ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

А. А. Гольдберг

Целью заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Если $f(z)$ — мероморфная в конечной плоскости функция, не равная тождественно постоянной, а $g(z)$ — целая функция, причем при $|z| < \infty$ выполняется*

$$f(g(z)) = f(z), \tag{1}$$

то $g(z)$ — линейная функция.

Гипотезу о справедливости этой теоремы выдвинул Ф. Гросс [1]. Если $f(z)$ — целая функция, то справедливость теоремы сразу следует из установленного У. Хейманом [2, гл. II, лемма 2.6] соотношения: если $g(z)$ не является линейной функцией, то

$$T(r, f) = o\{T(r, f(g)\} \text{ при } r \to \infty, \tag{2}$$

где $T(r, f)$ обозначает неванлинновскую характеристику функции $f(z)$. У. Хейман доказал (2), предполагая функцию $g(z)$ трансцендентной, но его доказательство лишь упрощается для случая, когда $g(z)$ — многочлен степени выше первой. Если $f(z)$ — мероморфная функция, то вопрос о справедливости соотношения (2) остается открытым [1]. Поэтому мы используем другой метод доказательства. Заметим, что вопрос о виде линейной функции $g(z) = az + b$, для которой при некоторой мероморфной функции $f(z)$ может выполняться тождество $f(az + b) = f(z)$, исследован давно [3, гл. VI].

Предположим, что выполнены условия теоремы. Пусть $g_1(z) = g(z)$, $g_k(z) = g\{g_{k-1}(z)\}$ — k-я итерация функции $g(z)$, $k \geqslant 2$. Очевидно, что если при некотором $k \geqslant 1$ функция $g_k(z)$ является линейной, то линейной является и функция $g(z)$. Далее из (1) следует, что при любом $k \geqslant 1$ выполняется

$$f(g_k(z)) = f(z). \tag{3}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что (при $g(z) \not\equiv z + b$) уравнение $g(z) = z$ имеет хотя бы один корень z_0. Действительно, в противном случае по теореме П. Фату ([4], см. также [6, гл. II, § 2.8]) уравнение $g_2(z) = z$ имело хотя бы один корень и мы бы доказывали линейность функции $g_2(z)$. Далее можно считать, что z_0 не является полюсом функции $f(z)$, так как в противном случае рассматривали бы функцию $1/f(z)$. Пусть в окрестности точки z_0 справедливы разложения

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j (z - z_0)^j,$$

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j (z - z_0)^j. \tag{4}$$

Воспользуемся далее следующей формулой, являющейся непосредственным следствием известной формулы Бруно для производной сложной функции [5, стр. 48]. Если $g(z)$ разлагается в ряд (4), $g(z_0) = w_0$ и $f(w)$ в окрестности w_0 разлагается в ряд

$$f(w) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j (w - w_0)^j,$$

а $h(z) = f(g(z))$ разлагается в окрестности z_0 в ряд

$$h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} H_j (z - z_0)^j,$$

то при $n \geqslant 1$

$$H_n = \sum\nolimits^{(n)} \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!} F_{k_1 + \cdots k_n} G_1^{k_1} \ldots G_n^{k_n}, \quad 0^0 = 1,$$

где сумма $\sum^{(n)}$ берется по всем неотрицательным целым числам k_j, которые удовлетворяют равенству $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$. В нашем случае в силу (1) и равенства $g(z_0) = z_0$ имеем $(n \geqslant 1)$

$$F_n = \sum\nolimits^{(n)} \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!} F_{k_1 + \cdots + k_n} G_1^{k_1} \ldots G_n^{k_n}. \tag{5}$$

Предположим, что функция $f(z) - f(z_0)$ имеет в z_0 нуль порядка ν, $\nu \geqslant 1$. Записывая равенство (5) для $n = \nu$, учтем, что для всех $k_j \geqslant 0$, удовлетворяющих равенству $k_1 + 2k_2 + \cdots + \nu k_\nu = \nu$, имеем $k_1 + \cdots + k_\nu < \nu$, если хотя бы одно k_j, $2 \leqslant j \leqslant \nu$, положительно. В этом случае $F_{k_1 + \cdots + k_\nu} = 0$. Следовательно, в сумме $\sum^{(\nu)}$ лишь одно слагаемое, соответствующее $k_1 = \nu$, $k_2 = \cdots = k_\nu = 0$, отлично от нуля. Равенство (5) при $n = \nu$ запишется так: $F_\nu = F_\nu G_1^\nu$, следовательно, $G_1 = \exp(2\pi i \mu/\nu)$, где μ — одно из чисел $0, 1, \ldots, \nu - 1$. Не уменьшая общности, можно считать, что $G_1 = 1$. Действительно, в противном случае мы рассматривали бы функцию $g_\nu(z)$, для которой $g_\nu(z_0) = z_0$, $g_\nu'(z_0) = G_1^\nu = 1$ и в силу (3) выполняется (1).

Покажем теперь, что $G_N = 0$ при $N \geqslant 2$. Доказательство проведем индукцией по N. Запишем равенство (5) для $n = \nu + 1$. В сумме $\sum^{(\nu+1)}$ можно ограничиться лишь теми слагаемыми, для которых $k_1 + \cdots + k_{\nu+1} \geqslant \nu$, так как все остальные равны нулю. Из равенства $k_1 + 2k_2 + \cdots + (\nu + 1) k_{\nu+1} = \nu + 1$ следует, что $k_2 + 2k_3 + \cdots + \nu k_{\nu+1} \leqslant 1$. Значит, в сумме $\sum^{(\nu+1)}$ отличаться от нуля могут только те слагаемые, для которых или $k_1 = \nu + 1$, $k_2 = \cdots = k_{\nu+1} = 0$, или $k_1 = \nu - 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = \cdots = k_{\nu+1} = 0$. Учитывая это, из (5) получаем

$$F_{\nu+1} = F_{\nu+1} G_1^{\nu+1} + \nu F_\nu G_1^{\nu-1} G_2 = F_{\nu+1} + \nu F_\nu G_2.$$

Поскольку $F_\nu \neq 0$, заключаем, что $G_2 = 0$. Предположим, что уже доказано, что $G_2 = G_3 = \cdots = G_N = 0$, $N \geqslant 2$. Запишем равенство (5) для $n = \nu + N$. В сумме $\sum^{(\nu+N)}$ можно не выписывать те слагаемые, для которых хотя бы при одном j, $2 \leqslant j \leqslant N$, число $k_j > 0$, так как $G_j = 0$, а также не выписывать слагаемые, для которых $k_1 + k_2 + \cdots + k_{\nu+N} < \nu$, так как тогда $F_{k_1 + \cdots + k_{\nu+N}} = 0$. Значит, в сумме $\sum^{(\nu+N)}$ можно ограничиться слагаемыми, для которых: а) $k_2 = k_3 = \cdots = k_N = 0$; б) $k_1 + (1 + N) k_{1+N} + \cdots + (\nu + N) k_{\nu+N} = \nu + N$; в) $k_1 + k_{1+N} + \cdots + k_{\nu+N} \geqslant \nu$. Из б) и в) следует, что $N k_{1+N} + \cdots + (\nu - 1 + N) k_{\nu+N} \leqslant N$. Легко видеть, что условиям а), б), в) удовлетворяют только такие наборы чисел: 1) $k_1 = \nu - 1$, $k_{N+1} = 1$, $k_j = 0$ при $j \neq 1, N+1$; 2) $k_1 = \nu + N$, $k_j = 0$ при $j \geqslant 2$. Формула (5) при $n = \nu + N$ запишется так:

$$F_{\nu+N} = F_{\nu+N} G_1^{\nu+N} + \nu F_\nu G_1^{\nu-1} G_{N+1} = F_{\nu+N} + \nu F_\nu G_{N+1}.$$

Отсюда заключаем, что $G_{N+1} = 0$. Итак, доказано, что $G_j = 0$ при $j \geqslant 2$. Из (4) следует, что $g(z)$ — линейная функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Gross. On factorization of meromorphic functions, Lecture Notes Prepared, in Connection with the Sommer Institute on Entire Functons Held at University of California, June 27 — July 22, 1966, Amer. Math. Soc., 1966.

2. У. Хейман. Мероморфные функции. Изд-во «Мир», М., 1966.

3. Л. Р. Форд. Автоморфные функции. ОНТИ, М. — Л., 1936.

4. P. Fatou. Sur l'itération des fonctions transcendantes entières, Acta math. 47, 337—370, 1926.

5. Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. Изд-во иностр. лит., М., 1963.

Поступила 20 ноября 1966 г.