О ЦЕПНОМ СОЕДИНЕНИИ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ КАНАЛОВ СВЯЗИ

М. Ш. Флексер

Понятие цепного соединения открытых систем было введено М. С. Лившицем [1] в связи с исследованием колебаний незамкнутых физических систем. При этом предполагалось, что пространства связей соединяемых *систем имеют одинаковые размерности, а сцепление производится по всем* каналам связи.

В настоящей заметке рассматривается класс открытых систем специального вида, для которых вводится понятие цепного соединения по части каналов связи.

1. **Открытые системы класса** (E_0, J_0). Зафиксируем гильбертово пространство E_0 и действующий в нем оператор J_0, подчиненный условиям $J_0 = J_0^*$, $J_0^2 = I$. Будем считать, что открытая система $F\left(E \lesseqgtr {E \atop H}\right)$ и соответствующий ей операторный узел $M = \begin{bmatrix} T & & J \\ H & \Gamma & E \end{bmatrix}$ (см. [2]) принадлежат классу (E_0, J_0), если выполняются следующие условия: 1) пространство E_0 инвариантно относительно J; 2) оператор, индуцируемый J в E_0, совпадает с J_0.

Таким образом, пространство входов и выходов каждой открытой системы класса (E_0, J_0) является ортогональной суммой фиксированного подпространства E_0 и некоторого ортогонального дополнения E' $(E = E_0 \oplus E')$. Подпространство E_0 назовем *основным* для F. Оператор J, входящий в любой операторный узел класса (E_0, J_0), имеет вид $J = J_0Q_0 + JQ'$, где Q_0 и Q' — проекторы на основное подпространство E_0 и его ортогональное дополнение E'.

На рис. 1 схематически изображена открытая система класса (E_0, J_0). Вход и выход системы разложены на два слагаемых $\varphi^{\mp} = \varphi_0^{\mp} + \varphi'^{\mp}$, принадлежащих соответственно подпространствам E_0 и E'.

Пусть заданы открытые системы $F_1\left(E_1 \lesseqgtr {E_1 \atop H_1}\right)$ и $F_2\left(E_2 \lesseqgtr {E_2 \atop H_2}\right)$ класса (E_0, J_0). Этим системам соответствуют отображения $\varphi_\alpha^+ = S_\alpha \varphi_\alpha^-$ и $\psi_\alpha = R_\alpha \varphi_\alpha^-$ $(\alpha = 1, 2)$ входа на выход и входа на пространство внутренних состояний. По F_1 и F_2 построим новую систему $F_{12}\left(E_{12} \lesseqgtr {E_{12} \atop H_{12}}\right)$, полагая $E_{12} =$

$= E_0 \oplus E_1' \oplus E_2'$ $(E_\alpha = E_0 \oplus E_\alpha',\ \alpha = 1,\ 2)$, $H_{12} = H_1 \oplus H_2$ и задавая отображения входа на выход и входа на внутреннее пространство равенствами

$$S_{12} = (S_2Q_2 + Q_1')(S_1Q_1 + Q_2'), \tag{1}$$
$$R_{12} = R_1Q_1 + R_2Q_2(S_1Q_1 + Q_2'), \tag{2}$$

где Q_α и Q_α' $(\alpha = 1,\ 2)$ — проекторы на E_α и E_α'. Систему F_{12} назовем *цепным соединением систем* F_1 *и* F_2 *по основному подпространству* E_0 и обозначим символом $F_1 \vee F_2$.

Соотношения (1) и (2) означают, что при цепном соединении по основному подпространству только выход первой системы, принадлежащий подпространству E_0, соединяется с аналогичным входом второй (рис. 2).

В самом деле, раскладывая вход и выход системы F_{12} на сумму $\varphi^{\mp} =$

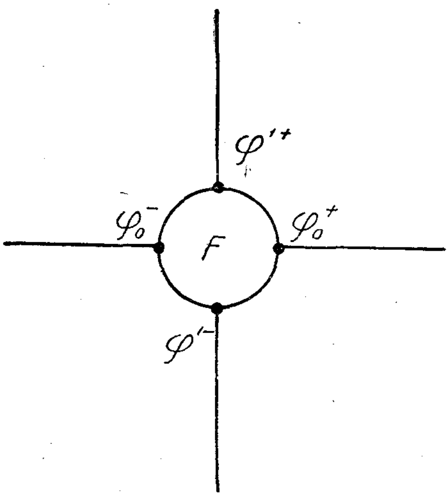

Рис. 1.

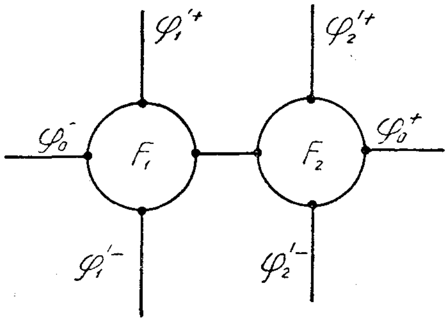

Рис. 2.

$= \varphi_0^{\mp} + \varphi_1^{\mp} + \varphi_2'^{\mp}$ $(\varphi_0^{\mp} \in E_0,\ \varphi_\alpha'^{\mp} \in E_\alpha',\ \alpha = 1,\ 2)$ и замечая, что $Q_1\varphi^-$ есть вход F_1, мы сможем записать равенство

$$S_1Q_1\varphi^- = \varphi_{0,\,1}^+ + Q_1'\varphi^+, \tag{3}$$

где $\varphi_{0,\,1}^+$ обозначает выход системы F_1, принадлежащий E_0.

Так как $\varphi_{0,\,1}^+$ является в то же время входом системы F_2, принадлежащим E_0, то имеет место соотношение

$$S_2Q_2(\varphi_{0,\,1}^+ + Q_2\varphi^-) = \varphi_0^+ + Q_2'\varphi^+. \tag{4}$$

Исключая из (3) и (4) $\varphi_{0,\,1}^+$, получим, что $\varphi^+ = S_{12}\varphi^-$.

Аналогично из соотношений $\psi_1 = R_1Q_1\varphi^-$ и $\psi_2 = R_2(\varphi_{0,\,1}^+ + Q_2'\varphi^-)$ в силу (3) получим, $\psi = \psi_1 + \psi_2 = R_{12}\varphi^-$.

Заметим, что в случае, когда $E_1 = E_2 = E_0$, цепное соединение $F_1 \overset{\circ}{\vee} F_2$ совпадает с цепным соединением $F_1 \vee F_2$ [1].

Нам понадобится понятие взаимного расширения операторных узлов класса $(E_0,\ J_0)$.

Пусть $M_1 = \begin{bmatrix} T_1 & & J_1 \\ H_1 & \Gamma_1 & E_1 \end{bmatrix}$ и $M_2 = \begin{bmatrix} T_2 & & J_2 \\ H_2 & \Gamma_2 & E_2 \end{bmatrix}$ — операторные узлы класса $(E_0,\ J_0)$. Сохраняя предыдущие обозначения для операторов проектирования на основное подпространство E_0 и соответствующих ортогональных дополнений E_1' и E_2', рассмотрим две совокупности

$$\widetilde{M}_1^{(2)} = \left[\begin{matrix} T_1 & & \widetilde{J} \\ & \widetilde{\Gamma}_1 & \\ H_1 & & \widetilde{E} \end{matrix}\right],$$

и (5)

$$\widetilde{M}_2^{(1)} = \left[\begin{matrix} T_2 & & \widetilde{J} \\ & \widetilde{\Gamma}_2 & \\ H_2 & & \widetilde{E} \end{matrix}\right],$$

где $\widetilde{E} = E_\alpha \oplus E_{3-\alpha}'$, $\widetilde{J} = J_\alpha + J_{3-\alpha}Q_{3-\alpha}'$ и $\widetilde{\Gamma}_\alpha = \Gamma_\alpha Q_\alpha$ $(\alpha = 1,\ 2)$.

Легко проверить, что $\widetilde{M}_1^{(2)}$ и $\widetilde{M}_2^{(1)}$ являются операторными узлами. Мы их будем называть *взаимными расширениями узлов* M_1 *и* M_2 *класса* $(E_0,\ J_0)$.

Теорема 1. *Пусть заданы системы* $F_\alpha\left(E_\alpha \overset{\nearrow}{\searrow} \begin{matrix} E_\alpha \\ H_\alpha \end{matrix}\right)$ $(\alpha = 1,\ 2)$ *класса* $(E_0,$ $J_0)$ *и соответствующие им операторные узлы* $M_\alpha = \left[\begin{matrix} T_\alpha & & J_\alpha \\ & \Gamma_\alpha & \\ H_\alpha & & E_\alpha \end{matrix}\right]$.

Цепному соединению $F_1 \overset{\circ}{\vee} F_2$ *этих систем по основному подпространству принадлежит операторный узел* $\widetilde{M}_2^{(1)} \vee \widetilde{M}_1^{(2)}$, *являющийся сцеплением взаимных расширений узлов* M_1 *и* M_2.

Доказательство. Операторным узлам $\widetilde{M}_1^{(2)}$ и $\widetilde{M}_2^{(1)}$ соответствуют открытые системы $\widetilde{F}_\alpha\left(\widetilde{E} \overset{\nearrow}{\searrow} \begin{matrix} \widetilde{E} \\ H_\alpha \end{matrix}\right)$ $(\alpha = 1,\ 2)$, для которых отображения входа на выход и входа на внутреннее пространство задаются формулами

$$R_\alpha = (T_\alpha - \omega 1)^{-1}\widetilde{\Gamma}_\alpha = (T_\alpha - \omega 1)^{-1}\Gamma_\alpha Q_\alpha = R_\alpha Q_\alpha$$

и

$$S_\alpha = I - i\widetilde{J}\widetilde{\Gamma}_\alpha^*\widetilde{R}_\alpha = Q_\alpha + Q_{3-\alpha}' - i\,(J_\alpha + J_{3-\alpha}Q_{3-\alpha}')\,Q_\alpha\Gamma_\alpha^* R_\alpha Q_\alpha =$$
$$= Q_\alpha - iJ_\alpha\Gamma_\alpha^* R_\alpha Q_\alpha + Q_{3-\alpha}' = S_\alpha Q_\alpha + Q_{3-\alpha}' \quad (\alpha = 1,\ 2).$$

Кроме того, цепному соединению $\widetilde{F}_1 \vee \widetilde{F}_2$ соответствуют отображения

$$\widetilde{S} = \widetilde{S}_2\widetilde{S}_1 = (S_2Q_2 + Q_1')\,(S_1Q_1 + Q_2') \tag{6}$$

и

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_2\widetilde{S}_1 = R_1Q_1 + R_2Q_2\,(S_1Q_1 + Q_2'). \tag{7}$$

Сравнивая (6), (7) с (1) и (2), приходим к заключению, что $\widetilde{F}_1 \vee \widetilde{F}_2$ совпадает с $F_1 \overset{\circ}{\vee} F_2$. Так как системе $\widetilde{F}_1 \vee \widetilde{F}_2$ принадлежит узел $\widetilde{M}_2^{(1)} \vee$ $\vee\ \widetilde{M}_1^{(2)}$, то теорема доказана.

Отметим, что сцепление узлов $\widetilde{M}_2^{(1)}$ и $\widetilde{M}_1^{(2)}$ согласно (5) имеет вид

$$\widetilde{M}_2^{(1)} \vee \widetilde{M}_1^{(2)} = \left[\begin{matrix} T_1P_1 + T_2P_2 + i\Gamma_2 J_0 Q_0 \Gamma_1^* P_1 & & J_0Q_0 + J_1Q_1' + J_2Q_2' \\ & \Gamma_1 Q_1 + \Gamma_2 Q_2 & \\ H_1 \oplus H_2 & & E_0 \oplus E_1 \oplus E_2' \end{matrix}\right]. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть* $F\left(E \overset{\nearrow}{\searrow} \begin{matrix} E \\ H \end{matrix}\right)$ $(E = E_0 \oplus E')$ — *некоторая система класса* $(E_0,\ J_0)$ *и* $M = \left[\begin{matrix} T & & J \\ & \Gamma & \\ H & & E \end{matrix}\right]$ $(J = J_0Q_0 + JQ')$, *принадлежащий ей операторный узел. Если операторы* T *и* J *имеют соответственно инвариант-*

ные подпространства H_2 *и* $E_2'' \subset E'$, а оператор Γ *удовлетворяет условиям* $P_1\Gamma Q_2'' = 0$, $P_2\Gamma Q_1'' = 0$, *где* P_α и Q_α'' $(\alpha = 1,\ 2)$ — *проекторы на* H_α $(H = H_1 \oplus H_2)$ *и* E_α'' $(E' = E_1'' \oplus E_2'')$, *то систему* F *можно представить в виде цепного соединения* $F_1 \overset{\circ}{\vee} F_2$ *двух систем* F_1 *и* F_2 *класса* $(E_0,\ J_0)$ *по основному подпространству.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условий $P_1\Gamma Q_2'' = P_2\Gamma Q_1'' = 0$ вытекает, что

$$\Gamma = P_1\Gamma\hat{Q}_1 + P_2\Gamma\hat{Q}_2, \tag{9}$$

где $\hat{Q}_\alpha$ — проекторы на подпространства на $\hat{E}_\alpha = E_0 \oplus E_\alpha''$ $(\alpha = 1, 2)$. Действительно,

$$\Gamma = (P_1 + P_2)\,\Gamma\,(Q_0 + Q_1'' + Q_2'') = P_1\Gamma\,(Q_0 + Q_1'') + P_1\Gamma Q_2'' + P_2\Gamma Q_1'' + $$
$$+ P_2\Gamma\,(Q_0 + Q_2'') = P_1\Gamma\hat{Q}_1 + P_2\Gamma\hat{Q}_2.$$

Далее, так как H_2 инвариантно относительно T, то справедливо соотношение

$$M = \mathop{\text{пр}}_{H_2} M \vee \mathop{\text{пр}}_{H_1} M, \tag{10}$$

где согласно представлению (9) проекции узла M на H_α $(\alpha = 1,\ 2)$ имеют вид

$$\mathop{\text{пр}}_{H_\alpha} M = \begin{bmatrix} P_\alpha T P_\alpha & & J \\ & P_\alpha\Gamma\hat{Q}_\alpha & \\ H_\alpha & & E \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1,\ 2). \tag{11}$$

Кроме того, совокупности

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} P_\alpha T P_\alpha & & \hat{J}_\alpha \\ & P_\alpha\Gamma & \\ H_\alpha & & \hat{E}_\alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1,\ 2), \tag{12}$$

где $\hat{J}_\alpha = J_0 Q_0 + J Q_\alpha''$, являются операторными узлами. В самом деле, умножая с обеих сторон равенство $\frac{1}{i}(T - T^*) = \Gamma J \Gamma^*$ на P_α $(\alpha = 1,\ 2)$ и замечая, что $J = \hat{J}_\alpha + J Q_{3-\alpha}''$, получим

$$\frac{1}{i} P_\alpha (T - T^*) P_\alpha = P_\alpha\Gamma\,(\hat{J}_\alpha + J Q_{3-\alpha}'')\,\Gamma^* P_\alpha = P_\alpha\Gamma\hat{J}_\alpha\Gamma^* P_\alpha + P_\alpha\Gamma J Q_{3-\alpha}''\Gamma^* P_\alpha =$$
$$= P_\alpha\Gamma\hat{J}_\alpha\Gamma^* P_\alpha,$$

так как $P_\alpha\Gamma Q_{3-\alpha}'' = 0$.

Рассмотрим теперь открытые системы $F_\alpha\left(\hat{E}_\alpha \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} \begin{matrix}\hat{E}_\alpha \\ H_\alpha\end{matrix}\right)$ $(\alpha = 1,\ 2)$, соответствующие операторным узлам (12). Они, очевидно, принадлежат классу $(E_0,\ J_0)$. Так как операторные узлы (11) являются взаимными расширениями операторных узлов M_1 и M_2, что нетрудно проверить, то в силу теоремы 1 и соотношения (10) открытая система F не отличается от цепного соединения $F_1 \overset{\circ}{\vee} F_2$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 2 допускает следующее обобщение. Пусть $H = H_0' \supset H_1' \supset \cdots \supset H_{n-1}' \supset H_n' = 0$ — убывающая последовательность инвариантных подпространств оператора T. Положим $H_\alpha = H_{\alpha-1}' \ominus H_\alpha'$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ и обозначим через P_α проекторы на H_α. Предположим, далее, что E' является ортогональной суммой $E' = E_1'' \oplus E_2'' \oplus \cdots \oplus E_n''$ инвариантных относительно J подпространств E_α'', а оператор Γ удовлетворяет условиям $P_\beta \Gamma Q''_\alpha = 0$ ($\alpha, \beta = 1, \ldots, n$; $\alpha \neq \beta$), где Q''_α — проекторы на E''_α. Тогда систему F можно представить в виде цепного соединения $F = F_1 \overset{\circ}{\vee} \cdots \overset{\circ}{\vee} F_n$ открытых систем F_α класса (E_0, J_0), соответствующих операторным узлам $M_\alpha = \begin{bmatrix} P_\alpha T P_\alpha & P_\alpha \Gamma & \hat{J}_\alpha \\ H_\alpha & & \hat{E}_\alpha \end{bmatrix}$ ($\alpha = 1, \ldots, n$), где $\hat{E}_\alpha = E_0 \oplus \oplus E''_\alpha$, $\hat{J} = J_0 Q_0 + J Q''_\alpha$. Полученное разложение системы F можно изобразить в виде символического равенства (см. рис. 3).

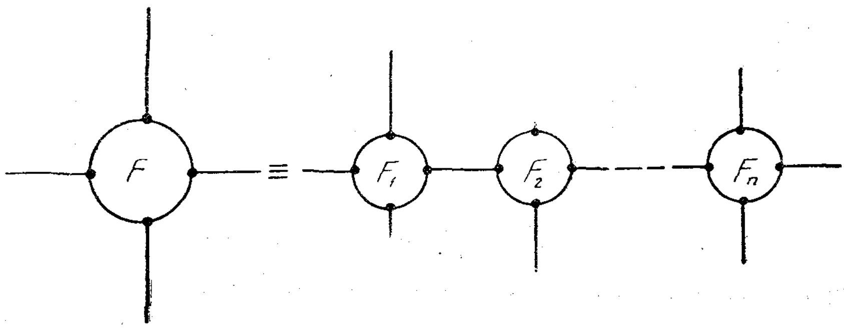

Рис. 3.

При рассмотрении примеров удобно наряду с операторной символикой пользоваться и матричной. Выбрав некоторый базис a_α ($\alpha = 1, \ldots, m$), вектору $f = \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha a_\alpha$ отнесем матрицу-строку $\vec{f} = \| f_1, f_2, \ldots, f_n \|$, а оператору L — матрицу $L = \| (L a_\alpha, a_\beta) \|$; запись $g = Lf$ в матричной форме, очевидно, будет иметь вид $\vec{g} = \vec{f} L$. Заметим еще, что от операторного узла

$$\begin{bmatrix} T & & J \\ & \Gamma & \\ H & & E \end{bmatrix}$$

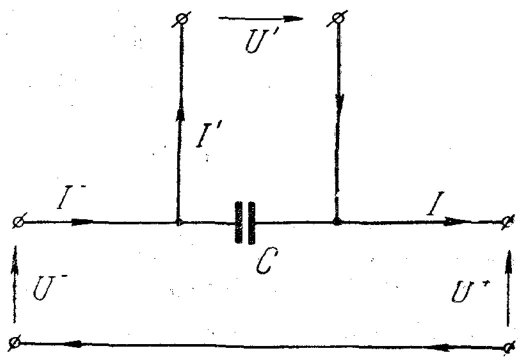

Рис. 4.

можно перейти к операторному комплексу $[T; e_1, \ldots, e_m; J]$, принадлежащему открытой системе $F\left(E \overset{\nearrow}{\searrow} \begin{matrix} E \\ H \end{matrix}\right)$ в базисе a_α, если положить $\Gamma a_\alpha = e_\alpha$, $J_{\alpha\beta} = (J a_\alpha, a_\beta)$, $J = \| J_{\alpha\beta} \|$. Справедливы следующие соотношения [1]:

$$\frac{1}{i}(T - T^*)\psi = \sum_{\alpha, \beta=1}^{m} (\psi, e_\alpha) J_{\alpha\beta} e_\beta \quad (\psi \in H),$$

$$(T - \omega)\psi = \sum_{\alpha=1}^{m} \varphi_\alpha^- e_\alpha \quad (\varphi^- \in E), \tag{13}$$

$$S(\omega) = I - i \| ((T - \omega I)^{-1} e_\alpha, e_\beta) \| J, \tag{14}$$

где $S(\omega)$ — матрица, отвечающая оператору $\varphi^+ = S \varphi^-$.

2. Примеры. Пусть в шестиполюснике (рис. 4) в качестве входа $\varphi^- = \sum_{\alpha=1}^{3} \varphi_\alpha^- a_\alpha$ и выхода $\varphi^+ = \sum_{\alpha=1}^{3} \varphi_\alpha^+ a_\alpha$ взяты соответственно величины

$$\varphi_1^- = U^-, \quad \varphi_2^- = I^-, \quad \varphi_3^- = \frac{1}{\sqrt{2r}}(-U' + rI'), \tag{15}$$

и

$$\varphi_1^+ = U^+, \ \varphi_2^+ = I^+, \ \varphi_3^+ = \frac{1}{\sqrt{2r}}(U' + rI'), \tag{16}$$

где U, U', I, I' — комплексные значения амплитуд напряжений и токов в установившихся колебаниях с частотой ω, а r — некоторая постоянная положительная величина.

Полагая в равенстве $Ci\omega U' = I^- - I'$, имеющем место для шестиполюсника, $U' = \frac{\xi_1}{\sqrt{C}}$, получим в силу (15) уравнение

$$-\frac{i}{rC}\xi_1 - \omega\xi_1 = \frac{i}{\sqrt{C}}\varphi_2^- - i\sqrt{\frac{2}{rC}}\varphi_3^- . \tag{17}$$

Это уравнение имеет вид уравнения (13), причем $T = -\frac{i}{rC}$, $\vec{e}_1 = 0$, $\vec{e}_2 = \frac{i}{\sqrt{C}}$, $\vec{e}_3 = -i\sqrt{\frac{2}{rC}}$; размерность H, в котором действует оператор T, равна единице. Если положить

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

то, что нетрудно проверить, имеет место соотношение

$$\frac{T - T^*}{i}\psi = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} (\psi, e_\alpha) J_{\alpha\beta} e_\beta,$$

т. е. оператор T, векторы e_1, e_2, e_3 и матрица J составляют операторный комплекс. Проверим, что этот операторный комплекс принадлежит шестиполюснику (рис. 4), рассматриваемому как открытую систему. Так как в силу (17) соотношение $\psi = (T - \omega 1)^{-1} \sum_{\alpha=1}^{3} \varphi_\alpha^- e_\alpha$ выполняется, то достаточно лишь установить справедливость равенства (14). С этой целью вычислим передаточную матрицу $S(\omega)$ шестиполюсника. Легко видеть, что имеют место соотношения

$$U^+ = U^- + U', \quad (I^- - I') + Ci\omega U' = 0, \quad I^+ = I^-.$$

Отсюда следует, если учесть равенства (15) и (16), что $\vec{\varphi}^+ = \vec{\varphi}^- S(\omega)$, где

$$S(\omega) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-r}{rCi\omega - 1} & 1 & \frac{-\sqrt{2r}}{rCi\omega - 1} \\ \frac{\sqrt{2r}}{rCi\omega - 1} & 0 & \frac{rCi\omega + 1}{rCi\omega - 1} \end{Vmatrix}.$$

Можно проверить, что тот же результат получим, если вычислим $S(\omega)$ по формуле (14).

Итак, шестиполюсник (рис. 4) с объявленным входом и выходом представляет собой открытую систему $F_1\left(E_1 \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow}{\searrow} \genfrac{}{}{0pt}{}{E_1}{H}\right)(\dim H = 1)$, которой принадлежит операторный комплекс $[T_1;\ e_1^{(1)},\ e_2^{(2)},\ e_3^{(3)};\ J_1]$, где

$$T_1 = \frac{-i}{rC},\quad \vec{e}_1^{(1)} = 0,\quad \vec{e}_2^{(1)} = \frac{i}{\sqrt{C}},\quad \vec{e}_3^{(1)} = -i\sqrt{\frac{2}{rC}},\quad J_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что система F_1 принадлежит классу (E_0, J_0), где E_0 — подпространство, натянутое на a_1 и a_2, а $J_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

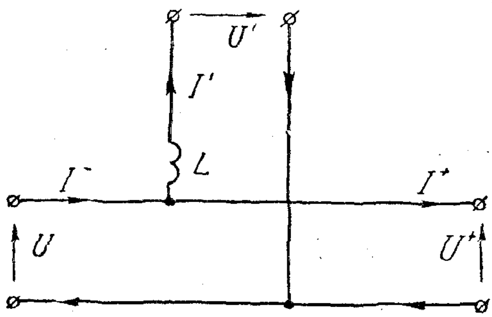

Рис. 5.

Аналогично можно показать, что шестиполюсник (рис. 5), для которого вход и выход $\varphi^{\mp} = \sum_{\alpha=1}^{3} \varphi_\alpha^{\mp} a_\alpha$ заданы величинами $\varphi_1^{\mp} = U^{\mp}$, $\varphi_2^{\mp} = I^{\mp}$ $\varphi_3^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}(U' \pm \rho I')$ представляет собой открытую систему $F_2\left(E_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow}{\searrow} \genfrac{}{}{0pt}{}{E_2}{H}\right)$ $(\dim H = 1)$ с операторным комплексом $[T_2;\ e_1^{(2)},\ e_2^{(2)},\ e_3^{(2)};\ J_2]$, где

$$T_2 = \frac{i\rho}{L},\quad \vec{e}_1^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{L}},\quad \vec{e}_2^{(2)} = 0,\ \vec{e}_3^{(2)} = i\sqrt{\frac{2\rho}{L}},$$

$$J_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Открытая система F_2 также принадлежит классу (E_0, J_0) и ее передаточная матрица

$$S(\omega) = \begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{-1}{Li\omega + \rho} & \dfrac{-\sqrt{2\rho}}{Li\omega + \rho} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-\sqrt{2\rho}}{Li\omega + \rho} & \dfrac{Li\omega - \rho}{Li\omega + \rho} \end{Vmatrix}.$$

Если в восьмиполюснике, изображенном на рис. 6, в качестве входа $\varphi^- = \sum_{\alpha=1}^{4} \varphi_\alpha^- a_\alpha$ и выхода $\varphi^+ = \sum_{\alpha=1}^{4} \varphi_\alpha^+ a_\alpha$ возьмем величины $\varphi_1^{\mp} = U^{\mp}$, $\varphi_2^{\mp} = I^{\mp}$,

$\varphi_3^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2r}}(\mp U_1 + rI_1)$, $\varphi_4^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}(U_2 \pm \rho I_2)$, то получим открытую систему $\tilde{F}\left(\tilde{\underset{\circ}{E}} \overset{\nearrow}{\searrow} \begin{matrix}\tilde{E}\\ H\end{matrix}\right)(\dim H = 2)$ класса (E_0, J_0), являющуюся цепным соединением $F_1 \overset{\circ}{\vee} F_2$ открытых систем F_1 и F_2 по основному подпространству E_0.

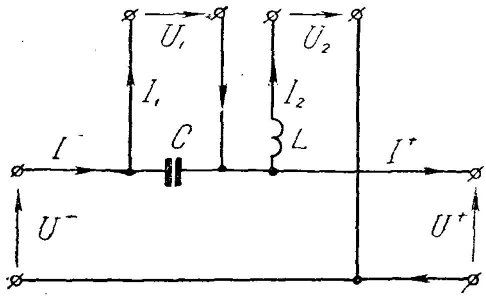

Рис. 6.

Система $\tilde{F}_1$ согласно (8), имеет операторный комплекс $[T;\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4;\ \tilde{J}]$ где

$$T = i\begin{Vmatrix} \frac{-1}{rC} & \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ 0 & \frac{\rho}{L} \end{Vmatrix}, \quad \tilde{J} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \left\| 0, \frac{i}{\sqrt{L}} \right\|, \ \vec{e}_2 = \left\| \frac{i}{\sqrt{C}}, \ 0 \right\|, \ \vec{e}_3 = \left\| -i\sqrt{\frac{2}{rC}}, \ 0 \right\|, \ \vec{e}_4 = \left\| 0, \ i\sqrt{\frac{2\rho}{L}} \right\|.$$

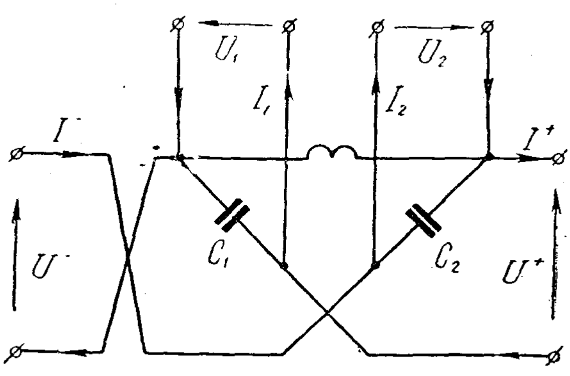

Рис. 7.

В заключение рассмотрим еще восьмиполюсник, показанный на рис. 7. В качестве входа и выхода возьмем векторы $\varphi^{\mp} = \sum_{\alpha=1}^{4} \varphi_\alpha^{\mp} a_\alpha$, где

$$\varphi_1^{\mp} = U^{\mp}, \quad \varphi_2^{\mp} = I^{\mp}, \quad \varphi_3^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2r_1}}(\mp U_1 + r_1 I_1), \quad \varphi_4^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2r_2}}(\mp U_2 + r_2 I_2).$$

Полученной открытой системе $F\left(E \overset{\nearrow}{\searrow} \begin{matrix}E\\ H\end{matrix}\right)(\dim H = 3)$ соответствует операторный комплекс

$$T = i \begin{Vmatrix} \frac{-1}{r_2C_2} & \frac{1}{\sqrt{LC_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{LC_1}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{r_1C_1} \end{Vmatrix}, \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

$$\vec{e}_1 = \left\| 0, \frac{i}{\sqrt{L}}, 0 \right\|, \quad \vec{e}_2 = \left\| \frac{i}{\sqrt{C_2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{C_1}} \right\|,$$

$$\vec{e}_3 = \left\| 0, 0, -i\sqrt{\frac{2}{r_1C_1}} \right\|, \quad \vec{e}_2 = \left\| i\sqrt{\frac{2}{r_2C_2}}, 0, 0 \right\|.$$

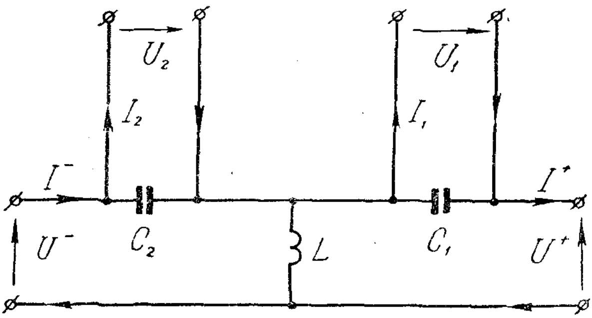

Рис. 8.

Оператор T имеет инвариантные подпространства H_1' и H_2', натянутые соответственно на $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Так как в данном случае выполняются условия обобщенной теоремы 2, то имеет место разложение $F = F_1 \overset{\circ}{\vee} F_2 \overset{\circ}{\vee} F_3$, где F_1, F_2 и F_3 — открытые системы, соответствующие операторным комплексам

$$T_1 = \frac{-i}{r_2C_2}, \quad \vec{e}_1^{\,(1)} = 0, \quad \vec{e}_2^{\,(1)} = \frac{i}{\sqrt{C_2}}, \quad \vec{e}_3^{\,(1)} = -i\sqrt{\frac{2}{r_2C_2}},$$

$$J_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix};$$

$$T_2 = 0, \quad \vec{e}_1^{\,(2)} = \frac{i}{\sqrt{L}}, \quad \vec{e}_2^{\,(2)} = 0, \quad J_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$T_3 = \frac{-i}{r_1C_1}, \quad \vec{e}_1^{\,(3)} = 0, \quad \vec{e}_2^{\,3} = \frac{i}{\sqrt{C_1}}, \quad \vec{e}_3^{\,(3)} = -i\sqrt{\frac{2}{r_1C_1}},$$

$$J_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что открытая система F (рис. 7) эквивалентна восьмиполюснику, изображенному на рис. 8, в котором вход и выход заданы величинами $\varphi_1^{\mp} = U^{\mp}$, $\varphi_2^{\mp} = I^{\mp}$,

$$\varphi_3^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2r_1}}(\mp U_1 + r_1 I_1), \quad \varphi_4^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2r_2}}(\mp U_2 + r_2 I_2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Лившиц. О линейных физических системах, соединенных с внешним миром каналами связи. «Изв. АН СССР, серия матем»., 27, 5 (1963).

2. М. С. Лившиц. Открытые системы как линейные автоматы. «Изв. АН СССР, серия матем.», 27, 6 (1963).