О БАЗИСАХ И ИЗОМОРФИЗМЕ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. П. Захарюта

1°. Пусть D — ограниченная область в пространстве C^n комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Будем рассматривать следующие пространства аналитических функций:

1) $AC(D)$ — пространство всех функций, аналитических внутри области D и непрерывных в ее замыкании $\overline{D}$, с нормой

$$|x|_D = \max_{z\in\overline{D}} |x(z)|;$$

2) $A(D)$—пространство всех функций, аналитических внутри области D, с топологией проективного предела

$$A(D) = \lim pr AC(D_m),\ \overline{D}_m \subset D_{m+1},\quad \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{D}_m = D;$$

3) $A(F)$ — пространство всех функций, аналитических на $F=\overline{D}$ с топологией индуктивного предела

$$A(F) = \operatorname{limind} AC(D_m),\quad \overline{D}_{m+1} \subset D_m,\quad \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m = \overline{D}.$$

До сих пор не решены для произвольных ограниченных областей D следующие вопросы [1], [2]:

существует ли в пространстве $A(D)\,(A(\overline{D}))$ базис?

изоморфно ли пространство $A(D)\,(A(\overline{D}))$ пространству $A(E_n)\,(A(\overline{E}_n))$, где E_n — единичный полицилиндр пространства C^n?

Эти вопросы решались в [1 — 6] для сравнительно узких классов областей, описываемых заданием групп биголоморфных автоморфизмов: кратно-круговых, (p, q)-круговых, $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$-круговых. В данной работе на эти вопросы дается положительный ответ для произвольных ограниченных выпуклых областей $D \subset C^n$.

§ 1. Вспомогательные рассмотрения и сведения

2°. Пусть D_0 и D_1 — две односвязные области пространства C^n, $\overline{D}_0 \subset D_1$. Рассмотрим функцию $u(z)$, гармоническую в области $\Omega = D_1 \diagdown \overline{D}_0$ и удовлетворяющую граничным условиям:

$$u(z)|_{\partial D_1} = 1,\quad u(z)|_{\partial G_0} = 0,\quad G_0 = C^n \diagdown \overline{D}_0.$$

Внутри поверхностей уровня $\Gamma_\alpha = \{z : u(z) = \alpha\}$ $0 < \alpha < 1$ заключены односвязные области D_α такие, что

$$\partial D_\alpha = \Gamma_\alpha; \quad \bar{D}_\alpha \subset D_\beta, \ \alpha < \beta; \quad \bigcup_{\alpha<1} \bar{D}_\alpha = D_1, \quad \bigcap_{\alpha>0} D_\alpha = \bar{D}_0.$$

Следующая лемма есть тривиальное обобщение теоремы Адамара о трех окружностях [7, стр. 469].

Лемма 1. *Для всякой функции, аналитической в D_1 и непрерывной в $\bar{D}_1$, выполняется неравенство*

$$|x|_{D_\alpha} \leqslant |x|_{D_1}^{\alpha} |x|_{D_0}^{1-\alpha}.$$

Для доказательства достаточно применить обобщенный принцип максимума к субгармонической функции $\ln|x(z)|$ и гармонической функции $v(z) = \ln M_1 u(z) + \ln M_0 (1 - u(z))$, $M_i = |x|_{D_i}$.

3°. Пусть D_0 и D_1 — области, удовлетворяющие условиям пункта 2°, и D_m^i, $i = 0, 1$ — две последовательности областей, аппроксимирующие области D_0 и D_1 изнутри:

$$\bar{D}_m^i \subset D_{m+1}^i, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m^i = D_i, \quad i = 0,1; \quad \bar{D}_m^0 \subset D_m^1. \tag{1}$$

По двум областям D_m^0 и D_m^1 строим, как в 2°, функцию $u_m(z)$, гармоническую в $\Omega_m = D_m^1 \setminus \bar{D}_m^0$ и такую, что

$$u_m(z)\big|_{\partial D_m^1} = 1, \quad u_m(z)\big|_{\partial G_m^0} = 0, \quad G_m^0 = C^n \setminus \bar{D}_m^0,$$

а также области D_m^α, ограниченные поверхностями уровня

$$\Gamma_m^\alpha = \{z : u_m(z) = \alpha\} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Лемма 2. *Пусть $\partial D_0 = \partial G_0$, $\partial D_m^0 = \partial G_m^0$, $m = 1, 2, \ldots$ Тогда последовательность областей D_m^α аппроксимирует изнутри область D_α, причем*

$$\bar{D}_m^\alpha \subset D_{m+1}^\alpha, \quad \bigcup_m \bar{D}_m^\alpha = D_\alpha \quad 0 < \alpha < 1.$$

Утверждение леммы вытекает из равномерной внутри D_1 сходимости убывающей последовательности гармонических функций $u_m(z)$ к функции $u(z)$.

4°. Пусть $X = \lim pr X_p$ — ядерное пространство, X_p — банаховы пространства, $X_{p+1} \subset X_p$, $|x|_p \leqslant |x|_{p+1}$, X плотно в X_p, $p = 1, 2, \ldots$. Тогда сильное сопряженное пространство X^* изоморфно индуктивному пределу банаховых пространств [8]. Пусть

$$X^* = \lim \operatorname{ind} Y_q$$

какое-либо (с точностью до изоморфизма) представление пространства X^* в виде индуктивного предела и $|y|_q'$ — норма в пространстве Y_q.

Лемма 3. ([2], стр. 95). *Для того, чтобы система $\{e_k\} \subset X$, имеющая биортогональную систему $\{e_k'\} \subset X^*$, была базисом в X необходимо и достаточно, чтобы*

1) *e_k была полна в X;*

2) *по любому p нашлось $q = q(p)$ такое, что*

$$|e_k|_p \cdot |e_k'|_q' \leqslant C(p) < \infty,$$

5°. В этом пункте изложены результаты Л. А. Айзенберга [9] в удобной для нас форме.

Пусть D — выпуклая ограниченная область $D \subset C^n$. Тогда общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве $A(D)$ задается некоторой интегральной формулой, которую, ввиду громоздкости явного выражения [9], будем записывать так:

$$F(x) = \langle \varphi, x \rangle_D, \quad x(\zeta) \in A(D), \quad \varphi(\zeta) \in A(\tilde{D}), \tag{2}$$

где $\tilde{D} = \{z : \zeta_1 z_1 + \cdots + \zeta_n z_n \neq 1; \quad \zeta \in D\}$ *. Множество $\tilde{D}$ является замыканием ограниченной звездной области $\tilde{\tilde{D}} = \{z : \zeta_1 z_1 + \cdots + \zeta_n z_n \neq 1, \zeta \in \overline{D}\}$ при этом из $D_1 \subset D_2$ следует $\tilde{D}_2 \subset \tilde{D}_1$, $\tilde{\tilde{D}}_2 \subset \tilde{\tilde{D}}_1$.

Общий вид функционала в $A(\overline{D})$ задается той же формулой, только, нужно предполагать $x(\zeta) \in A(\overline{D})$, $\varphi(\zeta) \in A(\tilde{\tilde{D}})$. Соответствие $F \to \varphi$ является изоморфизмом пространства $A(D)^*$ на $A(\tilde{D})$ $(A(\overline{D})^*$ на $A(\tilde{\tilde{D}}))$.

Следующее важное свойство формулы (2) будет существенно использовано в дальнейшем; если $D_0 \subset D_1$, то

$$\langle \varphi, x \rangle_{D_0} = \langle \varphi, x \rangle_{D_1}, \quad x(z) \in A(D_1), \quad \varphi(z) \in A(\tilde{D}_0).$$

Подчеркивая этот факт, будем писать $\langle \varphi, x \rangle$ вместо $\langle \varphi, x \rangle_D$.

Из конкретного вида выражения $\langle \varphi, x \rangle$ [9] вытекает неравенство

$$|\langle \varphi, x \rangle| \leqslant N(D) |\varphi|_{\tilde{D}} |x|_D, \; x(z) \in A(\overline{D}), \; \varphi(z) \in A(\tilde{D}). \tag{3}$$

§ 2. Существование базиса

6°. **Теорема 1.** *Пусть D — ограниченная выпуклая область, $D \subset C^n$. В пространстве $A(D)$ существует базис.*

Доказательство. Возьмем какую-либо выпуклую область $D_0 : \overline{D}_0 \subset D_1$, $D_1 = D$. Обозначим $H_i = L^2(D_i)$ — пространство функций, аналитических в D_i и суммируемых с квадратом по объему D_i [10], $(x, y)_i$ и $\|x\|_i$ — соответственно скалярное произведение и норму в нем, $i = 0, 1$. Ввиду полной непрерывности оператора вложения пространства H_1 в H_0 для скалярного произведения $(x, y)_0$ справедливо представление в форме

$$(x, y)_0 = (Bx, By)_1, \; x, \; y \in H_1, \tag{4}$$

где B — вполне непрерывный положительный оператор в H_1. Оператор B имеет полную ортогональную систему собственных векторов $\{e_k(z)\}$, которую мы нормируем так, чтобы $\|e_k\|_0 = 1$. Обозначим

$$\mu_k = \|e_k\|_1 = \lambda_k^{-1},$$

где λ_k — собственное число, отвечающее собственному вектору e_k, при этом можно считать $\mu_k \uparrow \infty$. Итак, построена система $\{e_k(z)\}$, являющаяся общим ортогональным базисом в H_0 и H_1 (ортогональность в H_0 следует из (4) и из $Be_k = \lambda_k e_k$) **.

7°. Покажем, что система $\{e_k(z)\}$ является базисом в пространстве $A(D)$.

---

* $(0, 0, \ldots, 0) \in D$. Общий случай приводится к этому линейной заменой.

** Полнота системы $\{e_k\}$ в H_0 вытекает из плотности множества H_1 в пространстве H_0. Последняя следует из выпуклости области D_0, поскольку уже полиномы плотны в H_0.

Соотношения включения

$$A(\bar{D}_i) \subset H_i \subset A(D_i) \quad i = 0,\ 1 \tag{5}$$

выполняются с непрерывными вложениями. Поэтому всякий линейный непрерывный в H_i функционал F является распространением по непрерывности некоторого функционала F', непрерывного в $A(\bar{D}_i)$, и, учитывая 5°, определяется некоторой функцией $\varphi(z) \in A(\bar{\bar{D}}_i)$ по формуле

$$F(x) = \langle \varphi, x \rangle, \quad x \in A(\bar{D}_i) \subset H_i. \tag{6}$$

Пространство H_i^*, сопряженное к H_i, реализуется при этом как гильбертово пространство H_i' функций, аналитических в области $\Delta_i = \bar{\bar{D}}_i$, с нормой

$$\|\varphi\|_i' = \|F\|_{H_i^*}. \tag{7}$$

Здесь F и φ связаны соотношением (6). Справедливы следующие включения с непрерывными вложениями:

$$A(\bar{\Delta}_0) \subset H_0' \subset A(\Delta_0) \subset A(\bar{\Delta}_1) \subset H_1' \subset A(\Delta_1).$$

По системе $\{e_k(z)\} \subset H_0$, построенной в 6°, образуем систему функций $\{e_k'(\zeta)\} \subset H_0'$, задающую следующую систему функционалов в H_0:

$$F_k(x) = \langle e_k', x \rangle = (e_k, x)_0, \quad x \in H_0. \tag{8}$$

Поскольку $\{e_k\}$ — ортонормированный базис в H_0, то ввиду (8)

$$\langle e_k', e_j \rangle = \delta_{k,j}, \tag{9}$$

т. е. система функций $\{e_k'(\zeta)\}$ реализует в любом пространстве $A(\bar{G}) : \bar{D}_0 \subset \subset G \subset D_1$ систему функционалов $\{e_k^*\} \subset A(G)^*$, биортогональную к системе $\{e_k(z)\}$, если ее рассматривать как систему элементов пространства $A(G)$.

Введем в рассмотрение область D_α, строящуюся по D_0 и D_1, как в 2°, и область Δ_α, которая получается как область $D_{1-\alpha}$, если в условиях пункта 2° положить $D_0 = \Delta_1$ и $D_1 = \Delta_0$, $0 < \alpha < 1$ (за редкими исключениями область Δ_α не совпадает с областью $\Delta_\alpha' = \bar{\bar{D}}_\alpha$). Так как

$$A(D_1) = \lim_{\alpha \uparrow 1} pr\, AC(D_\alpha),$$

$$A(\tilde{D}_1) = A(\bar{\Delta}_1) = \lim_{\alpha \uparrow 1} \mathrm{ind}\, AC(\Delta_\alpha),$$

то ввиду леммы 3 теорема будет доказана, если установим, что по любому $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ найдется $\beta = \beta(\alpha) < 1$ такое, что

$$|e_k(z)|_{D_\alpha} \cdot |e_k'(\zeta)|_{\Delta_\beta} \leqslant M(\alpha) < \infty. \tag{10}$$

Используем следующие оценки, которые будут доказаны в дальнейшем $(0 < \alpha < 1)$

$$|e_k(z)|_{D_\alpha} \leqslant C(\alpha, \varepsilon)\, \mu_k^{\alpha+\varepsilon}, \tag{11}$$

$$|e_k'(\zeta)|_{\Delta_\alpha} \leqslant C'(\alpha, \varepsilon)\, \mu_k^{-\alpha+\varepsilon}, \tag{12}$$

последовательность μ_k была определена в 6°. Тогда получим, что (10) выполняется, если взять $\beta = \alpha + 2\varepsilon < 1$ и $M(\alpha) = C(\alpha, \varepsilon) \cdot C'(\beta, \varepsilon)$.

8°. Осталось установить справедливость оценок (11), (12).

Возьмем две последовательности выпуклых областей D_m^i, $m=1, 2, \ldots$; $i=0, 1$, удовлетворяющие условиям (1). Из (1) и (5) при любом m получаем существование константы L_m такой, что

$$|x|_{D_m^i} \leqslant L_m \|x\|_{H_i}, \quad x \in H_i.$$

В частности,

$$|e_k(z)|_{D_m^i} \leqslant L_m \|e_k\|_{H_i} = L_m \mu_k^i.$$

Применяя далее лемму 1, имеем $(0 < \beta < 1)$

$$|e_k|_{D_m^\beta} \leqslant |e_k|_{D_m^0}^{1-\beta} \cdot |e_k|_{D_m^1}^{\beta} \leqslant L_m \mu_k^\beta,$$

здесь область D_m^β определяется как в 3°.

По лемме 2 возрастающая последовательность областей $D_m^{\alpha+\varepsilon}$ аппроксимирует изнутри область $D_{\alpha+\varepsilon}$ и, значит, найдется $m_0 = m_0(\alpha, \varepsilon)$ такое, что

$$\bar{D}_\alpha \subset D_{m_0}^{\alpha+\varepsilon} \subset D_{\alpha+\varepsilon}.$$

Поэтому

$$|e_k|_{D_\alpha} \leqslant |e_k|_{D_{m_0}^{\alpha+\varepsilon}} \leqslant L_{m_0} \mu_k^{\alpha+\varepsilon},$$

откуда, положив $C(\alpha, \varepsilon) = L_{m_0}$, получаем (11).

Отметим, что ввиду (7) и (8) $\|e_k'\|_i' = \mu_k^{-i}$, $i=0, 1$. Поэтому, взяв две последовательности областей Δ_m^i, аппроксимирующие области Δ_i изнутри, имеем

$$|e_k'|_{\Delta_m^i} \leqslant L_m' \mu_k^{-i} \quad i = 0, 1.$$

Аналогичное предыдущему применение лемм 1 и 2 дает (12) с

$$C'(\alpha, \varepsilon) = L_{m_0'}, \; m_0' = m_0'(\alpha, \varepsilon).$$

9°. Сделаем некоторые замечания к предыдущей теореме.

1. Пусть H_0 и H_1 — любые два гильбертовых пространства, для которых с непрерывными вложениями выполняется (5), и $\{h_k(z)\}$ — общий ортогональный базис в них. Тогда, повторяя дословно доказательство теоремы 1, получим, что $\{h_k(z)\}$ — базис в $A(D)$.

2. Система $\{e_k(z)\}$, построенная в теореме 1, является базисом также в пространстве $A(\bar{D}_0)$.

Действительно, применим лемму 3 к системе $\{e_k'(\zeta)\} \subset A(\Delta_0)$. Ввиду рефлексивности пространства $A(\bar{D}_0)$ $A(\Delta_0)^*$ изоморфно $A(\bar{D}_0)$, поэтому систему $\{e_k(z)\} \subset A(\bar{D}_0)$ можно рассматривать как биортогональную к системе $\{e_k'(\zeta)\}$. Кроме того,

$$A(\bar{D}_0) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \operatorname{ind} AC(D_\alpha),$$

$$A(\Delta_0) = \lim_{\alpha \downarrow 0} pr\, AC(\Delta_\alpha),$$

а из оценок (11), (12) вытекает, что по любому $\alpha > 0$ найдется $\beta = \beta(\alpha) = \alpha - 2\varepsilon > 0$, такое, что

$$|e_k'(\zeta)|_{\Delta_\alpha} \cdot |e_k(z)|_{D_\beta} \leqslant M(\alpha) = C(\beta, \varepsilon) \cdot C'(\alpha, \varepsilon).$$

Итак, выполняются условия леммы 3, следовательно, $\{e'_k(\zeta)\}$ — базис в $A(\Delta_0)$. Но тогда система $\{e_k(z)\}$ — базис в $A(\bar{D}_0)$, как система, биортогональная базису $\{e'_k(\zeta)\}$ в $A(\Delta_0)$.

3. Поскольку замечание 2 относится и к системам $\{h_k(z)\}$, рассмотренным в замечании 1, получаем следующую теорему, уточняющую теорему 1.

Теорема 2. *Пусть D_0 и D_1 — две выпуклые области пространства C^n, $\bar{D}_0 \subset D_1$; H_0 и H_1 — два гильбертовых пространства, для которых выполняется* (5) *с непрерывными вложениями, и $\{h_k(z)\}$ — ортогональный базис одновременно в H_0 и H_1. Тогда $\{h_k(z)\}$ — общий базис в $A(D_1)$ и $A(\bar{D}_0)$.*

§ 3. Изоморфизм пространств функций, аналитических в выпуклых областях

10°. **Теорема 3.** *Пусть D — выпуклая область пространства C^n. Тогда пространство $A(D)$ изоморфно пространству $A(E_n)$, где E_n — единичный полицилиндр.*

Доказательство. В [2] (стр. 127) показано, что для доказательства изоморфизма пространства $A(D)$ пространству $A(E_n)$ достаточно установить, что $A(D)$ изоморфно какому-либо центру шкалы Рисса. Убедимся, что пространство $A(D)$ изоморфно следующему конечному центру шкалы Рисса $\Lambda = \bigcap\limits_{\alpha<1} l_1(\exp \alpha a_k)$, $a_k = \ln \mu_k$ и изоморфизм можно установить следующим образом:

$$x(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k(z) \to \hat{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots),$$

где $x(z) \in A(D)$, $\hat{x} \in \bigcap\limits_{\alpha<1} l_1(\exp \alpha a_k)$. Для этого достаточно показать, что по любому $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ найдутся $\beta_i = \beta_i(\alpha) < 1$, $M_i(\alpha) < \infty$ такие, что

$$|x|_{D_\alpha} \leqslant M_1(\alpha)\,|\hat{x}|_{\beta_1}, \tag{13}$$

$$|\hat{x}|_\alpha \leqslant M_2(\alpha)\,|x|_{D_{\beta_2}}, \tag{14}$$

где $|\hat{x}|_\alpha = \sum |\xi_k| \exp \alpha a_k$.

Первое неравенство сразу вытекает из оценки (11)

$$|x|_{D_\alpha} \leqslant \sum |\xi_k|\,|e_k(z)|_{D_\alpha} \leqslant M_1(\alpha)\,|\hat{x}|_{\beta_1},$$

где $\beta_1 = \alpha + \varepsilon < 1$, $M_1(\alpha) = C(\alpha, \varepsilon)$.

Второе неравенство получается несколько сложнее.

Область D_1 можно аппроксимировать изнутри системой выпуклых областей G_γ, $0 < \gamma < 1$, так, что

$$\bar{G}_\gamma \subset G_{\gamma'}, \quad \gamma < \gamma', \quad \bigcup G_\gamma = D_1.$$

Соответствующие области $\Phi_\gamma = \tilde{\bar{G}}_\gamma$ аппроксимируют множество $\bar{\Delta}_1$ снаружи.

$$\Phi_\gamma \supset \bar{\Phi}_{\gamma'}, \quad \gamma < \gamma'; \quad \bigcap \Phi_\gamma = \bar{\Delta}_1.$$

По α найдем $\gamma = \gamma(\alpha) < 1$ такое, что $\Phi_\gamma \subset \Delta_{\alpha+\varepsilon}$, а по γ выберем $\sigma = \sigma(\alpha) < 1$ такое, что $\bar{G}_\gamma \subset D_\sigma$.

Из (3) вытекает неравенство

$$1 = |\langle e'_k, e_k\rangle| \leqslant N(G_\gamma)\,|e'_k|_{\Phi_\gamma}\,|e_k|_{G_\gamma}.$$

Отсюда, учитывая неравенство (12) и выбор γ и σ, получим

$$|e_k|_{D_\sigma} \geqslant |e_k|_{G_\gamma} \geqslant [N(G_\gamma)\cdot|e_k'|_{\Phi_\gamma}]^{-1} \geqslant [N(G_\gamma)|e_k'|_{\Delta_{\alpha+\varepsilon}}]^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant [N(G_\gamma)C(\alpha+\varepsilon,\varepsilon)]^{-1}\cdot\mu_k^\alpha.$$

Таким образом,

$$\mu_k^\alpha \leqslant M'(\alpha)\cdot|e_k|_{D_\sigma},\quad \sigma=\sigma(\alpha) \tag{15}$$

где $M'(\alpha)=N(G_\gamma)C(\alpha+\varepsilon,\varepsilon)$.

Ввиду ядерности пространства $A(D_1)$ базис $\{e_k(z)\}$ является абсолютным [2]. Поэтому по любому $\sigma<1$ найдется $\tau=\tau(\sigma)<1$ такое, что

$$\sum|\xi_k||e_k|_{D_\sigma} \leqslant M''(\sigma)|x|_{D_\tau}. \tag{16}$$

Учитывая (15), (16), получим

$$\sum|\xi_k|\mu_k^\alpha \leqslant M'(\alpha)\sum|\xi_k||e_k|_{D_\sigma} \leqslant M'(\alpha)M''(\sigma)|x|_{D_\tau},$$

т. е. (14) с $M_2(\alpha)=M'(\alpha)M''(\sigma(\alpha))$ и $\beta_2=\tau(\sigma(\alpha))$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть звездная область Δ не является выпуклой, но получается из выпуклой области D_0 при помощи преобразования пункта 5°, т. е. $\Delta=\tilde{\tilde{D}}_0$. Тогда, используя те же оценки (11) и (12), получим, что формула

$$x'(z)=\sum\xi_k'e_k'(z)\to\hat{x}'=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k',\ldots)$$

устанавливает изоморфизм пространства $A(\Delta)$ на центр шкалы Рисса $\bigcap\limits_{\sigma<0} l_1(\exp\sigma a_k)$. Поэтому пространство $A(\Delta)$ изоморфно $A(E_n)$.

Для пространств функций, аналитических в замкнутых областях, имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть область $D\subset C^n$ a) выпуклая или b) звездная область вида $D=\tilde{\tilde{G}}$, где G — выпуклая область пространства C^n. Тогда пространство $A(\bar{D})$ изоморфно пространству $A(\bar{E}_n)$.*

Рассмотрим сначала случай *a*). Из замечания к теореме 3 следует, что $A(\Delta)$ изоморфно $A(E_n)$. Тогда $A(\Delta)^*$ изоморфно $A(E_n)^*$. На основании пункта 5° и рефлексивности пространства $A(\bar{D})$ пространство $A(\bar{D})$ изоморфно пространству $A(\Delta)^*$, $\Delta=\tilde{\tilde{D}}$. Учитывая, что $A(E_n)^*$ изоморфно $A(\bar{E}_n)$, получаем окончательно, что $A(\bar{D})$ изоморфно $A(\bar{E}_n)$.

В случае *b*) доказательство проводится так же, только вместо замечания используется сама теорема 3.

Отметим, что теоремы 1 и 3 дают частичный ответ на вопрос Л. И. Ронкина о существовании базиса и изоморфизме пространств $A(D)$ для случая полукруговых областей D. А именно, этот ответ является утвердительным для выпуклых полукруговых областей.

В заключение хочу поблагодарить Л. А. Айзенберга, познакомившего меня с рукописью своей работы задолго до опубликования, и Л. И. Ронкина за полезные обсуждения изложенных здесь вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Айзенберг. Пространства функций, аналитических в (p,q)-круговых областях. ДАН СССР, т. 136, № 3 (1960), 521—524.

2. Б. С. Митягин. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах. «Усп. матем. наук», в. 4 (100), (1961), 62—132

3. Л. А. Айзенберг, Б. С. Митягин. Пространства функций, аналитических в крагно-круговых областях. «Сиб. матем. ж.». I, № 2 (1960), 159—170.

4. С. Д. Окунь. Характеристическая функция двоякокруговой области и ее применения к вопросам полноты и базиса. Автореф. канд. дисс., Р-на-Д, 1961.

5. С. Ролевич. Об изоморфизме и аппроксимативной размерности пространств голоморфных функций. ДАН СССР, т. 133, № 1 (1960), 31—33.

6. S, Rolewicz. On isomorphic representation of the spaces of holomorphic functions by matrix spaces. Reports of Conf. Funct. Anal., Warsaw, 1960.

7. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

8. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959.

9. Л. А. Айзенберг. Общий вид линейного функционала в пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях C^n. ДАН СССР, т. 166, № 5 (1966), 1015—1018.

10. Б. А. Фукс. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1963.

Поступила 18 мая 1966 г.