СТАЦИОНАРНЫЕ ПЕРВООБРАЗНЫЕ КУСОЧНОПОСТОЯННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

И. М. Сливняк, М. Ш. Флексер

1. В настоящей заметке получены условия существования стационарных первообразных[1] для некоторого класса случайных процессов с кусочнопостоянными реализациями. Каждый процесс $Y(t)$ из этого класса представляет собой последовательность случайных уровней $\{\eta_k\}_0^\infty$; переходы с одного уровня на другой происходят в случайные моменты времени $t_k (0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots)$.
Таким образом,

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \chi_k(t), \tag{1}$$

где $\chi_k(t)$ — характеристическая функция интервала $[t_{k-1}, \ t_k)$ при $k > 0$ и интервала $[0, \ t_0)$ при $k = 0$.

Пусть p — вероятностная мера в пространстве последовательностей $\{t_k\}_0^\infty$;

$\{t_k^{(p)}\}_0^\infty$ — соответствующая последовательность моментов перехода;

$X_p(t)$ — число моментов $t_k^{(p)}$ на интервале $[0, \ t]$.

Будем считать процесс $X_p(t)$ стационарным потоком вызывающих моментов. Это означает следующее ([1]):

1) для любого n, любых моментов времени $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n$ и любого $\alpha > 0$ закон распределения вектора $X_p(\tau_i + \alpha) - X_p(\alpha) \ (i = 1, \ \ldots, \ n)$ не зависит от α; 2) с вероятностью 1 все скачки реализаций процесса $X_p(t)$ единичные.

Предположим, далее, что последовательности $\{\eta_k\}_0^\infty$ и $\{t_k^{(p)}\}_0^\infty$ взаимно независимы, причем последовательность $\{\eta_k\}_0^\infty$ стационарна в широком смысле. Последнее означает, что для любых j, k ковариация случайных величин η_j и η_k является функцией разности их номеров

$$M(\eta_j \eta_k) = a_{j-k}. \tag{2}$$

[1] Понятия непрерывности и первообразной понимаются в смысле сходимости в среднем квадратичном.

Обозначим через I_1 класс процессов (1), удовлетворяющих перечисленным выше требованиям. Нужно найти условия, при которых процесс $Y(t) \in I_1$ имеет стационарные в широком смысле первообразные.

2. В настоящей заметке используется следующая конструкция, описанная в [1]. Пусть

$$\xi_0 = t_0, \ \xi_k = t_k - t_{k-1}, \ k > 0 \tag{3}$$

— промежутки между моментами перехода с одного уровня на другой.

Как показано в указанной статье, с каждым стационарным потоком $X_p(t)$ может быть взаимно однозначным образом связана некоторая σ — конечная мера $\varkappa$, заданная на борелевских множествах пространства реализаций последовательности $\{\xi_k\}_0^\infty$. Эта мера инвариантна относительно преобразования сдвига U, определяемого равенством

$$U\xi_k = \xi_{k+1}.$$

В том случае, когда среднее число моментов перехода за единицу времени конечно, от меры $\varkappa$ можно перейти к вероятностной мере q, заданной на тех же множествах. Случайная последовательность $\{\xi_k^{(q)}\}_0^\infty$, определяемая мерой q, стационарна в узком смысле. Она взаимно однозначно связана с потоком $X_p(t)$ и называется последовательностью, *порождающей* этот поток.

Заметим, что стационарный поток $X_p(t)$ может быть весьма просто восстановлен по порождающей его последовательности $\{\xi_k^{(q)}\}_0^\infty$. Для этого нужно с помощью (3) построить поток $X_q(t)$ (он, вообще говоря, не будет стационарным), заменить момент включения $t = 0$ для этого потока случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(-T, 0)$, и совершить предельный переход при $T \to \infty$.

Отметим также, что в важнейшем случае пуассоновского потока порождающая последовательность $\{\xi_k^{(q)}\}_0^\infty$ совпадает с исходной последовательностью $\{\xi_k^{(p)}\}_0^\infty$, определенной равенствами (3).

Результаты настоящей заметки будут сформулированы в терминах последовательности, порождающей поток моментов перехода $X_p(t)$.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1. *Для любого стационарного потока* $X_p(t)$

$$\int_0^\infty v_0(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_R \xi_0^2\,d\varkappa, \quad \int_0^\infty v_k(\tau)\,d\tau = \int_R \xi_0\xi_k\,d\varkappa, \ \ k > 0, \tag{4}$$

$$\int_0^\infty \tau^2 v_k(\tau)\,d\tau \leqslant (12k^2 + 2)\int_0^\infty \tau^2 v_0(\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

где R — пространство реализаций последовательности $\{\xi_k\}_0^\infty$,

$$v_k(\tau) = P\{X_p(\tau) = i\} —$$

вероятность того, что на интервале $[0, \tau]$ расположено k точек t_i.

Доказательство. По теореме 1 из [1]

$$v_k(\tau) = \int_R \Big[\int_0^{\xi_0} \chi_{\{X_p(\tau)=k\}}\,d\xi_0\Big]\,d\varkappa, \ \ k \geqslant 0,$$

что с помощью несложных вычислений приводит к формулам

$$\int_0^\infty \tau^n v_0(\tau)\,d\tau = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_R \xi_0^{n+2}\,d\varkappa,$$

$$\int_0^\infty \tau^n v_k(\tau)\,d\tau = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_R \left[\left(\sum_{i=0}^{k}\xi_i\right)^{n+2} - \left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right)^{n+2} - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=0}^{k-1}\xi_i\right)^{n+2} + \left(\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i\right)^{n+2}\right] d\varkappa, \quad k > 0.$$

Отсюда при $n=0$ получаем (4). При $n=2$, используя инвариантность меры $\varkappa$ относительно преобразования сдвига U, получаем (5).

3. ***Лемма 2.*** Всякий процесс $Y(t)\in I_1$ непрерывен и стационарен в широком смысле. Его корреляционная функция $k_y(\tau)$ имеет вид

$$k_y(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i v_i(|\tau|), \tag{6}$$

где $\{a_i\}_0^\infty$ — корреляционная последовательность процесса $\{\eta_k\}_0^\infty$, определенная равенствами (2).

Доказательство. Зададим числа $\beta > \alpha \geqslant 0$ и рассмотрим случайные события

$$A_k(\alpha) = \{X_p(\alpha) = k\},$$

$$A_{i,k}(\alpha,\beta) = \{X_p(\alpha) = i,\ X_p(\beta) = k\} = A_i(\alpha) \cap A_k(\beta).$$

Очевидно, события $A_{i,k}(\alpha,\beta)$ попарно несовместимы, причем

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} P(A_{i,k}(\alpha,\beta)) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k(\alpha)) = 1,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_{i,i+j}(\alpha,\beta) = \{X_p(\beta) - X_p(\alpha) = j\}.$$

Отметим также, что если появилось событие $A_k(\alpha)$, то имеют место неравенства

$$t_{k-1} \leqslant \alpha < t_k,\ k>0;\quad t_0 > \alpha,\ k=0$$

и, следовательно,

$$\chi_i(\alpha) = \begin{cases}1, & i = k,\\ 0, & i \neq k.\end{cases}$$

Подсчитаем корреляционную функцию $K(\alpha,\beta)$ процесса $Y(t)$. При $\beta=\alpha$

$$K(\alpha,\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} M_\eta\left[\int_{A_k(\alpha)}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\eta_i\chi_i(\alpha)\right)^2 dp\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k(\alpha))\, M_\eta(\eta_k^2) = a_0,$$

где M_η означает усреднение по вероятностной мере в пространстве реализаций последовательности $\{\eta_k\}_0^\infty$. При $\beta>\alpha$

$$K(\alpha,\beta) = \sum_{i,k=0}^{\infty} M_\eta\left[\int_{A_{i,k}(\alpha,\beta)}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\eta_m\chi_m(\alpha)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n\chi_n(\beta)\,dp\right)\right] =$$

$$= \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{k-i}\, P\left(A_{i,k}(\alpha,\beta)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P\{X_p(\beta) - X_p^{(\alpha)} = j\} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j v_j(\beta-\alpha).$$

Таким образом, $Y(t)$ — стационарный в широком смысле процесс, удовлетворяющий (6). Из равенств

$$\lim_{\tau \to 0} v_0(\tau) = v_0(0) = 1,$$

$$\lim_{\tau \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\tau) = 0$$

см. п. 1) получаем

$$\lim_{\tau \to 0} k_y(\tau) = k_y(0),$$

откуда следует непрерывность $Y(t)$.

4. Обозначим через I_2 класс процессов $Y(t) \in I_1$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k| < \infty, \quad \int_0^{\infty} \tau^2 v_0(\tau)\, d\tau < \infty. \tag{7}$$

Пусть $\{\eta_k\}_0^{\infty}$ и $X_p(t)$ — соответствующие процессу $Y(t) \in I_2$ последовательность уровней и поток моментов перехода. В силу инвариантности меры $\varkappa$ относительно U интеграл

$$b_k = \int_R \xi_j \xi_{k+j}\, d\varkappa, \quad -\infty < k < +\infty$$

не зависит от индекса j, причем согласно (4), (7)

$$b_0 = 2\int_0^{\infty} v_0(\tau)\, d\tau < \infty, \quad b_k = \int_0^{\infty} v_k(\tau)\, d\tau, \quad k > 0. \tag{8}$$

Последовательность $\{b_k\}_{-\infty}^{\infty}$ является положительно определенной, т. е. b_k можно записать в виде

$$b_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi k\lambda\, dG_{\xi}(\lambda),$$

где $G_{\xi}(\lambda)$ — неубывающая функция. Заметим далее, что в силу (7)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty \tag{9}$$

и, следовательно, процесс $\{\eta_k\}_0^{\infty}$ имеет спектральную плотность $g_{\eta}(\lambda)$:

$$a_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi k\lambda g_{\eta}(\lambda)\, d\lambda.$$

Теорема. *Для существования у процесса $Y(t) \in I_2$ непрерывной стационарной в широком смысле первообразной необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g_{\eta}(\lambda)\, dG_{\xi}(\lambda) = 0. \tag{10}$$

Доказательство. В силу леммы 2 процесс $Y(t) \in I_2$ является непрерывным и стационарным в широком смысле. Как известно, для существования у такого процесса непрерывной стационарной в широком смысле первообразной необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{\lambda^2} < \infty, \tag{11}$$

где $F(\lambda)$ — спектральная функция процесса $Y(t)$.

Условие (11) может быть заменено следующим:

$$\int_{0}^{\infty} k_y(\tau)\, d\tau = 0. \tag{12}$$

Действительно, в силу (6), (5), (7)

$$\int_{0}^{\infty} \tau^2 |k_y(\tau)|\, d\tau < \infty. \tag{13}$$

Следовательно, существует непрерывная спектральная плотность

$$F'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} k_y(\tau)\, e^{-2\pi i\lambda\tau}\, d\tau.$$

При этом равенство (12) принимает вид

$$F'(0) = 0,$$

откуда нетрудно получить его равносильность условию (11). Далее, из (8), (9) следует законность почленного интегрирования (6) на интервале $(0, \infty)$. В результате получаем

$$\int_{0}^{\infty} k_y(\tau)\, d\tau = \frac{a_0 b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \frac{1}{4} \int_{0}^{\frac{1}{2}} g_\eta(\lambda)\, dG_\xi(\lambda),$$

т. е. условия (12) и (10) равносильны.

5. Остановимся на некоторых частных случаях. Пусть $\{\xi_k^{(q)}\}_0^\infty$ — последовательность, порождающая поток $X_p(t)$; R — пространство реализаций этой последовательности; $\varkappa$ — мера в R, соответствующая согласно п. 2 потоку $X_p(t)$. Будем считать поток $X_p(t)$ метрически транзитивным, т. е. таким, что всякое борелевское множество в R, инвариантное относительно преобразования сдвига U по мере q, имеет q-меру 0 или 1 (см. [1], п. 9). Тогда мера $\varkappa$ отличается лишь постоянным множителем от меры q (см. ту же работу, п. п. 7, 9), и, следовательно, условие (10) можно записать в виде

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} g_\eta(\lambda)\, d\Gamma_\xi(\lambda) = 0,$$

где $\Gamma_\xi(\lambda)$ — спектральная функция последовательности, порождающей поток $X_p(t)$.

Таким образом, в этом случае для существования у процесса $Y(t) \in l_2$ непрерывной стационарной в широком смысле первообразной необходимо и достаточно, чтобы спектры последовательности уровней $\{\eta_k\}_0^\infty$ и последовательности, порождающей поток $X_p(t)$, не пересекались.

Пусть, в частности, $X_p(t)$ — поток типа Пальма, т. е. стационарный ординарный поток с взаимно независимыми величинами ξ_k. Тогда спектр последовательности, порождающей поток $X_p(t)$, занимает весь интервал $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, т. е. процесс $Y(t)$ не имеет первообразной, обладающей указанными свойствами.

Рассмотрим также класс потоков $X_p(t)$, в некотором смысле противоположный потокам типа Пальма. Именно, пусть все члены последовательности, порождающей поток $X_p(t)$, с вероятностью 1 равны между собой. Тогда

$$b_k = \int_R \xi_0^2 \, dx, \quad k > 0,$$

откуда

$$G_\xi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda = 0, \\ \int_R \xi_0^2 \, dx, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Таким образом, в этом случае условие (10) принимает вид

$$g_\eta(0) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 И. М. Сливняк. Некоторые свойства стационарных потоков однородных событий. Теория вероятностей и ее применения, 7, вып. 3, 1962, стр. 347—352.