О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Б. М. Левитан

ВВЕДЕНИЕ

Разложение по собственным функциям уравнения

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\} u = 0 \tag{0.1}$$

проще получить для прямоугольной области и нулевых граничных условий (см., напр., [1], гл. XI).

Разложение по собственным функциям уравнения (0.1) в случае произвольной области D и нулевых граничных условиях можно получить с помощью следующего приема.

Погрузим область D в куб Q и положим

$$q_c(x) = \begin{cases} q(x) & \text{для } x \in D \\ c^2 & \text{для } x \in Q - D, \end{cases}$$

где c^2 — постоянное положительное число.

Тогда при $c \to \infty$ собственные значения для уравнения (0.1) (при $q = q_c$) сходятся к собственным значениям уравнения (0.1) в области D при нулевых граничных условиях, а собственные функции в области D сходятся к собственным функциям уравнения (0.1) (с нулевыми граничными условиями), а в области $(Q - D)$ — сходятся к нулю.

Эта сходимость имеет простую механическую и квантово-механическую интерпретацию, однако строгое математическое доказательство впервые было дано Титчмаршем в 1949 г. (см. [1, стр. 121] или [2]).

В настоящей заметке дается доказательство указанной сходимости, отличное от доказательства Титчмарша.

В некоторых пунктах наши результаты сильнее, чем в работе Титчмарша. Например, мы доказываем, что внутри области $(Q - D)$ собственные функции сходятся к нулю равномерно. С другой стороны, в вопросе о поведении собственных функций вблизи границы наши результаты существенно слабее, чем у Титчмарша, однако достаточны для доказательства ортогональности полученных собственных функций, из которой следует самосопряженность предельной задачи (т. е. единственность функции Грина предельной задачи).

§ 1. ВЫВОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВ

1. Рассмотрим оператор Шредингера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}+\{\lambda-q(x_1, x_2, x_3)\}u=0 \qquad (1.1)$$

в кубе $Q: a \leqslant x_i \leqslant b$ $(i=1, 2, 3)$. На границе Γ куба Q пусть задано произвольное самосопряженное граничное условие. Функция $q(x)$ $[x=(x_1, x_2, x_3)]$ предполагается действительной и пока что достаточно гладкой.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ собственные значения этой задачи и через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ соответствующие ортонормированные собственные функции.

Наряду с задачей на собственные значения рассмотрим смешанную задачу:

$$\Delta u - q(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (1.2)$$

$$u|_{t=0}=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \qquad (1.3)$$

$$u(x, t)|_{x\in\Gamma}=0, \qquad (1.4)$$

где $f(x)$ — достаточно гладкая функция, согласованная с граничным условием (1.4).

Если $f(x)$ и $q(x)$ — достаточно гладкие функции, то задачу (1.2), (1.3), (1.4) можно решить по методу Фурье. В результате решение $u(x, t)$ представится в виде бесконечного ряда

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)\cos\mu_n t,$$

где

$$c_n=\int_Q f(y)\varphi_n(y)\,dy, \qquad \mu_n=\sqrt{\lambda_n}.$$

С другой стороны, если x лежит внутри Q и t настолько мало, что сфера радиуса t с центром в точке x целиком лежит внутри Q, то граничное условие (1.4) можно не принимать во внимание и решение $u(x, t)$ задачи (1.2), (1.3) можно записать в виде (см. [1, приложение VI, § 1]

$$u(x, t)=u_0(x, t)+\frac{1}{4\pi}\int_{r\leqslant t} w(x, y; t) f(y)\,dy.$$

Здесь $u_0(x, t)$ — решение задачи (1.2), (1.3) при $q(x)=0$, $w(x, y; t)$ зависит от $q(x)$ (но не зависит от ее производных), $r=|x-y|$.

Пусть теперь $g_\varepsilon(t)$ четная, достаточно гладкая функция, равная нулю вне интервала $(0, \varepsilon)$ и

$$\psi_\varepsilon(\mu)=\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t)\cos\mu t\,dt$$

ее cos-преобразование Фурье.

Воспользуемся теперь формулой (п. 6.2.16) из приложения VI к [1], в силу которой

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_k(x)\varphi_k(y)\psi_\varepsilon(\mu_k)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{g_\varepsilon'(r)}{r}-\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_r^\varepsilon w(x, y; t) g_\varepsilon'(t)\,dt, & r\leqslant\varepsilon. \\ 0, & r\geqslant\varepsilon\end{cases} \qquad (1.5)$$

Так как функция $\omega(x, y; t)$ не зависит от производных функций $q(x)$, то формула (1.5) справедлива также и для функций $q(x)$, имеющих разрывы первого рода вдоль конечного числа поверхностей.

2. Предположим теперь, что в ε — окрестности некоторой точки x $q(x)$ равняется постоянной положительной величине, которую мы обозначим через c^2. В этом случае решение $u(x, t)$ для $t \leqslant \varepsilon$ можно записать в явном виде (см., например, [3, стр. 463]):

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t I_0(c\sqrt{t^2 - \rho^2})\, Q(x, \rho)\, d\rho.$$

Здесь $I_0(\alpha)$ — функция Бесселя первого рода,

$$Q(x, \rho) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega_3} f(x_1 + \beta_1\rho,\ x_2 + \beta_2\rho,\ x_3 + \beta_3\rho)\, d\omega_3$$

среднее значение функции $f(x)$ по сфере радиуса ρ с центром в точке x.

Повторяя вывод тождества (1.5), нетрудно получить тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\, \varphi_k(y)\, \psi_\varepsilon(\mu_k) = \begin{cases} \int\limits_r^\varepsilon \left[\frac{g_\varepsilon'(t)}{t}\right]' I_0(c\sqrt{t^2 - r^2})\, dt, & r = |x - y| \leqslant \varepsilon \\ 0, & r \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{1.6}$$

В дальнейшем нам понадобится тождество (1.6) только для случая $r = 0$ (т. е. $x = y$). В этом случае из формулы (1.6) вытекает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(x)\, \psi_\varepsilon(\mu_k) = \int_0^\varepsilon \left[\frac{g_\varepsilon'(t)}{t}\right]' I_0(ct)\, dt. \tag{1.7}$$

§ 2. СХОДИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть D — конечная связная область пространства R_3 с границей S. В дальнейшем будет предполагаться, что граница S удовлетворяет следующему условию: S можно разбить на конечное число частей, уравнение каждой из которых можно записать в явном виде, например, $x_3 = f(x_1, x_2)$.

Пусть в области $\overline{D} = D + S$ задана непрерывная и неотрицательная функция $q(x)$ (последнее условие для задачи вида (0.1) не является ограничением, так как можно сдвинуться по спектру).

Пусть область D содержится в кубе Q и в свою очередь содержит куб Q'. Положим

$$q_c(x) = \begin{cases} q(x) & \text{для } x \in D \\ c^2 & \text{для } x \in Q - D. \end{cases}$$

Здесь c^2 — постоянное положительное число.

Обозначим через $\lambda_n^{(c)}$ и $\psi_n^{(c)}(x)$ $[x = (x_1, x_2, x_3);\ n = 1, 2, \ldots]$ собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи:

$$\Delta u + [\lambda - q_c(x)]\, u = 0, \quad x \in Q, \tag{2.1}$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma \quad (\Gamma \text{ — граница } Q). \tag{2.2}$$

В этом и в следующих за ним параграфах доказывается

Теорема. *Существуют пределы*

$$\lim_{c\to\infty}\lambda_n^{(c)}=\lambda_n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.3}$$

$$\lim_{c\to\infty}\psi_n^{(c)}(x)=0 \quad \text{для } x\in Q-D. \tag{2.4}$$

Существует подпоследовательность c_k, для которой

$$\lim_{c_k\to\infty}\psi_n^{(c_k)}(x)=\psi_n(x), \quad x\in D. \tag{2.5}$$

При этом числа λ_n суть собственные значения задачи

$$\Delta u+\{\lambda-q(x)\}u=0 \quad (x\in D) \tag{2.1'}$$

при нулевых граничных условиях, а $\psi_n(x)$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции.

Доказательство. Начнем с равенства (2.3). Обозначим через μ_n собственные значения для уравнения (2.1) в области Q' при нулевом граничном условии. Числа μ_n не зависят от c. Далее, в силу известных теорем $\lambda_n^{(c)}\leqslant\mu_n\,(n=1,\ 2,\ \ldots)$ и при каждом фиксированном n $\lambda_n^{(c)}$ есть неубывающая функция c. Поэтому существуют пределы (2.3).

Докажем теперь равенство (2.4). Это также не сложно.

Пусть $x\in Q-\overline{D}$ и пусть $\varepsilon>0$ настолько мало, что сфера радиуса ε с центром в точке x целиком лежит в области $Q-\overline{D}$. Подберем $g_\varepsilon(t)$ так, чтобы

$$\psi_\varepsilon(\mu)=\left(\frac{\sin\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu}\right)^4.$$

Из тождества (1.7) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(c)^2}(x)\left(\frac{\sin\varepsilon\mu_k^{(c)}}{\varepsilon\mu_k^{(c)}}\right)^4=\int_0^{\varepsilon}\left[\frac{g_\varepsilon'(t)}{t}\right]' I_0(ct)\,dt. \tag{2.6}$$

При фиксированном ε и $c\to\infty$ правая часть тождества (2.6) стремится к нулю. Отсюда следует (2.4).

Замечание. Из вывода видно, что равенство (2.4) имеет место равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $Q-\overline{D}$. Можно показать, что оно имеет также место равномерно в окрестности границы Γ куба Q. Это следует из того, что если $q_c(x)$ продолжить за границу Γ четно, то собственные функции задачи (2.1), (2.2) продолжаются нечетно (подробнее об этом см. в работе [4]).

2. Теперь мы докажем существование пределов (2.5).

Для доказательства используем тождество (1.5):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(c)}(x)\,\psi_k^{(c)}(y)\,\psi_\varepsilon(\mu_k^{(c)})=\begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{g_\varepsilon'(r)}{r}-\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_r^{\varepsilon}\omega(x,\ y;\ t)\,g_\varepsilon'(t)\,dt, & r\leqslant\varepsilon\\ 0, & r\geqslant\varepsilon. \end{cases} \tag{2.7}$$

Если x и $y\in D$ и ε достаточно мало, то правая часть тождества (2.7) не зависит от c. Поэтому, рассуждая как в § 5 приложения VI к [1], мы убедимся, что функции $\psi_n^{(c)}(x)$ внутри области D равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Поэтому можно выбрать такую подпоследовательность c_k, что существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty}\psi_n^{(c_k)}(x)=\psi_n(x).$$

В дальнейшем будет показано, что эти пределы в существенном от подпоследовательности не зависят.

Замечание. Несколько видоизменяя рассуждения § 4 приложения VI к [1], можно доказать $\left(\text{предполагая существование в области } D \text{ непрерывных частных производных } \frac{\partial q}{\partial x_i},\ i=1,\ 2,\ 3\right)$ существование пределов

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\psi_n^{(c_k)}(x)=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\psi_n(x)\qquad (i=1,\ 2,\ 3;\ n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому, переходя в уравнении

$$\Delta\psi_n^{(c_k)}+\{\lambda_n^{(c_k)}-q_{c_k}(x)\}\,\psi_n^{(c_k)}=0$$

к пределу, мы получим для $x\in D$

$$\Delta\psi_n+\{\lambda_n-q(x)\}\,\psi_n=0.$$

§ 3. ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Рассмотрим кусок ΔS поверхности S, уравнение которого может быть записано в явном виде, например,

$$x_3=f(x_1,\ x_2).$$

Выберем на ΔS произвольную точку M с координатами $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ и на прямой, параллельной оси x_3 и проходящей через точку M, отложим внутрь области D и вне ее отрезки длины r и ρ (см. рисунок). Соответствующие точки обозначим через x и y. Поверхность, образованную точками x, обозначим через ΔS_r, точками y — через ΔS_ρ. Область пространства, заключенную между поверхностями ΔS и ΔS_r и прямыми, проходящими через край ΔS параллельно оси x_3, обозначим через ΔD_r.

Аналогичную область между поверхностями ΔS_r и ΔS_ρ обозначим через $\Delta D_{r\rho}$.

Для каждого фиксированного c справедливо равенство

$$\psi_n^{(c)}(x)-\psi_n^{(c)}(y)=\int_{(x)}^{(y)}\frac{\partial\psi_n^{(c)}}{\partial x_3}\,dx_3.$$

Отсюда вытекает

$$[\psi_n^{(c)}(x)]^2\leqslant 2\left\{[\psi_n^{(c)}(y)]^2+\left(\int_{(x)}^{(y)}\frac{\partial\psi_n^{(c)}}{\partial x_3}\,dx_3\right)^2\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{[\psi_n^{(c)}(y)]^2+(r+\rho)\int_{(x)}^{(y)}\left(\frac{\partial\psi_n^{(c)}}{\partial x_3}\right)^2dx_3\right\}.$$

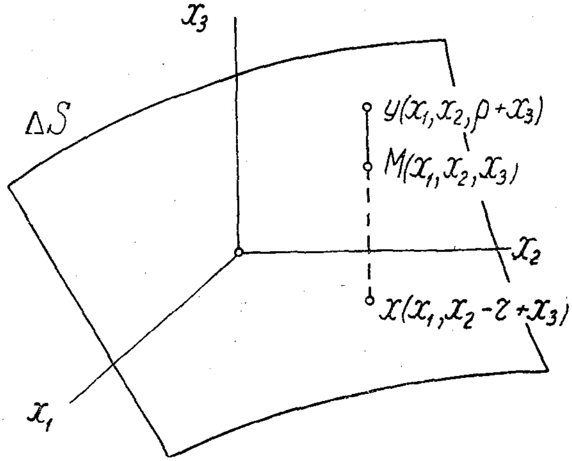
Интегрируя последнее неравенство по поверхности ΔS_r, мы получим

$$\iint\limits_{(\Delta S_r)} [\psi_n^{(c)}(x)]^2 \, d(\Delta S_r) \leqslant 2 \Big\{ \iint\limits_{\Delta S_r} [\psi_n^{(c)}(y)]^2 \, d(\Delta S_r) + $$

$$+ (r + \rho) \iiint\limits_{\Delta D_{r\rho}} \left(\frac{\partial \psi_n^{(c)}}{\partial x_3} \right)^2 dx_1 dx_2 dx_3. \tag{3.1}$$

Из (3.1) и неравенства

$$\iiint\limits_{(Q)} \left[\left(\frac{\partial \psi_n^{(c)}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_n^{(c)}}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_n^{(c)}}{\partial x_3} \right)^2 + q_c(x) \psi_n^{(c)2} \right]^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \lambda_n^{(c)} \leqslant \mu_n \tag{3.2}$$



(определение чисел μ_n см. в § 2) следует

$$\iint\limits_{(\Delta S_r)} [\psi_n^{(c)}(x)]^2 \, d(\Delta S_r) \leqslant 2 \iint\limits_{(\Delta S_r)} [\psi_n^{(c)}(y)]^2 \, d(\Delta S_r) + 2\mu_n (r + \rho). \tag{3.3}$$

Полагая $c = c_k$ и устремляя при фиксированном ρ c_k к бесконечности, мы получим (используя равенство (2.4))

$$\iint\limits_{(\Delta S_r)} [\psi_n(x)]^2 \, d(\Delta S_r) \leqslant 2\mu_n (r + \rho). \tag{3.4}$$

Так как число ρ произвольно, то в (3.4) можно положить его равным нулю, и мы получим

$$\iint\limits_{(\Delta S_r)} [\psi_n(x)]^2 \, d(\Delta S_r) \leqslant 2\mu_n r. \tag{3.5}$$

Обозначим через S_r, D_r, $D_{r,\rho}$ сумму всех частей ΔS_r, ΔD_r, $\Delta D_{r\rho}$, которых по условию конечное число. Из (3.5) вытекает

$$\iint\limits_{(S_r)} \psi_n^2(x) \, dS_r \leqslant 2A\mu_n r,$$

где A — постоянное число. Интегрируя последнее неравенство по r (в пределах от $r = 0$ до $r = r$), получим

$$\iiint\limits_{(D_r)} \psi_n^2(x) \, dx \leqslant A\mu_n r^2. \tag{3.6}$$

Неравенство (3.6) следует рассматривать как нулевое граничное условие в обобщенном смысле для собственных функций $\psi_n(x)$.

§ 4. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Мы исходили из равенства

$$\iint\limits_{(Q)}\int \psi_m^{(c_k)}(x)\,\psi_n^{(c_k)}(x)\,dx = \delta_{mn}, \tag{4.1}$$

которое выполняется в силу определения функций $\psi_n^{(c)}(x)$. Далее мы имеем

$$\delta_{mn} = \iint\limits_{(Q)}\int \psi_m^{(c_k)}(x)\,\psi_n^{(c_k)}(x)\,dx + \iint\limits_{(D-D_r)}\int \cdots +$$
$$+\iint\limits_{(D_{r\rho})}\int \cdots + \iint\limits_{(Q-D+D_r-D_{r\rho})}\int \cdots = I_1 + I_2 + I_3. \tag{4.2}$$

При фиксированных r и ρ

$$\lim_{k\to\infty} I_1 = \iint\limits_{(D-D_r)}\int \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx,$$
$$\lim_{k\to\infty} I_3 = 0.$$

Поэтому из (4.2) следует

$$\left|\delta_{mn} - \iint\limits_{(D-D_r)}\int \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx\right| = \lim_{k\to\infty}|I_2|. \tag{4.3}$$

Из неравенства (3.3) при фиксированных r и ρ нетрудно получить оценку (см. вывод неравенств (3.4—3.6))

$$\lim_{k\to\infty}|I_2| \leqslant A(\mu_m\mu_n)^{1/2}(r+\rho)^2.$$

Отсюда и из (4.3) следует

$$\left|\delta_{mn} - \iint\limits_{(D-D_r)}\int \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx\right| \leqslant A(\mu_m\mu_n)^{1/2}(r+\rho)^2. \tag{4.4}$$

Устремляя теперь ρ и r к нулю, получим из (4.4)

$$\iint\limits_{(D)}\int \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = \delta_{mn},$$

т. е. ортонормальность функций $\psi_n(x)$.

Нетрудно показать, что функции $\psi_n(x)$ образуют полную систему для области D (см., например, [1, стр. 129 и следующие]).

§ 5. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ФУНКЦИИ ГРИНА ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть λ_n ($n = 1, 2, \ldots$) — собственные значения в области D, определенные в § 2, и $\psi_n(x)$ — соответствующие им собственные функции. Обозначим через p кратность фиксированного собственного числа λ_{n_0}. Соответствующие λ_{n_0} ортонормальные собственные функции (определенные также в § 2) обозначим через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_p(x)$.

Пусть c_k' — другая подпоследовательность, которой соответствуют собственные функции $\psi_n^*(x)$ ($n = 1, 2 \ldots$). Собственные значения для подпоследовательности c_k' должны быть те же самые, что и для c_k, т. е. числа λ_n, ибо, как показано в § 2, числа $\lambda_n^{(c)}$ при $c\to\infty$ имеют пределы

Пусть $\varphi_1^*(x),\ \varphi_2^*(x),\ \ldots,\ \varphi_p^*(x)$ — ортонормальные собственные функции, соответствующие подпоследовательности c_k' и собственному значению λ_{n_0}.

Ниже будет показано, что $p'=p$ и $\varphi_k^*(x)$ получаются из $\varphi_k(x)$ ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ p$) ортогональным преобразованием.

Вначале мы докажем, что если $\psi_m(x)$ и $\psi_n^*(x)$ соответствуют различным собственным значениям λ_m и λ_n^* ($\lambda_m \neq \lambda_n^*$), то они ортогональны.

Пусть S_r и D_r обозначают то же, что и в § 3. Из формулы Грина следует

$$(\lambda_m - \lambda_n^*) \iiint\limits_{(D-D_r)} \psi_m(x)\,\psi_n^*(x)\,dx =$$
$$= \iint\limits_{(S_r)} \left(\psi_m(x)\frac{\partial\psi_n^*}{\partial\nu} - \psi_n^*(x)\frac{\partial\psi_m}{\partial\nu}\right) dS_r.$$

Интегрируя это тождество по r в пределах от 0 до r, получим

$$\frac{1}{r}\int_0^r \left\{\iiint\limits_{(D-D_r)} \psi_m(x)\,\psi_n^*(x)\,dx\right\} dr =$$
$$= \frac{1}{r(\lambda_m-\lambda_n^*)} \iiint\limits_{(D_r)} \left(\psi_m(x)\frac{\partial\psi_n^*}{\partial\nu} - \psi_n^*(x)\frac{\partial\psi_m}{\partial\nu}\right) dD_r. \tag{5.1}$$

Из (3.6) и неравенства Коши — Буняковского

$$\left|\iiint\limits_{(D_r)} \psi_m(x)\frac{\partial\psi_n^*}{\partial\nu}\,dx\right| \leqslant (A\mu_m)^{1/2}\, r \left(\iiint\limits_{(D_r)} \left(\frac{\partial\psi_n^*}{\partial\nu}\right)^2 dx\right)^{1/2}. \tag{5.2}$$

Из неравенства (3.2) следует, что функции $\dfrac{\partial\psi_n^*}{\partial x_i}$ ($i=1,\ 2,\ 3$) принадлежат классу $L_2(D)$. Поэтому при $r\to 0$

$$\iiint\limits_{(D_r)} \left(\frac{\partial\psi_n^*}{\partial\nu}\right)^2 dx = 0\,(1). \tag{5.3}$$

Из (5.1), (5.2) и (5.3) следует

$$\frac{1}{r}\int_0^r \left\{\iiint\limits_{(D-D_r)} \psi_m(x)\,\psi_n^*(x)\,dx\right\} dr = 0\,(1).$$

Отсюда в пределе при $r\to 0$ получим

$$\iiint\limits_{D} \psi_m(x)\,\psi_n^*(x)\,dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

Так как функции $\psi_n(x)$ в области D образуют полную систему, то из доказанной ортогональности следует, что

$$\varphi_k^*(x) = \sum_{i=1}^{p} c_{ki}\varphi_i(x) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p').$$

Но $\psi_n^*(x)$ также образуют полную ортогональную систему в D. Поэтому

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=1}^{p'} c_{kj}^* \varphi_j^*(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Из этих представлений следует, что $p' = p$, а из ортонормальности функций $\varphi_k(x)$ и $\varphi_k^*(x)$ следует, что матрица (c_{kj}) ортогональна и $c_{kj}^* = c_{kj}$. Отсюда и из известного разложения в ряд по собственным функциям функции Грина следует единственность последней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Ч. Титчмарш. Разложение по собственным функциям, т. II. Изд-во иностр. лит., М., 1961.
2. E. C. Titchmarsh. Eigenfunction expansion for a finite two — dimensional region, Quart. J. Math. (Oxford), 20, 238—253, 1949.
3. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, т. II. Гостехиздат, М., 1945.
4. М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан. Об асимптотическом поведении спектральной функции оператора Шредингера вблизи плоского куска границы. «Изв. АН СССР, серия матем.», т. 28, № 3, 527—552, 1964.

Поступила 25 ноября 1966 г.