(w)$ — произвольная функция класса $H^{+}(\Gamma)$.

Из (5.7) видно, что в классе H_0^{-+} задача (5.4) имеет только тривиальное решение. Если же задать краевое условие $F^{-+}(\infty,w)=\varphi^{+}(w)$, то задача (5.4) в классе H^{-+} имеет единственное решение (5.7), так как $\Phi^{-+}(\infty,w)=1$.

Пусть теперь $l_3>0$, λ_3 — любое целое число. Положим $G_{30}=t^{-l_3}\omega^{-\lambda_3}G_3$ и допустим, что $\ln G_{30}=S_\omega(\ln G_{30})$, тогда $l(G_{30})=\lambda(G_{30})=0$ и (по предложению 2)

$$G_{30}=e^{\gamma_{30}^{++}}e^{-\gamma_{30}^{-+}},\quad \gamma_{30}(z,w)=K(\ln G_{30}).$$

Отсюда и из (5.4)

$$e^{\gamma_{30}^{++}}F^{++}=t^{l_3}\omega^{\lambda_3}F^{-+}e^{-\gamma_{30}^{-+}}. \tag{5.8}$$

Используя решение задачи (5.8), данное в § 2, найдем, что *задача (5.4) при $l_3>0$ имеет в классе $H_0^{\overset{++}{-+}}$ следующее общее решение:*

$$F^{++}=e^{\gamma_{30}^{++}(z,w)}\sum_{k=0}^{l_3-1}z^{k}\varphi_k^{+}(w),$$

$$F^{--}=e^{\gamma_{30}^{-+}(z,w)}w^{-\lambda_3}\sum_{k=0}^{l_3-1}z^{k-l_3}\varphi_k^{+}(w), \tag{5.9}$$

где произвольные функции $\varphi_k^{+}(w)\in H^{+}(\Gamma)$ $(\varphi_k^{+}(w)\,w^{-\lambda_3}\in H^{+}(\Gamma))$ *при* $\lambda_3\leqslant 0$ $(\lambda_3>0)$.

Если $\lambda_3>0$, то из (5.9) видно, что $\nu(F^{++})=\lambda_3+\nu(F^{-+})\geqslant\lambda_3>0$. *Если задать краевые условия, например, в таком виде:*

$$\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left(F^{++}(z,w)\,e^{-\gamma_{30}^{++}(z,w)}\right)\Big|_{\Delta_\infty^{+}}=\varphi_k^{+}(w), \tag{5.10}$$

то задача (5.4), (5.10) при выполнении необходимого и достаточного условия $\ln G_{30}=S_\omega(\ln G_{30})$ *имеет единственное решение (5.9).*

Если же не задавать краевых условий (5.10), то задача (5.4) имеет бесконечно много линейно независимых решений, хотя $\varkappa_3(G)=\lambda_3 l_3$ — число конечное.

Аналогично исследуются задачи (5.6), на чем мы не останавливаемся.

§ 6. Вырожденные неоднородные задачи II типа

6.1°. Первый случай. Для решения задачи

$$F^{++}(t,\omega)=G_1(t,\omega)\,F^{--}(t,\omega)+g_1(t,\omega),\quad G_1(t,\omega)\neq 0, \tag{6.1}$$

где G_1 и g_1 из H, введем так называемые канонические функции для соответствующей однородной задачи (5.1):

$$\chi^{++}(z,w)=e^{\gamma_{10}^{++}(z,w)},\quad \chi^{--}(z,w)=z^{-l_1}w^{-\lambda_1}e^{-\gamma_{10}^{--}(z,w)} \tag{6.2}$$

(обозначения см. в § 5). Если $l_1 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$ и $\ln G_{10} = S(\ln G_{10})$, то (6.2) действительно дают решения задачи (5.1). Если же l_1 и λ_1 не удовлетворяют этим неравенствам порознь или одновременно, но $\ln G_{10} = S(\ln G_{10})$, то все же

$$e^{\overset{++}{\gamma_{10}}} e^{\overline{\gamma_{10}}^{--}} = e^{\ln G_{10}} = t^{-l_1}\omega^{-\lambda_1} G_1$$

и, значит,

$$G_1(t, \omega) = \frac{\chi^{++}(t, \omega)}{\chi^{--}(t, \omega)}, \tag{6.3}$$

где $\chi^{\pm\pm} \in H^{\pm\pm}$.

Воспользовавшись равенством (6.3), краевое условие (6.1) перепишем так:

$$\frac{F^{++}}{\chi^{++}} = \frac{F^{--}}{\chi^{--}} + \frac{g_1}{\chi^{++}}. \tag{6.4}$$

Мы пришли к задаче о скачке, которая разрешима лишь в том случае, (см. § 1), когда функция g_1/χ^{++} представима в виде суммы $\Psi^{++}(t, \omega) + \Psi^{--}(t, \omega)$. Допустим, что это так, тогда

$$e^{-\overset{++}{\gamma_{10}}} F^{++} - \Psi^{++} = t^{l_1}\omega^{\lambda_1}\left(e^{\overline{\gamma_{10}}^{--}} F^{--} + t^{-l_1}\omega^{-\lambda_1}\Psi^{--}\right). \tag{6.5}$$

Если $l_1 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$, то при наложенных выше ограничениях, в силу обобщенной теоремы Лиувилля, из (6.5) получим

$$F_{r\rho}^{\pm\pm} = \chi^{\pm\pm}(z, w)\left[\pm\Psi^{\pm\pm}(z, w) + z^r w^\rho\right], \tag{6.6}$$
$$r = 0, 1, \ldots, l_1, \quad \rho = 0, 1, \ldots, \lambda_1.$$

Если же $l_1 < 0$ и $\lambda_1 < 0$, то правая часть (6.5) тождественно равна нулю и, значит,

$$F^{\pm\pm} = \pm\chi^{\pm\pm}(z, w)\,\Psi^{\pm\pm}(z, w). \tag{6.6'}$$

Однако в последнем случае, чтобы

$$F^{--} = e^{-\overline{\gamma_{10}}^{--}(z, w)} z^{-l_1} w^{-\lambda_1} \Psi^{--}(z, w) \in H_0^{--},$$

необходимо и достаточно, чтобы $\Psi^{--}(z, w)$ имела вид

$$\Psi^{--}(z, w) = \sum_{r=-l_1}^{\infty} \sum_{\rho=-\lambda_1}^{\infty} c_{r\rho} z^{-r} w^{-\rho}$$

или, что то же самое,

$$a_r(w) \equiv \int\limits_{C\times\Gamma} \frac{g_1(t, \omega)}{\chi^{++}(t, \omega)} \frac{t^{r-1}\, dt\, d\omega}{\omega - w} = 0, \; w \in \Delta^-, \; r = 1, 2, \ldots, -l_1, \tag{6.7}$$

$$a_\rho(z) \equiv \int\limits_{C\times\Gamma} \frac{g_1(t, \omega)}{\chi^{++}(t, \omega)} \frac{\omega^{\rho-1}\, dt\, d\omega}{t - z} = 0, \; z \in D^-, \; \rho = 1, 2, \ldots, -\lambda_1. \tag{6.8}$$

Если же $l_1 \geqslant 0$ $(\lambda_1 \geqslant 0)$, а $\lambda_1 < 0$ $(l_1 < 0)$, то условие (6.7) ((6.8)) опускаем.

Итак, *задача (6.1) при* $l_1 \geqslant 0$ *и* $\lambda_1 \geqslant 0$ *и выполнении необходимых и достаточных условий* $\ln G_{10} = S(\ln G_{10})$ *и* $g_1/\chi^{++} = S(g_1/\chi^{++})$ *имеет в классе* $H^{\pm\pm}$ $(l_1 + 1)(\lambda_1 + 1)$ *линейно независимых решений, определяемых по формулам (6.6). Если же* $l_1 \geqslant 0$, $\lambda_1 < 0$ $(l_1 < 0, \lambda_1 \geqslant 0)$ *или* $l_1 < 0$, $\lambda_1 < 0$, *то решение задачи дают формулы (6.6′) при выполнении необходимых и достаточных условий (6.8) ((6.7)) или соответственно (6.8) и (6.7).*

Таким образом, задача (6.1) имеет конечное число решений при выполнении счетного количества условий разрешимости, Совершенно аналогичная ситуация получается при решении задачи

$$F^{+-}(t, \omega) = G_2(t, \omega) F^{-+}(t, \omega) + g_2(t, \omega), \quad G_2(t, \omega) \neq 0, \tag{6.9}$$

если, конечно, $\ln G_{20} = -S(\ln G_{20})$ и g_2/χ^{+-} представимо в виде суммы $\Psi^{+-} + \Psi^{-+}$, где $\chi^{\pm\mp}$ — канонические функции этой задачи, определяемые равенствами

$$\chi^{+-} = w^{\lambda_2} e^{-\gamma_{20}^{+-}(z, w)}, \quad \chi^{-+} = z^{-l_2} e^{\gamma_{20}^{-+}(z, w)}.$$

6.2°. Второй случай. При решении задачи

$$F^{++}(t, \omega) = G_3(t, \omega) F^{-+}(t, \omega) + g_3(t, \omega), \quad G_3(t, \omega) \neq 0, \tag{6.10}$$

где $\ln G_{30} = S_\omega(\ln G_{30})$, введем канонические функции следующим образом:

$$\chi^{++}(z, w) = e^{\gamma_{30}^{++}(z, w)}, \quad \chi^{-+}(z, w) = z^{-l_3} w^{-\lambda_3} e^{-\gamma_{30}^{-+}(z, w)} \tag{6.11}$$

(обозначения см. в § 5), которые дают решение задачи (5.4) только при $l_3 \geqslant 0$ и $\lambda_3 \leqslant 0$. Однако при всех значениях l_3 и λ_3

$$\frac{\chi^{++}}{\chi^{-+}} = e^{\gamma_{30}^{++}} e^{-\gamma_{30}^{-+}} t^{l_3} \omega^{\lambda_3} = G_{30} t^{l_3} \omega^{\lambda_3} = G_3(t, \omega),$$

если только $\ln G_{30} = S_\omega(\ln G_{30})$.

Отсюда и из (6.9) имеем

$$\frac{F^{++}}{\chi^{++}} = \frac{F^{-+}}{\chi^{-+}} + \frac{g_3}{\chi^{++}}.$$

Полученная задача о скачке разрешима тогда и только тогда, когда $g_3/\chi^{++} = \Psi^{++} - \Psi^{-+}$. Пусть это условие выполняется, тогда

$$e^{-\gamma_{30}^{++}} F^{++} - \Psi^{++} = t^{l_3} \omega^{\lambda_3} e^{-\gamma_{30}^{-+}} F^{-+} - t^{-l_3} \Psi^{-+}. \tag{6.12}$$

Если $l_3 \geqslant 0$, то по обобщенной теореме Лиувилля из (6.12)

$$\overset{++}{\underset{k}{F^{-+}}} = \overset{++}{\chi^{-+}}(z, w)\,[\overset{++}{\Psi^{-+}}(z, w) + z^k \varphi_k^+(w)] \tag{6.13}$$
$$k = 0, 1, \ldots, l_3,$$

где $\varphi_k^+(w)$ — произвольные функции класса $H^+(\Gamma)$.

Формулы (6.13) действительно дают решение лишь при $\lambda_3 \leqslant 0$. Если же $\lambda_3 > 0$, то помимо условия $w^{-\lambda_3}\varphi_k^+(w) \in H^+(\Gamma)$, $k = 0, 1, \ldots, l_3$ должно выполняться условие $w^{-\lambda_3}\Psi^{-+} \in H^{-+}$, что дает еще счетное множество необходимых и достаточных условий (см. § 1) на функцию g_3/χ^{++} и в конечном счете на функции g_3 и G_3.

Если $l_3 < 0$, то из (6.12) следует, что

$$\overset{++}{F^{-+}} = \overset{++}{\chi^{-+}}(z, w)\, \overset{++}{\Psi^{-+}}(z, w). \tag{6.12′}$$

Отсюда задача (6.9) разрешима, если $z^{-l_3}\Psi^{-+} \in H^{-+}$ при $\lambda_3 \leqslant 0$ и если $z^{-l_3} w^{-\lambda_3} \Psi^{-+} \in H^{-+}$ при $\lambda_3 > 0$, т. е. снова при выполнении счетного множества необходимых и достаточных условий разрешимости.

Подведем итог. *Задача (6.9) при выполнении необходимых и достаточных условий разрешимости* $\ln G_{30} = S_\omega(\ln G_{30})$ *и* $g_3/\chi^{++} = S_\omega(g_3/\chi^{++})$ *при* $l_3 \geqslant 0$ *и* $\lambda_3 \leqslant 0$ *имеет счетное множество линейно независимых решений (6.12). Если же* $l_3 \geqslant 0$, *а* $\lambda_3 < 0$, *то добавляется еще одно счетное множество необходимых и достаточных условий разрешимости.*

Однако формулы (6.12) по-прежнему дают счетное множество решений. Здесь мы имеем счетное множество решений и счетное множество условий разрешимости. Задавая краевые условия, определяющие функции $\varphi_k^+(\omega)$, входящие в решение (6.12), получим задачу, имеющую единственное решение при $l_3 \geqslant 0$ и счетное множество условий разрешимости.

Если $l_3 < 0$, то единственное решение (6.12') имеет место при выполнении счетного множества условий разрешимости.

Совершенно аналогично можно исследовать другие три задачи этого типа

$$F^{++} = G_4F^{+-} + g_4, \quad F^{+-} = G_5F^{--} + g_5, \quad F^{-+} = G_6F^{--} + g_6,$$

на чем мы не останавливаемся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.

2. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.

3. А. В. Бицадзе. Нормально разрешимые эллиптические краевые задачи. ДАН СССР, т. 164, № 6, 1218—1220, 1965.

4. В. С. Владимиров. Задача линейного сопряжения голоморфных функций. «Изв. АН СССР», сер. матем., т. 29, № 4, 807—834, 1965.

5. В. А. Какичев. О задаче линейного сопряжения для бицилиндрических областей. Тезисы секции 4 (классический анализ) Междунар. матем. конгресса, М., 1965, 56.

6. Б. А. Фукс. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1963.

7. В. А. Какичев. Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных. «Уч. зап. Шахтинского désинститута», т. 2, в. 6, 25—90, 1959.

8. Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1962.

9. С. К. Токликишвили. Об одной линейной граничной задаче для функций многих комплексных переменных. «Тр. Груз. политех. ин-та», № 3 (10), 3—10, 1965.

10. В. А. Какичев. Граничные свойства интеграла типа Коши для многих комплексных переменных и некоторые его приложения. Автореф. канд. дисс., Р-на-Д., 1960.

11. С. К. Токликишвили. Об одном интегральном уравнении в кратных интегралах с ядрами Коши. «Тр. Груз. политехн. ин-та», № 1 (99), 5—17, 1965.

12. М. Б. Гагуа. О некотором применении кратных интегралов Коши. Сб. «Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного». Физматгиз, М., 345—352, 1960.

Поступила 20 ноября 1966 г.