КОРОТКОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

В. А. Марченко, К. В. Маслов

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена строгому обоснованию коротковолнового приближения геометрической оптики для скалярной задачи о дифракции плоской волны на плоском экране.

Одним из наиболее известных методов получения коротковолнового приближения подобных задач является метод Кирхгофа [1, 2]. Приближение Кирхгофа приводит к удовлетворительному решению многих дифракционных задач физической оптики, хотя хорошо известна противоречивость предпосылок, лежащих в его основе (см. [1]).

Использованный в работе метод построения приближенного решения очень близок к методу Кирхгофа. Различие между ними вызвано способом получения оценки погрешности, предлагаемым в настоящей работе. Оценив близость построенного нами приближения $u_{\text{пр}}(x, y, z)$ к точному решению задачи $u(x, y, z)$, мы получаем затем обоснование как геометрической оптики, так и приближения Кирхгофа.

Оценку разности $u(x, y, z) - u_{\text{пр}}(x, y, z)$ нам удалось получить в метрике L^2 для любой конечной области; более точно, доказано, что

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} |u(x, y, z) - u_{\text{пр}}(x, y, z)|^2\, dxdy < C\lambda^{\frac{1}{4}},$$

где λ — длина падающей волны, а константа C зависит только от R.

Этот результат позволяет затем получить такие же оценки для приближения геометрической оптики и приближения Кирхгофа.

Доказательству соответствующих теорем, содержащихся в § 4 данной работы, предшествуют теоремы существования, единственности и представления решения задачи о дифракции на бесконечно тонком экране (см. § 2 и 3). Доказательство ряда вспомогательных утверждений приведено в конце работы, § 5.

§ 2. ЗАДАЧА О ДИФРАКЦИИ НА ЭКРАНЕ. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Рассмотрим незамкнутую конечную дважды непрерывно дифференцируемую поверхность S (экран), край которой Γ является дважды непрерывно дифференцируемой кривой. Пусть расположенные вне экрана (возможно на бесконечности) источники колебаний в отсутствии экрана порождают поле $u_0(x, y, z)$. Задача о дифракции поля $u_0(x, y, z)$ на экране состоит, как известно, в отыскании функции $u(x, y, z)$, имеющей вид

$$u(x, y, z) = u_0(x, y, z) - v(x, y, z),$$

где функция $v(x, y, z)$, описывающая рассеянное на экране поле, удовлетворяет следующим условиям:

1) *всюду вне* S

$$\Delta v + k^2 v = 0;$$

2) *в каждой конечной области* Ω *пространства энергия рассеянного поля конечна*

$$\iiint_{\Omega} \{|v|^2 + |\operatorname{grad} v|^2\} \, d\Omega < \infty;$$

3) *на бесконечности выполняются условия излучения Зоммерфельда*

$$r|v| \leqslant C < \infty, \quad \lim_{r \to \infty} r\left(v - ik\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0, \tag{1}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

4) *на экране* S *выполняется некоторое граничное условие, вид которого зависит от свойств экрана.*

Ограничимся для простоты случаем первой краевой задачи в классической постановке: функция $v(x, y, z)$ должна быть непрерывна во всем пространстве, и на экране полное поле должно быть равно нулю, т. е.

$$v(x, y, z)/_S = u_0(x, y, z)/_S. \tag{2}$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые результаты относительно свойств гармонических функций. Будем ссылаться при этом на работу Келлога [3] и Зарембы [4], формулируя нужные нам факты применительно к нашей задаче.

Лемма 1. *Пусть $u(P)$ непрерывная в пространстве и гармоническая всюду, кроме, быть может, S, функция, принимающая на S значение $f(P)$. Тогда, если $f(P)$ является дифференцируемой функцией на S, производные которой удовлетворяют условию Гельдера, то для внутренних точек S существуют предельные значения* grad u, *когда внешняя относительно S точка стремится к поверхности S. Этот предел является непрерывной функцией во внутренних точках S* [3].

Дополним теперь поверхность S до замкнутой, обозначив дополнительную поверхность через $\bar{S}$. Будем предполагать, что замкнутая поверхность $S + \bar{S}$ так же как и S является дважды непрерывно дифференцируемой поверхностью.

Лемма 2. *Пусть на $\bar{S}$ задана непрерывная функция $\mu(P)$ — плотность распределения масс. Тогда существует непрерывная во всем пространстве и гармоническая вне S функция $W(P)$, обращающаяся в ноль на бесконечности и такая, что при $P \in S$*

$$W(P) = \iint_{\bar{S}} \frac{\mu(Q)}{r_{PQ}} \, dS_Q.$$

Кроме того, существует непрерывная во внутренних точках S функция $\nu(P)$ такая, что всюду

$$W(P) = \iint_{S} \frac{\nu(Q)}{r_{PQ}} \, dS_Q,$$

при этом

$$\iint\limits_S \frac{|\nu(Q)|}{r_{PQ}} dS_Q < \infty$$

и, если $\mu(Q) > 0$, *то* $\nu(Q) \geqslant 0$ (см. [4]).

Иными словами, вместо массы, распределенной на $\bar{S}$, можно ввести массу на S так, что создаваемый этими массами потенциал на S будет одинаков.

В дальнейшем мы используем следующее обозначение. Если на $\bar{S}$ задана масса μ, то линейный оператор (оператор выметания), ставящий ей в соответствие массу ν, как об этом сказано в лемме 2, будет обозначаться через $P(\mu)$, и, кроме того,

$$\tau(P) = 1 + P(1). \tag{3}$$

Наконец, нам понадобится еще одно утверждение относительно представления функции $(e^{ikr} - 1)\, r^{-1}$ в виде потенциала простого слоя.

Лемма 3. *Имеет место представление*

$$\frac{e^{ikr_{PQ}} - 1}{r_{PQ}} = \iint\limits_{S+\bar{S}} \frac{l(R, Q)}{r_{PR}} dS_R, \tag{4}$$

где R, P, Q — *точки поверхности* $S + \bar{S}$, *а функция* $l(R, Q)$ *непрерывна по* R, *кроме точки* Q, *и*

$$|l(R, Q)| < C(|\ln r_{RQ}| + 1). \tag{5}$$

Доказательство этой леммы мы дадим в § 5.

Вернемся теперь к нашей дифракционной задаче.

Теорема 1. *Задача о дифракции на экране всегда имеет, и притом единственное, решение.*

Это решение представимо в виде

$$u(P) = u_0(P) - \iint\limits_S \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \psi(Q)\, dS_Q, \tag{6}$$

где непрерывная во внутренних точках S *функция* $\psi(Q)$ *удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_S \frac{|\psi(Q)|}{r_{PQ}} dS_Q < \infty.$$

Доказательство. Докажем сначала единственность решения. Для этого достаточно показать, что непрерывная функция $v(P)$, удовлетворяющая условиям 1—3 задачи о дифракции и обращающаяся в ноль на S, равна нулю тождественно.

Возьмем область Ω, заключенную между поверхностью Σ_R сферы Ω_R большого радиуса R и поверхностью Σ, охватывающей поверхность S так, что возле края Γ она образует трубку T_ρ радиуса ρ. Применяя в этой области формулу Грина к функциям v и $\bar{v}$, будем иметь

$$0 = \iiint\limits_\Omega (\bar{v}\Delta v - v\Delta\bar{v})\, d\Omega = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma_R+\Sigma} \left(\bar{v}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}\right) dS. \tag{7}$$

Стянем сначала Σ к S так, чтобы поверхность Σ перешла в дважды проходимую поверхность S (без кромки ширины ρ) и трубку T_ρ. Отметим, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ на части поверхности S, о которой идет речь, ограничена. Действительно, так как

$$\Delta v = -k^2 v,$$

то функция $W = v + v_1$, где

$$v_1 = \frac{k^2}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{v}{r}\, d\Omega$$

удовлетворяет внутри Ω_R уравнению Лапласа, а на S — условию $W/_S = v_1$. Но v — непрерывная функция следовательно, v_1 имеет везде производные, удовлетворяющие условию Гельдера, а значит по лемме 1 функция W и вслед за тем и v имеют непрерывный во всех внутренних точках S градиент.

Далее, из условия 2 задачи следует существование последовательности $\rho_n \to 0$ такой, что

$$\iint\limits_{T_{\rho_n}} |\operatorname{grad} v|^2\, dS < \frac{1}{\rho_n}.$$

Поэтому

$$\left| \iint\limits_{T_{\rho_n}} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial n}\, dS \right| \leqslant \left(\iint\limits_{T_{\rho_n}} |v|^2\, dS \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\iint\limits_{T_{\rho_n}} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C \left(\max_{P \in T_{\rho_n}} |v(P)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Поскольку $v(P)$ — непрерывная функция, равная нулю на S, то из (7) и (8) следует, что

$$\iint\limits_{\Sigma_R} \left(\bar{v} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Вместе с условиями излучения (1) это дает

$$\iint\limits_{\Sigma_R} |v|^2\, dS \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Как известно [5], этого достаточно для того, чтобы сделать заключение о тождественном равенстве функции $v(P)$ нулю. Единственность решения доказана.

Обратимся к доказательству существования.

Будем искать решение $u(P)$ в виде (6). Тогда для $\psi(Q)$ из (2) получаем интегральное уравнение

$$\iint\limits_{S} \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \psi(Q)\, dS_Q = u_0(P), \quad P \in S. \tag{9}$$

Воспользовавшись леммой 3, будем иметь

$$\iint\limits_{S} \frac{e^{ikr_{PQ}} - 1}{r_{PQ}} \psi(Q)\, dS_Q = \iint\limits_{S} \psi(Q) \left(\iint\limits_{S+\bar{S}} \frac{l(R, Q)}{r_{PR}}\, dS_R \right) dS_Q =$$

$$= \iint\limits_{S+\bar{S}} \frac{1}{r_{PR}} \cdot \left(\iint\limits_{S} l(R, Q)\, \psi(Q)\, dS_Q \right) dS_R.$$

Затем мы можем, используя лемму 2, последний интеграл записать в виде

$$\iint\limits_{S+\overline{S}} \frac{1}{r_{PR}}\left(\iint\limits_{S} l(R, Q)\,\psi(Q)\,dS_Q\right) dS_R = \iint\limits_{S} \frac{1}{r_{PR}}\left(\iint\limits_{S} l(R, Q)\,\psi(Q)\,dS_Q + \right.$$

$$\left. + P\left[\iint\limits_{S} l(R, Q)\,\psi(Q)\,dS_Q\right]\right) dS_R.$$

Функция $u_0(P)$, благодаря тому, что источники колебаний расположены вне экрана, является гладкой на S функцией и может, следовательно, быть представлена сначала в виде потенциала простого слоя, нанесенного на $S+\overline{S}$, а затем, по той же лемме 2, в виде потенциала простого слоя поверхности S:

$$u_0(P) = \iint\limits_{S} \frac{\varphi(R)}{r_{PR}}\,dS_R.$$

После всего этого уравнение (9) можно переписать следующим образом:

$$\iint\limits_{S} \frac{\psi(R)}{r_{PR}}\,dS_R + \iint\limits_{S} \frac{1}{r_{PR}}\left(\iint\limits_{S} l(R, Q)\,\psi(Q)\,dS_Q + P\left[\iint\limits_{S} l(R, Q)\,\psi(Q)\,dS_Q\right]\right) dS_R =$$

$$= \iint\limits_{S} \frac{\varphi(R)}{r_{PR}}\,dS_R. \tag{10}$$

Отсюда

$$\psi + P_1 L\psi = \varphi, \tag{11}$$

где L — интегральный оператор, порождаемый ядром $l(R, Q)$, а $P_1 = P + E$, где E — единичный оператор.

Введем в рассмотрение два линейных пространства: пространство C непрерывных на $S+\overline{S}$ функций с нормой $\|f\|_C = \max\limits_{P \in S+\overline{S}} |f(P)|$ и пространство C_τ функций, определенных на S. Это последнее мы определим, рассматривая сначала линейное пространство непрерывных на S вплоть до границы Γ функций с нормой

$$\|f\|_{C_\tau} = \max_{P \in S}\left|\frac{f(P)}{\tau(P)}\right|,$$

где $\tau(P)$ определяется соотношением (3). Пополняя затем это пространство по введенной норме до полного, получим пространство C_τ. Функции $f(P)$ из C_τ, очевидно, непрерывны во внутренних точках S, но при подходе точки к Γ значения $f(P)$ могут не быть ограниченными. Однако так как $|f(P)| \leqslant \|f\|_{C_\tau}\cdot\tau(P)$, то существует и конечен

$$\iint\limits_{S} \frac{|f(Q)|}{r_{PQ}}\,dS_Q \leqslant \|f\|_{C_\tau}\cdot\iint\limits_{S} \frac{\tau(Q)}{r_{PQ}}\,dS_Q. \tag{12}$$

В уравнении (11) функция $\varphi \in C_\tau$ и мы рассматриваем уравнение (11) в пространстве C_τ. Легко видеть, что P_1 — ограниченный оператор, а благодаря (12) оператор L вполне непрерывный. Стало быть, оператор $P_1 L$ также вполне непрерывный.

Таким образом, для доказательства существования решения уравнения (11) нам достаточно установить отсутствие нетривиальных решений соответствующего однородного уравнения. Но наличие таких решений повлекло бы существование в задаче о дифракции функции $v(P)$, удовлетворяющей всем условиям задачи и обращающейся в ноль на S, что по доказанной первой части теоремы невозможно. Следовательно, уравнение (11) имеет решение в классе C_τ. Отсюда совершенно очевидно существование решения задачи о дифракции и представление этого решения в виде (6). Теорема доказана.

Рассмотрим подробнее дифракцию плоской волны на плоском экране. Мы будем предполагать, что край экрана является гладкой выпуклой кривой, и ограничимся для простоты случаем нормального падения.

Итак, пусть из области $Z > 0$ на плоский экран S, лежащий в плоскости XY, падает волна e^{ikz}, и на экране выполняется первое граничное условие $u/_S = 0$. Из предыдущего следует, что эта дифракционная задача имеет, и притом единственное, решение

$$u(x, y, z) = e^{ikz} - v(x, y, z),$$

причем функция $v(x, y, z)$ представима в виде

$$v(x, y, z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \cdot \frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}} d\xi d\eta, \tag{13}$$

где $\varphi(\xi, \eta)$ — суммируемая функция, равная нулю вне экрана[1]. Функция $v(x, y, z)$ непрерывна во всем пространстве и равна единице на экране

$$v(x, y, 0) = 1, \quad x, y \in S. \tag{14}$$

Обозначим преобразование Фурье функции $\varphi(\xi, \eta)$ через $\tilde\varphi(\lambda, \mu)$; это целая функция экспоненциального типа по обеим переменным, стремящаяся к нулю при $\lambda^2 + \mu^2 \to \infty$. Нетрудно показать, что в формуле (13) можно перейти к преобразованиям Фурье, в результате чего получим

$$v(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi^2)} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde\varphi(\lambda, \mu)\, e^{i\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}\,|z|}}{\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}} e^{i\lambda x} \cdot e^{i\mu y} d\lambda d\mu. \tag{15}$$

Здесь и везде в дальнейшем знак у корня выбирается так, что

$$\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2} < 0 \quad \text{при} \quad k^2-\lambda^2-\mu^2 > 0 \quad \text{и} \quad i\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2} < 0$$

при $k^2-\lambda^2-\mu^2 < 0$. Умножая обе части равенства (15) на $\overline{\varphi(x, y)}$, интегрируя и устремляя затем z к нулю, получим, учитывая (14) и непрерывность $v(x, y, z)$,

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(x, y)}\, dxdy = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde\varphi(\lambda, \mu)|^2}{\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}} d\lambda d\mu,$$

откуда, очевидно, следует, что функция $\tilde\varphi(\lambda, \mu)$ удовлетворяет такому неравенству:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde\varphi(\lambda, \mu)|^2 \cdot |k^2-\lambda^2-\mu^2|^{-\frac{1}{2}} d\lambda d\mu < \infty. \tag{16}$$

Далее, так как $\tilde\varphi(\lambda, \mu)$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(x, y)$, равной нулю вне S, то

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde\varphi(\lambda, \mu)\, e^{i\lambda x} \cdot e^{i\mu y} d\lambda d\mu = 0, \; x, y \,\overline{\in}\, S. \tag{17}$$

---

[1] Заметим, что $\varphi(\xi, \eta) = 2\left[\frac{\partial}{\partial z} v(\xi, \eta, z)\right]_{z=0}$. Но нам это в дальнейшем не потребуется.

А из формулы (15) и краевого условия (14) следует, что

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}} e^{i\lambda x}\cdot e^{i\mu y}\, d\lambda d\mu = 1, \quad x, y \in S. \tag{18}$$

Итак, функция $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$ является решением системы парных интегральных уравнений (17), (18), удовлетворяющих условию (16).

Заметим, что интегралы в левых частях равенств (17), (18) возможно и не сходятся, так что эти равенства следует понимать в смысле обобщенных функций:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda, \mu)\,\overline{\tilde{g}(\lambda, \mu)}\, d\lambda d\mu = 0,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}}\overline{\tilde{f}(\lambda, \mu)} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x, y)}\, dx dy,$$

где $\tilde{g}(\lambda, \mu)$ — преобразование Фурье любой финитной бесконечно дифференцируемой функции, равной нулю на S, а $\tilde{f}(\lambda, \mu)$ — преобразование Фурье любой бесконечно дифференцируемой функции $f(x, y)$, равной нулю вне S.

Парные интегральные уравнения (17), (18) представляют самостоятельный интерес[1]. Поэтому, хотя из предыдущего ясно, что они имеют решение, удовлетворяющее условию (16), мы дадим в следующем параграфе независимое доказательство, которое легко обобщается и на другие системы парных интегральных уравнений.

§ 3. ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обозначим через $L^2(S)$ множество всех суммируемых с квадратом функций, равных нулю вне S, а через $\tilde{L}^2(S)$ — множество их преобразований Фурье.

Введем $\tilde{L}^2(S)$ скалярное произведение

$$(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda, \mu)\,\overline{\tilde{\psi}(\lambda, \mu)}\, |k^2-\lambda^2-\mu^2|^{-\frac{1}{2}} d\lambda d\mu.$$

Замыкание множества $\tilde{L}^2(S)$ по норме, порождаемой этим скалярным произведением, является, очевидно, полным гильбертовым пространством, которое мы обозначим через $H(S)$. Норму в этом пространстве будем обозначать через $\|\ \|_H$, так что

$$\|\tilde{\varphi}\|_H = \left(\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)|^2 \cdot |k^2-\lambda^2-\mu^2|^{-\frac{1}{2}} d\lambda d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $K(S)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вне S, а $\tilde{K}(S)$ — множество их преобразований Фурье. Легко проверить, что множество $\tilde{K}(S)$ всюду плотно в пространстве $H(S)$.

[1] Соответствующая система парных интегральных уравнений для частного случая кругового экрана подробно изучена в [6, 7].

Лемма 4. Пространство $H(S)$ совпадает с множеством всех решений уравнения (17), *удовлетворяющих условию* (16).

Доказательство. Пусть $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) \in H(S)$. Из определения этого пространства следует, что $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$ удовлетворяет условию (16), и существует последовательность функций $\tilde{\varphi}_n(\lambda, \mu)$, являющихся преобразованиями Фурье функций $\varphi_n(x, y) \in L^2(S)$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_n|^2 |k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{-\frac{1}{2}} d\lambda d\mu = 0.$$

Возьмем любую функцию $g(x, y) \in K(S)$ и ее преобразование Фурье $\tilde{g}(\lambda, \mu)$. В силу равенства Парсеваля имеем, очевидно,

$$0 = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x, y)\, \overline{g(x, y)}\, dxdy = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_n(\lambda, \mu) \cdot \overline{\tilde{g}(\lambda, \mu)}\, d\lambda d\mu. \qquad (19)$$

Так как функция $\tilde{g}(\lambda, \mu)$ быстро убывает при $\lambda^2 + \mu^2 \to \infty$, то, учитывая (16), мы можем в равенстве (19) сделать предельный переход под знаком интеграла, в результате чего получим

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda, \mu)\, \overline{\tilde{g}(\lambda, \mu)}\, d\lambda d\mu = 0.$$

Следовательно, функция $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$ удовлетворяет как условию (16), так и уравнению (17).

Обратно, пусть функция $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$ удовлетворяет условию (16) и уравнению (17). Нам нужно показать, что она является пределом в метрике пространства $H(S)$ последовательности функций из $\tilde{L}^2(S)$.

При любом $h > 0$ функция

$$\tilde{\varphi}_h(\lambda, \mu) = \left(\frac{\sin h\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{h\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\right)^2 \cdot \tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$$

является преобразованием Фурье некоторой суммируемой с квадратом функции $\varphi_h(x, y)$, равной нулю во всех точках, отстоящих от S больше, чем на $2\sqrt{2}\, h$. Значит $\tilde{\varphi}_h(\lambda, \mu)$ — целая функция экспоненциального типа — непрерывна, откуда в силу произвольности $h > 0$ следует, что функция $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$ тоже непрерывна.

Без ограничения общности мы можем считать, что начало координат лежит в некоторой точке экрана S. Но тогда, вследствие выпуклости экрана, существует такая константа C, что при подобном преобразовании плоскости с центром в начале координат и коэффициентом подобия $(1 + cl)^{-1}$ (сжатие) все точки плоскости, отстоящие от экрана S меньше, чем на l, попадут внутрь экрана. Отсюда заключаем, поскольку $2\sqrt{2} < 3$, что функция $(1 + 3ch)^2 \varphi_h[x(1 + 3ch),\ y(1 + 3ch)]$ равна нулю вне S, а ее преобразование Фурье

$$\tilde{\varphi}_h\left(\frac{\lambda}{1 + 3ch},\ \frac{\mu}{1 + 3ch}\right)$$

принадлежит множеству $\tilde{L}^2(S)$.

Используя непрерывность функции $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$, условие (16), которому она удовлетворяет, и определение $\tilde{\varphi}_h(\lambda, \mu)$, нетрудно доказать, что при $h \to 0$ функции $\tilde{\varphi}_h\left(\frac{\lambda}{1 + 3ch},\ \frac{\mu}{1 + 3ch}\right)$ сходятся в метрике пространства

$H(S)$ к функции $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$ и, следовательно, $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) \in H(S)$, что и требовалось доказать.

Обозначим через $T(S)$ множество функций $f(x, y)$, определенных и суммируемых на S, которые допускают такое продолжение на всю плоскость $\hat{f}(x, y)$, что преобразование Фурье $\tilde{\hat{f}}(\lambda, \mu)$ этого продолжения удовлетворяет условию

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\hat{f}}(\lambda, \mu)|^2 \cdot |k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}} d\lambda d\mu < \infty. \tag{20}$$

Введем в множестве $T(S)$ норму, положив

$$\|f\|_T^2 = \inf \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\hat{f}}(\lambda, \mu)| \cdot |k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}} d\lambda d\mu, \tag{21}$$

где inf берется по всевозможным продолжениям функции $f(x, y)$, преобразования Фурье которых удовлетворяют условию (20). При таком определении нормы множество $T(S)$ превращается в полное линейное нормированное пространство.

Лемма 5. *Линейный оператор U, определенный на всех функциях $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$ пространства $H(S)$ формулой*

$$U\tilde{\varphi} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda, \mu) |k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{-\frac{1}{2}} e^{i\lambda x} \cdot e^{i\mu y} d\lambda d\mu, \quad x, y \in S \tag{22}$$

осуществляет взаимнооднозначное и изометрическое отображение пространства $H(S)$ на пространство $T(S)$.

Доказательство. То, что интеграл, стоящий в правой части формулы (22), определяет на множестве S некоторую функцию из пространства $T(S)$ проверяется непосредственно. Действительно, если разбить его на два интеграла, в которых интегрирование проводится соответственно по областям $\lambda^2 + \mu^2 \leqslant 2k^2$ и $\lambda^2 + \mu^2 > 2k^2$, то, очевидно, что первый из них дает непрерывную по x, y функцию, а второй — суммируемую в квадрате на всей плоскости. Поэтому правая часть формулы определяет на S некоторую суммируемую в квадрате функцию $U\tilde{\varphi}$ и ее продолжение вне S, причем преобразование Фурье этого продолжения, равное $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) \cdot |k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{-\frac{1}{2}}$, удовлетворяет неравенству

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) \cdot |k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{-\frac{1}{2}}|^2 \cdot |k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}} d\lambda d\mu = \|\tilde{\varphi}\|_H^2 < \infty,$$

так что $U\varphi$ действительно принадлежит пространству $T(S)$ и согласно определению (21) нормы в этом пространстве

$$\|U\tilde{\varphi}\|_T \leqslant \|\tilde{\varphi}\|_H. \tag{23}$$

Следовательно, $U\{H(S)\} \subseteq T(S)$, оператор U линеен и $\|U\| \leqslant 1$.

Далее, из (22) следует, что для всех $g(x, y) \in K(S)$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U\tilde{\varphi} \cdot \bar{g}\, dx dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) \overline{\tilde{g}(\lambda, \mu)}}{|k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}}} d\lambda d\mu, \tag{24}$$

откуда, в частности, заключаем, что $U\tilde{\varphi} \neq 0$, если $\tilde{\varphi} \neq 0$, т. е. отображение взаимнооднозначно. Остается еще показать, что $U\{H(S)\} \supseteq T(S)$.

Пусть $f(x, y) \in T(S)$ и $g(x, y) \in K(S)$. В силу равенства нулю функции $g(x, y)$ вне S имеем

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\overline{f(x, y)}\,dxdy = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\overline{\hat{f}(x, y)}\,dxdy, \tag{25}$$

где $\hat{f}(x, y)$ — любое продолжение функции $f(x, y)$ на всю плоскость.

Переходя в этом равенстве к преобразованиям Фурье, получим

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\lambda, \mu)\cdot\overline{\tilde{\hat{f}}(\lambda, \mu)}\,d\lambda d\mu = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\overline{f(x, y)}\,dxdy,$$

откуда согласно неравенству Буняковского—Шварца следует

$$\left|\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\overline{f(x, y)}\,dxdy\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\tilde{g}(\lambda, \mu)|^2}{|k^2-\lambda^2-\mu^2|^{1/2}}\,d\lambda d\mu\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{\hat{f}}(\lambda, \mu)|^2\cdot|k^2-\lambda^2-\mu^2|^{1/2}\,d\lambda d\mu\right)^{1/2}$$

или

$$\left|\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\overline{f(x, y)}\,dxdy\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\|\tilde{g}\|_H\cdot\|f\|_T. \tag{26}$$

Таким образом, левая часть равенства (25) порождает на всех функциях $\tilde{g}(\lambda, \mu)$ пространства $H(S)$, являющихся преобразованиями Фурье функций $g(x, y) \in K(S)$, линейный ограниченный функционал, который по непрерывности единственным образом расширяется на все пространство $H(S)$. Но тогда в силу теоремы Рисса о виде линейного функционала в гильбертовом пространстве существует такая функция $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) \in H(S)$, что

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\overline{f(x, y)}\,dxdy = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{g}(\lambda, \mu)\overline{\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)}}{|k^2-\lambda^2-\mu^2|^{\frac{1}{2}}}\,d\lambda d\mu$$

или

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{g(x, y)}\cdot f(x, y)\,dxdy = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\tilde{g}(\lambda, \mu)}\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)}{|k^2-\lambda^2-\mu^2|^{\frac{1}{2}}}\,d\lambda d\mu, \tag{27}$$

причем согласно (26)

$$\|\tilde{\varphi}\|_H \leqslant \|f\|_T. \tag{28}$$

Сравнивая формулы (24) и (27), находим, что $U\tilde{\varphi} = f(x, y)$, т. е. область значений оператора U содержит все функции пространства $T(S)$.

Кроме того, из неравенства (27) вытекает

$$\|U\tilde{\varphi}\|_T \geqslant \|\tilde{\varphi}\|_H,$$

откуда согласно (23) следует, что отображение изометрично.

Доказанная лемма позволяет легко найти общий вид линейного функционала в пространстве $T(S)$. Действительно, каждый линейный функционал Φ, действующий в пространстве $T(S)$, порождает в пространстве $H(S)$ функционал F по формуле

$$F(\tilde{\varphi}) = \Phi(U\tilde{\varphi}).$$

Так как $H(S)$ — гильбертово пространство, то по теореме Рисса существует функция $\tilde{\psi} \in H(S)$ такая, что

$$F(\varphi) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) \cdot \overline{\tilde{\psi}(\lambda, \mu)}}{|k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}}}\, d\lambda d\mu.$$

Взяв последовательность $\tilde{\psi}_n(\lambda, \mu)$ функций из $K(S)$, сходящуюся в метрике $H(S)$ к $\tilde{\psi}(\lambda, \mu)$, и учитывая, что

$$U\tilde{\varphi} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)}{|k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda d\mu,$$

получим:

$$F(\tilde{\varphi}) = \lim_{n \to \infty} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) \cdot \overline{\tilde{\psi}_n(\lambda, \mu)}}{|k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}}}\, d\lambda d\mu = \lim_{n \to \infty} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U\tilde{\varphi} \cdot \bar{\psi}_n dx dy,$$

где $\psi_n(x, y)$ — соответствующая $\tilde{\psi}_n(\lambda, \mu)$ функция из $K(S)$. Обозначив $U\tilde{\varphi}$ через $f(x, y)$ и рассматривая какое-либо продолжение $\hat{f}(x, y)$ функции $f(x, y)$, для которого выполняется условие (20), получим

$$\Phi(f) = \lim_{n \to \infty} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U\tilde{\varphi} \cdot \bar{\psi}_n dx dy = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\hat{f}}(\lambda, \mu) \overline{\tilde{\psi}(\lambda, \mu)}\, d\lambda d\mu.$$

Таким образом, общий вид функционала в пространстве $T(S)$ дается формулой

$$\Phi(f) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\hat{f}}(\lambda, \mu) \cdot \overline{\tilde{\psi}(\lambda, \mu)}\, d\lambda d\mu, \tag{29}$$

где $\tilde{\psi} \in H(S)$, а $\tilde{\hat{f}}$ — преобразование Фурье какого-либо продолжения функции $f \in T(S)$.

Из (29) по неравенству Буняковского — Шварца имеем

$$|\Phi(f)| \leqslant \left(\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\hat{f}}|^2 \cdot |k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}} d\lambda\, d\mu \right) \cdot \left(\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\psi}|^2}{|k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}}}\, d\lambda\, d\mu \right).$$

Отсюда

$$|\Phi(f)| \leqslant \inf \left(\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\hat{f}}|^2 \cdot |k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}} d\lambda\, d\mu \right) \cdot \left(\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\psi}|^2}{|k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}}}\, d\lambda\, d\mu \right),$$

где inf берется по всем продолжениям функции f, удовлетворяющих условию (20). Это дает оценку нормы функционала Φ

$$\|\Phi\| \leqslant \|\tilde{\psi}\|_H.$$

Лемма 6. *Линейный оператор V, определенный на всех функциях $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$ пространства $H(S)$ формулой*

$$V\tilde{\varphi} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}} e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu, \quad x, y \in S$$

осуществляет взаимнооднозначное отображение пространства $H(S)$ на пространство $T(S)$.

При этом $\|V\| \leqslant 1$, а $\|V^{-1}\| \leqslant \sqrt{2}$.

Доказательство. То, что $V\{H(S)\} \subseteq T(S)$ и $\|V\| \leqslant 1$ доказывается точно так же, как в предыдущей лемме.

Оценим норму $\tilde{\varphi}$ через норму $V\tilde{\varphi}$. Пусть $V\tilde{\varphi}_0 = f_0$. Функция $\tilde{\varphi}_0 \in H(S)$ порождает в $T(S)$ линейный функционал Φ_0 по формуле

$$\Phi_0(f) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}(\lambda, \mu) \cdot \overline{\tilde{\varphi}_0(\lambda, \mu)}\, d\lambda\, d\mu.$$

При вычислении этого функционала на функции $f = f_0$ в качестве $\tilde{\tilde{f}}_0$ можно, в частности, взять $\dfrac{\tilde{\varphi}_0(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}}$.

Поэтому

$$\Phi_0(f) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\varphi}_0(\lambda, \mu)|^2}{\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}} d\lambda\, d\mu$$

и, следовательно,

$$\left| \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\varphi}_0(\lambda, \mu)|^2}{\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}} d\lambda\, d\mu \right| \leqslant \|\Phi_0\| \cdot \|f_0\|_T \leqslant \|\tilde{\varphi}_0\|_H \cdot \|f_0\|_T.$$

Замечая, что при любых вещественных α и β

$$|\alpha| + |\beta| \leqslant \sqrt{2}\, |\alpha + i\beta|,$$

получим из последнего неравенства

$$\|\tilde{\varphi}_0\|_H^2 = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\varphi}_0(\lambda, \mu)|^2}{|k^2 - \lambda^2 - \mu^2|^{\frac{1}{2}}} d\lambda\, d\mu \leqslant \sqrt{2} \cdot \left| \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\varphi}_0(\lambda, \mu)|^2}{\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}} d\lambda\, d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\, \|\tilde{\varphi}_0\|_H \cdot \|f_0\|_T.$$

Отсюда для любого $\tilde{\varphi} \in H(S)$ имеем

$$\|\tilde{\varphi}\|_H \leqslant \sqrt{2}\, \|V\tilde{\varphi}\|_T. \tag{30}$$

Из (30) следует, что оператор V отображает $H(S)$ взаимнооднозначно на замкнутое подмножество пространства $T(S)$. Поэтому для доказательства равенства $V\{H(S)\} = T(S)$ достаточно показать, что любой линейный функционал, действующий в $T(S)$ и обращающийся в нуль на $V\{H(S)\}$, равен нулю тождественно. Но так как любой функционал Φ в $T(S)$ порождается функцией $\tilde{\psi} \in H(S)$ по формуле (29), то из обращения его в нуль на $V\{H(S)\}$ вытекает

$$\Phi(V\tilde{\varphi}) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}} \cdot \overline{\tilde{\psi}(\lambda, \mu)}\, d\lambda\, d\mu = 0 \tag{31}$$

для любой $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) \in H(S)$. Полагая в (31) $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) = \tilde{\psi}(\lambda, \mu)$, получим, что $\tilde{\psi}(\lambda, \mu)$ равно нулю почти всюду, и, следовательно, Φ есть тождественный нуль. Тем самым показано, что оператор V осуществляет взаимнооднозначное отображение $H(S)$ на $T(S)$.

Наконец, из (30) следует

$$\|V^{-1}\| \leqslant \sqrt{2},$$

что и заканчивает доказательство леммы.

Непосредственным следствием доказанных лемм является

Теорема 2. *Система парных интегральных уравнений*

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \tilde{\varphi}(\lambda, \mu) \cdot e^{i\lambda x} \cdot e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu = 0, \quad x, y \,\overline{\in}\, S \tag{32}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}} e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu = f(x, y), \ x, \ y \in S \tag{33}$$

при любой функции $f \in T(S)$ *имеет, и притом единственное, решение, удовлетворяющее условию* (16). *При этом*

$$\|\tilde{\varphi}\|_H \leqslant \sqrt{2}\, \|f\|_T. \tag{34}$$

Доказательство. Из леммы 4 следует, что достаточно доказать существование и единственность решения уравнения (33), принадлежащего пространству $H(S)$, что, в свою очередь, вытекает из леммы 6, так же как и неравенство (34).

Замечание. Предложенный метод исследования парных интегральных уравнений обобщается на уравнения вида

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \tilde{\varphi}(\lambda, \mu)\, e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu = 0, \quad x, y \,\overline{\in}\, S$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \tilde{\varphi}(\lambda, \mu)\, p(\lambda, \mu)\, e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu = f(x, y), \ x, y \in S,$$

где функция $p(\lambda, \mu)$ удовлетворяет вне конечного числа кривых условию

$$\operatorname{Im} p(\lambda, \mu) \geqslant 0, \quad \operatorname{Re} p(\lambda, \mu) \geqslant 0, \quad \operatorname{Im} p + \operatorname{Re} p > 0$$

и при подходе к этим кривым не слишком быстро стремится к бесконечности.

Кроме того, $p(\lambda, \mu)$ не должно быстро убывать при $\lambda^2 + \mu^2 \to \infty$.

§ 4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Будем теперь изучать поведение решения уравнений (17), (18) при больших значениях параметра k.

Положим

$$\tilde{\varphi}(\lambda, \mu) = k\tilde{\chi}(\lambda, \mu); \quad k^{-1} = \varepsilon. \tag{35}$$

Согласно лемме 6 функция $\tilde{\chi}(\lambda, \mu)$ является единственным решением уравнения

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\chi}(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}} \cdot e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu = \frac{1}{k}, \tag{36}$$

принадлежащим пространству $H(S)$.

Будем считать, что начало координатной системы XY лежит внутри области S; полярные координаты в этой плоскости будем обозначать через r, φ, записывая функцию $f(x, y)$ в полярных координатах как $f(r, \varphi)$; это же соглашение примем для плоскости λ, μ, в которой полярные координаты обозначим через ρ, ψ.

В дальнейшем будем предполагать, что контур Γ, ограничивающий область S, является трижды непрерывно дифференцируемым выпуклым контуром, так что кривизна его $\varkappa(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\varkappa(\varphi) \geqslant \varkappa_0 > 0. \tag{37}$$

Положим

$$\tilde{g}(\lambda, \mu) = \iint\limits_{S} e^{-i\lambda x} e^{-i\mu y} dx\, dy.$$

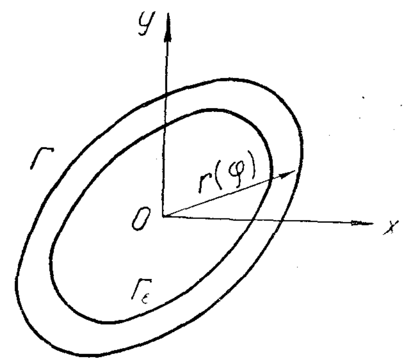

Рис. 1.

Если в уравнении (36), умножив обе его части на k, сделать формальный предельный переход при $k \to \infty$, то единственным решением из $H(S)$ предельного уравнения

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}(\lambda, \mu)\, e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu = 1$$

будет именно функция $\tilde{g}(\lambda, \mu)$. Поэтому ее следовало бы взять в качестве приближения для $\tilde{\chi}(\lambda, \mu)$. Однако непосредственно оценить погрешность такого приближения трудно. Поэтому в качестве приближенного решения выбираем функцию

$$\tilde{\chi}_{\text{пр}}(\rho, \psi) = \frac{2I_1(\varepsilon\rho)}{\varepsilon\rho} \cdot \frac{\tilde{g}\left(\frac{\rho}{h}, \psi\right)}{h^2}, \tag{38}$$

где I_1 — функция Бесселя первого рода и порядка единицы, $h = 1 + a\varepsilon$, $a > 0$.

Постоянная a выбирается из следующих соображений. Если $r = r(\varphi)$ — уравнение контура Γ, то контур Γ_ε с уравнением $r = hr(\varphi)$ должен отстоять от Γ не менее, чем на ε (рис. 1).

Функция $\frac{2I_1(\varepsilon\rho)}{\varepsilon\rho}$ является с точностью до множителя преобразованием Фурье характеристической функции круга радиуса ε (см. замечание в конце § 5), а функция $h^{-2}\tilde{g}\left(\frac{\rho}{h}, \psi\right)$ в силу сделанного выбора постоянной a есть преобразование Фурье функции, равной нулю вне контура Γ_ε. Функция $\tilde{\chi}_{\text{пр}}$ является преобразованием Фурье свертки этих функций, которая, очевидно, равна нулю вне S. Следовательно, $\tilde{\chi}_{\text{пр}} \in H(S)$.

Для дальнейшего нам будет необходима

Лемма 7. *Для функции* $\tilde{g}(\rho, \psi)$ *имеют место следующие оценки:*

$$|\tilde{g}(\rho, \psi)| < C\rho^{-\frac{3}{2}} \tag{39}$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{g}(\rho, \psi)\right| < C_1\rho^{-\frac{3}{2}}, \tag{40}$$

где константы C *и* C_1 *не зависят от* ψ.

Доказательство этой леммы дадим в § 5, а сейчас перейдем к основной теореме работы.

Положим

$$\tilde{\Delta}(\lambda, \mu) = \tilde{\chi}(\lambda, \mu) - \tilde{\chi}_{\text{пр}}(\lambda, \mu). \tag{41}$$

Теорема 3. *Имеет место неравенство*

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\Delta}(\lambda, \mu)|^2 \cdot |1 - \varepsilon^2(\lambda^2 + \mu^2)|^{-\frac{1}{2}} d\lambda\, d\mu \leqslant A\varepsilon, \tag{42}$$

где A — *константа, не зависящая от* $\varepsilon = \frac{1}{k}$.

Доказательство. Из самого определения (41) функции $\tilde{\Delta}(\lambda, \mu)$ видно, что она является решением системы парных интегральных уравнений

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Delta}(\lambda, \mu) e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu = 0, \quad x, y \,\bar{\in}\, S$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\Delta}(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}} e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu = f(x, y), \quad x, y \in S$$

где

$$f(x, y) = \frac{1}{k} - \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\chi}_{\text{пр}}(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}} e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu, \quad x, y \in S \tag{43}$$

откуда согласно теореме 2 следует, что

$$\|\tilde{\Delta}\|_H^2 \leqslant 2\|f\|_T^2. \tag{44}$$

Заметим далее, что функция

$$\frac{2I_1(\varepsilon\rho)}{\varepsilon\rho} \cdot \frac{1}{h_1^2}\tilde{g}\left(\frac{\rho}{h_1}, \psi\right)$$

является преобразованием Фурье одного из продолжений характеристической функции области S на всю плоскость, если $h_1 = 1 - b\varepsilon$ и $b > 0$ выбрано так, что кривая $r = h_1 r(\varphi)$ отстоит от контура Γ не меньше, чем на ε.

Отсюда согласно (38) и (39) заключаем, что функция

$$\varepsilon \cdot \left\{\frac{2I_1(\varepsilon\rho)}{\varepsilon\rho} \cdot \frac{1}{h_1^2}\tilde{g}\left(\frac{\rho}{h_1}, \psi\right) - \frac{2I_1(\varepsilon\rho)}{\varepsilon\rho} \cdot \frac{\tilde{g}\left(\frac{\rho}{h}, \psi\right)}{h^2\sqrt{1 - \varepsilon^2\rho^2}}\right\}$$

является преобразованием Фурье одного из продолжений функции $f(x, y)$ на всю плоскость и, следовательно,

$$\|f\|_T^2 \leqslant \varepsilon \cdot R(\varepsilon),$$

где

$$R(\varepsilon)=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\infty}\frac{2I_1^2(\varepsilon\rho)}{\varepsilon^2\rho^2}\cdot\left|\frac{\tilde g\left(\frac{\rho}{h_1},\psi\right)}{h_1^2}-\frac{\tilde g\left(\frac{\rho}{h},\psi\right)}{h^2\sqrt{1-\varepsilon^2\rho^2}}\right|^2\cdot|1-\varepsilon^2\rho^2|^{\frac{1}{2}}\rho d\rho.$$

Из этого неравенства, учитывая (44), получим

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}|\tilde\Delta(\lambda,\mu)|^2\cdot|1-\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)|^{-\frac{1}{2}}d\lambda\,d\mu=\frac{1}{\varepsilon}\|\tilde\Delta\|_H^2\leqslant 2R(\varepsilon).\qquad(45)$$

Следовательно, для доказательства теоремы нам достаточно теперь оценить величину $R(\varepsilon)$.

Интеграл $R(\varepsilon)$ представим в виде суммы двух интегралов $R_1(\varepsilon)$ и $R_2(\varepsilon)$ так, что в $R_1(\varepsilon)$ интегрирование по ρ идет в пределах $0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$, а в $R_2(\varepsilon)$ — $\rho\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$. Из леммы 7 следует существование константы C, не зависящей от ε и такой, что

$$|\tilde g(\rho,\psi)|<C\rho^{-\frac{3}{2}},\quad\left|\tilde g\left(\frac{\rho}{h},\psi\right)\right|<C\rho^{-\frac{3}{2}},\quad\left|\tilde g\left(\frac{\rho}{h_1},\psi\right)\right|<C\rho^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как $|I_1(x)|^2<C_2|x|^{-1}$, то получим, считая $h^{-2}<2$, $h_1^{-2}<2$,

$$R_2(\varepsilon)<\int_0^{2\pi}d\psi\int_{\varepsilon^{-1}}^{\infty}\frac{4C^2}{\rho^3}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2\rho^2-1}}\right)^2\cdot\frac{C_2}{\varepsilon^3\rho^3}\cdot\sqrt{\varepsilon^2\rho^2-1}\,\rho d\rho=$$

$$=8\pi C^2\cdot C_2\left\{\int_1^{\infty}\frac{1}{t^5}\left(1+\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)^2\cdot\sqrt{t^2-1}\,dt\right\}\cdot\varepsilon.\qquad(46)$$

Далее, из леммы 7 вытекает

$$\left|\tilde g\left(\frac{\rho}{h},\psi\right)-\tilde g(\rho,\psi)\right|\leqslant C_1a\rho^{-\frac{1}{2}}\cdot\varepsilon,$$

$$\left|\tilde g\left(\frac{\rho}{h_1},\psi\right)-\tilde g(\rho,\psi)\right|\leqslant C_1b\rho^{-\frac{1}{2}}\cdot\varepsilon,$$

а, следовательно, найдется постоянная C_3 такая, что

$$\left|\frac{\tilde g\left(\frac{\rho}{h_1},\psi\right)}{h_1^2}-\frac{\tilde g\left(\frac{\rho}{h},\psi\right)}{h^2\sqrt{1-\varepsilon^2\rho^2}}\right|^2\leqslant\frac{2C^2\varepsilon^4\rho}{1-\varepsilon^2\rho^2}+\frac{C_3\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2\rho^2)\rho}.$$

Кроме того, $I_1^2(\varepsilon\rho)\cdot(\varepsilon\rho)^{-2}<C_4$ при всех ε и ρ. Поэтому

$$R_1(\varepsilon)\leqslant\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\varepsilon^{-1}}(2C^2\cdot\varepsilon^4\rho^2+C_3\cdot\varepsilon^2)\cdot\frac{C_4}{\sqrt{1-\varepsilon^2\rho^2}}d\rho=$$

$$=2\pi C_4\cdot\left\{\int_0^1(2C^2t^2+C_3)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\right\}\cdot\varepsilon.\qquad(47)$$

Из (46), (47) и (45) вытекает (42), что и требовалось доказать.

Точное решение задачи о дифракции волны e^{ikz} на экране S представляется в виде

$$u(x,y,z)=e^{ikz}-v(x,y,z),$$

где v дается формулой (15). Это решение в обозначениях (35) принимает вид

$$u(x, y, z) = e^{ikz} - \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{k\widetilde{\chi}(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}} \cdot e^{i\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}\,|z|} \cdot e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu. \quad (48)$$

Построим, исходя из функции $\widetilde{\chi}_{\text{пр}}(\lambda, \mu)$, приближенное решение этой задачи

$$u_{\text{пр}}(x, y, z) = e^{ikz} - \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{k\widetilde{\chi}_{\text{пр}}(\lambda, \mu)}{\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}} e^{i\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}\,|z|} \cdot e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu, \quad (49)$$

и рассмотрим разность между точным и приближенным решением, которая согласно (41), (48) и (49) следующим образом выражается через функцию $\widetilde{\Delta}(\lambda, \mu)$:

$$u(x, y, z) - u_{\text{пр}}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\widetilde{\Delta}(\lambda, \mu)}{\sqrt{1-\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)}} e^{i\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}\,|z|} \times$$
$$\times e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu. \quad (50)$$

Теорема 4. *Для всех $R > 0$ справедливо следующее неравенство*

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} |u(x, y, z) - u_{\text{пр}}(x, y, z)|^2\, dx\, dy < CR^{\frac{3}{2}} k^{-\frac{1}{4}},$$

в котором константа C не зависит от z, R и k.

Доказательство. Разобьем интеграл в формуле (50) на две части, положив

$$\Delta_1(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{|1-\varepsilon\rho|>\varepsilon\eta} \frac{\widetilde{\Delta}(\lambda, \mu)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\rho^2}} e^{i\sqrt{k^2-\rho^2}\,|z|} e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu,$$

$$\Delta_2(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{|1-\varepsilon\rho|<\varepsilon\eta} \frac{\widetilde{\Delta}(\lambda, \mu)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\rho^2}} e^{i\sqrt{k^2-\rho^2}\,|z|} e^{i\lambda x} e^{i\mu y} d\lambda\, d\mu,$$

где положительное число η выберем несколько позже. Поскольку квадратный корень в этих формулах выбран так, что $|e^{i\sqrt{k^2-\rho^2}\,|z|}| \leqslant 1$, то из равенства Парсеваля следует

$$(2\pi)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int |\Delta_1(x, y, z)|^2\, dx\, dy \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{|\widetilde{\Delta}(\lambda, \mu)|^2}{|1-\varepsilon^2\rho^2|} d\lambda\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\eta}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{|\widetilde{\Delta}(\lambda, \mu)|^2}{|1-\varepsilon^2\rho^2|^{\frac{1}{2}}} d\lambda\, d\mu,$$

откуда согласно теореме 3 получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int |\Delta_1(x, y, z)|^2\, dx\, dy \leqslant C_1 \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\eta}} = C_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta}}. \quad (51)$$

Для того, чтобы оценить $\Delta_2(x, y, z)$, разложим функцию $\widetilde{\Delta}(\lambda, \mu) = \widetilde{\Delta}(\rho, \psi)$ в ряд Фурье

$$\widetilde{\Delta}(\rho, \psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Delta_m(\rho)\, e^{im\psi}$$

и проведем в формуле, определяющей $\Delta_2(x, y, z)$, (перейдя к полярным координатам) интегрирование только по ψ.

В результате этого получим

$$\Delta_2(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \frac{i^m}{2\pi} \int\limits_{|1-\varepsilon\rho| < \varepsilon\eta} \frac{\Delta_m(\rho)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\rho^2}} \cdot e^{i\sqrt{k^2-\rho^2}\,|z|} I_m(\rho r)\,\rho d\rho,$$

где $I_m(t)$ — функции Бесселя и $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Отсюда, согласно равенству Парсеваля для рядов Фурье, вытекает

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} |\Delta_2(x, y, z)|^2\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Bigg| \int\limits_{|1-\varepsilon\rho|<\varepsilon\eta} \frac{\Delta_m(\rho)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\rho^2}} \times$$
$$\times\, e^{i\sqrt{k^2-\rho^2}\,|z|} I_m(\rho r)\,\rho\,d\rho\Bigg|^2 r\,dr,$$

а так как

$$\Bigg| \int\limits_{|1-\varepsilon\rho|<\varepsilon\eta} \frac{\Delta_m(\rho)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\rho^2}} \cdot e^{i\sqrt{k^2-\rho^2}\,|z|} I_m(\rho r)\,\rho\,d\rho\Bigg|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \Bigg(\int\limits_{|1-\varepsilon\rho|<\varepsilon\eta} |\Delta_m(\rho)|^2 \cdot |1-\varepsilon^2\rho^2|^{-\frac{1}{2}}\,\rho\,d\rho\Bigg)\Bigg(\int\limits_{|1-\varepsilon\rho|<\varepsilon\eta} I_m^2(\rho r)\cdot(1-\varepsilon^2\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\,\rho\,d\rho\Bigg), \quad (52)$$

то, обозначая

$$\alpha_m = \int\limits_{|1-\varepsilon\rho|<\varepsilon\eta} |\Delta_m(\rho)|^2\,|1-\varepsilon^2\rho^2|^{-\frac{1}{2}}\,\rho\,d\rho,$$

$$\beta_m(r) = \int\limits_{|1-\varepsilon\rho|<\varepsilon\eta} I_m^2(\rho r)\cdot|1-\varepsilon^2\rho^2|^{-\frac{1}{2}}\,\rho\,d\rho, \quad (53)$$

будем иметь

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} |\Delta_2(x, y, z)|^2\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R \Bigg(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m\beta_m(r)\Bigg) r\,dr. \quad (54)$$

Полагая в формуле сложения для функций Бесселя

$$I_0(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}) = I_0(x)\,I_0(y) + 2\sum_{m=1}^{\infty} I_m(x)\,I_m(y)\cdot\cos m\varphi$$

$x = y = r$, получим

$$\int\limits_0^\pi I_0\Big(2r\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\cos m\varphi\,d\varphi = I_m^2(r)$$

и, следовательно,

$$I_m^2(r) \leqslant \int\limits_0^\pi \Big|I_0\Big(2r\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\Big|\,d\varphi.$$

Так как

$$|I_0(x)| < C_2 x^{-\frac{1}{2}}, \quad (0 \leqslant x < \infty),$$

что

$$I_m^2(r) \leqslant C_2\int\limits_0^\pi \Big(2r\sin\frac{\varphi}{2}\Big)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{2r}}\int\limits_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\frac{\varphi}{2}}} = \frac{C_3}{\sqrt{r}}$$

и согласно формуле (53)

$$\beta_m(r) \leqslant C_3 \int\limits_{|1-\varepsilon\eta|<\varepsilon\eta} \rho^{-\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} \cdot |1-\varepsilon^2\rho^2|^{-\frac{1}{2}} \rho\, d\rho =$$

$$= C_3 r^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int\limits_{1-\varepsilon\eta}^{1+\varepsilon\eta} t^{\frac{1}{2}} \cdot |1-t^2|^{-\frac{1}{2}} dt \leqslant C_4 r^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{-1} \eta^{\frac{1}{2}},$$

где C_4 не зависит от m.

Но из равенства Парсеваля, примененного к ряду (52), и теоремы 3 следует

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\Delta}(\lambda, \mu)|^2 \cdot |1-\varepsilon^2\rho^2|^{-\frac{1}{2}} d\lambda\, d\mu < C_5 \cdot \varepsilon,$$

и неравенство (54) дает

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} |\Delta_2(x, y, z)|^2 dx\, dy < C_6 R^{\frac{3}{2}} \cdot \eta^{\frac{1}{2}}. \tag{55}$$

Положив теперь $\eta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, из неравенств (51) и (55) получаем утверждение теоремы.

Замечание. Из доказанной теоремы, очевидно, следует, что среднеквадратичная погрешность между точным и приближенным решениями

$$\iiint\limits_V |u(x, y, z) - u_{\text{пр}}(x, y, z)|^2 dx\, dy\, dz$$

стремится к нулю в каждой конечной области пространства V.

Рассмотрим теперь приближенное решение $u_k(x, y, z)$, полученное по методу Кирхгофа. Согласно этому методу

$$u_k(x, y, z) = e^{ikz} - v_k(x, y, z),$$

где

$$v_k(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{ \frac{e^{ikr}}{r}(-ik) - \frac{\partial}{\partial\zeta} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \right\}_{\zeta=0} d\xi\, d\eta. \tag{56}$$

Из формулы (56) для преобразования Фурье $\tilde{v}_k$ функции v_k получаем

$$\tilde{v}_k(\lambda, \mu, z) = \frac{1}{2} e^{i\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}|z|} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}} + 1 \right) g(\lambda, \mu).$$

Теорема 5. *Для всех $R > 0$ справедливо следующее неравенство:*

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} |u(x, y, z) - u_k(x, y, z)|^2 dx\, dy < C R^{\frac{3}{2}} k^{-\frac{1}{4}},$$

в котором константа C не зависит от z, R и k.

Доказательство. Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что требуемая оценка имеет место для интеграла

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} |u_{\text{пр}}(x, y, z) - u_k(x, y, z)|^2 dx\, dy.$$

Введем функцию

$$\tilde{\delta}(\lambda, \mu) = \tilde{\chi}_{\text{пр}}(\lambda, \mu) - \frac{\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}}{k} \tilde{v}_k(\lambda, \mu, 0) =$$

$$= \tilde{\chi}_{\text{пр}}(\lambda, \mu) - \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)}\right) \tilde{g}(\lambda, \mu)$$

и оценим два интеграла

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\varepsilon^{-1}} |\tilde{\delta}(\rho, \psi)|^2 |1 - \varepsilon^2\rho^2|^{-\frac{1}{2}} \rho\, d\rho$$

и

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{2\varepsilon^{-1}}^{\infty} |\tilde{\delta}(\rho, \psi)|^2 \frac{\rho}{|1 - \varepsilon^2\rho^2|} d\rho.$$

Учитывая, что для $\rho < 2\varepsilon^{-1}$

$$\left| \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2\rho^2}}{2} - \frac{2I_1(\varepsilon\rho)}{\varepsilon\rho} \right| < D_1\varepsilon^2\rho^2$$

и

$$\left| \frac{2I_1(\varepsilon\rho)}{\varepsilon\rho} \left(\frac{\tilde{g}\left(\frac{\rho}{h}, \psi\right)}{h^2} - \tilde{g}(\rho, \psi) \right| < D_\varepsilon \varepsilon\rho^{-\frac{1}{2}},$$

получим

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\varepsilon^{-1}} \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2\rho^2}}{2} \tilde{g}(\rho, \psi) - \frac{2I_1(\varepsilon\rho)}{\varepsilon\rho} \cdot \frac{\tilde{g}\left(\frac{\rho}{h}, \psi\right)}{h^2} \right|^2 \frac{\rho\, d\rho}{|1 - \varepsilon^2\rho^2|^{\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi \int_0^{2\varepsilon^{-1}} \frac{D_1^2\varepsilon^4\rho^4 + D_2^2\varepsilon^2}{|1 - \varepsilon^2\rho^2|^{\frac{1}{2}}} d\rho = 4\pi \left(\int_0^2 \frac{D_1^2 t^2 + D_2^2}{|1 - t^2|^{\frac{1}{2}}} dt \right) \cdot \varepsilon.$$

Далее, так как для $\rho > 2\varepsilon^{-1}$

$$\left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\rho^2}} + 1 \right) \tilde{g}(\rho, \psi) - \frac{2I_1(\varepsilon\rho)}{\varepsilon\rho} \cdot \frac{\tilde{g}\left(\frac{\rho}{h}, \psi\right)}{h^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2\rho^2}} \right|^2 < D_4\rho^{-3},$$

то

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{2\varepsilon^{-1}}^{\infty} \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\rho^2}} + 1 \right) \tilde{g}(\rho, \psi) - \frac{2I_1(\varepsilon\rho)}{\varepsilon\rho} \cdot \frac{\tilde{g}\left(\frac{\rho}{h}, \psi\right)}{h^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2\rho^2}} \right|^2 \rho\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi D_4 \cdot \int_{2\varepsilon^{-1}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} < \pi D_4 \varepsilon.$$

Таким образом,

$$I_1 < D_5\varepsilon, \quad I_2 < D_6\varepsilon. \tag{57}$$

Но неравенства (57) позволяют провести все оценки того типа, которые были проделаны для доказательства теоремы 4. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Отметим, что для плоских экранов вместо приближения Кирхгофа $u_k(x, y, z)$, о котором мы говорили выше, часто выбирают другое приближение $u_k^*(x, y, z)$, основанное на использовании функции Грина для полупространства [2],

$$u_k^*(x, y, z) = e^{ikz} - v_k(x, y, z),$$

$$v_k^*(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \left\{\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right\} d\xi\, d\eta,$$

так что

$$\tilde{v}_k^*(\lambda, \mu, z) = e^{i\sqrt{k^2-\lambda^2-\mu^2}\,|z|}\,\tilde{g}(\lambda, \mu). \tag{58}$$

Совершенно очевидно, что все предыдущие утверждения, относящиеся к приближению u_k, в равной степени справедливы и по отношению к u_k^*.

Рассмотрим теперь приближение геометрической оптики u_Γ, имеющее вид

$$u_\Gamma = e^{ikz} - e^{-ik|z|}g(x, y),$$

где $g(x, y) = 0$ для $x, y \,\bar{\in}\, S$ и $g(x, y) = 1$ для $x, y \in S$.

Соответствующее рассеянное поле $v_\Gamma = e^{-ik|z|}g(x, y)$ имеет преобразование Фурье $v_\Gamma = e^{-ik|z|}\tilde{g}(\lambda, \mu)$. Сравним его с $\tilde{v}_k^*(\lambda, \mu, z)$. Пусть

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\infty} |\tilde{v}_\Gamma(\rho, \psi) - \tilde{v}_k^*(\rho, \psi)|^2 \rho\, d\rho.$$

Разбивая этот интеграл на сумму двух I_1 и I_2, так что в I_1 интегрирование происходит по $\rho < \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, а в I_2 — по $\rho > \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, получим согласно (58), учитывая выбор знака квадратного корня,

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} |\tilde{g}(\lambda, \mu)|^2 |e^{-ik|z|} - e^{ik(1-\alpha(\varepsilon\rho)\varepsilon^2\rho^2)|z|}|^2 \rho\, d\rho.$$

При этом $|\alpha(\varepsilon\rho)| < C_1$, так как $\rho < \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$.

Далее

$$I_1 < C_2|z|^2 \int\limits_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\rho^3}\cdot\varepsilon^2\rho^4\cdot\rho\, d\rho < C_3|z|^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, из леммы 7 следует

$$I_2 < C_4 \int\limits_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} = C_4\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$I < C_5(|z|^2 + 1)\,\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

откуда видно, что

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} |u(x, y, z) - u_\Gamma(x, y, z)|^2\, dx\, dy < C\,[R^{\frac{3}{2}} + (1+|z|^2)\,k^{-\frac{1}{4}}]\,k^{-\frac{1}{4}},$$

где константа C не зависит от R, z и k.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательство леммы 3. Так как

$$-\frac{2}{k^2}\cdot\frac{e^{ikr_{PQ}}-1}{r_{PQ}}=r_{PQ}+f(r_{PQ}),$$

где $f(r_{PQ})$ — функция, первая производная которой удовлетворяет на $S+\overline{S}$ условию Гельдера и, следовательно, может быть представлена потенциалом простого слоя с непрерывно распределенной на $S+\overline{S}$ массой, то для доказательства леммы достаточно установить справедливость представления типа (4) для функции, равной r_{PQ} на поверхности $S+\overline{S}$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что решения внутренней и внешней задачи Дирихле со значениями r_{PQ} на поверхности $S+\overline{S}$ имеют нормальные производные на $S+\overline{S}$, удовлетворяющие условию вида (5).

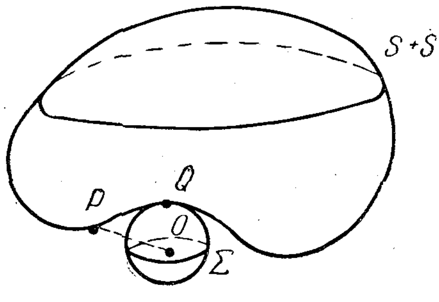

Рис. 2.

Пусть u — решение внутренней задачи Дирихле. Проведем сферу Σ внешним образом, касающуюся поверхности $S+\overline{S}$ в точке Q и не имеющую с $S+\overline{S}$ других общих точек, кроме Q. На этой сфере зададим функцию, определив ее значение в точке P, как расстояние по поверхности сферы до точки Q. Решая внешнюю задачу Дирихле для сферы Σ с этой граничной функцией, получим функцию v, для которой непосредственным подсчетом можно установить, что $\frac{\partial v}{\partial N}$ удовлетворяет на Σ условию вида (5).

Благодаря касанию Σ и $S+\overline{S}$, $\frac{\partial v}{\partial N}$ на $S+\overline{S}$ также удовлетворяет этому условию. Рассмотрим разность $w=u-v$. Функция W гармонична внутри области, ограниченной поверхностью $S+\overline{S}$. Благодаря установленным выше свойствам функции $v(P)$, имеем (рис. 2)

$$|v(P)-u(P)|=|v(P)-r_{PQ}|\leqslant Cr_{PQ}^2(|\ln r_{PQ}|+1).$$

В силу этого функция W на $S+\overline{S}$ непрерывно дифференцируема и производные ее на $S+\overline{S}$ удовлетворяют условию Гельдера. Поэтому W имеет непрерывную нормальную производную на $S+\overline{S}$. Аналогичные рассуждения, проведенные для нормальной производной решения внешней задачи Дирихле, позволяют закончить доказательство леммы.

Доказательство леммы 7.

Пусть $r=r(\varphi)$ — полярное уравнение кривой Γ (мы считаем, что $r(\varphi)\geqslant a>0$) и

$$|r^{(i)}(\varphi)|\leqslant M_i,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Проведя в формуле

$$\tilde{g}(\rho,\ \psi)=\iint\limits_S e^{-ir\rho\cos(\varphi-\psi)}dS$$

интегрирование по r и обозначая результат этого интегрирования через

$$V(\varphi) = -\frac{1}{i\rho\cos(\varphi-\psi)} r(\varphi)\, e^{-ir\rho\cos(\varphi-\psi)} + \frac{1}{\rho^2\cos^2(\varphi-\psi)}\left(e^{-ir\rho\cos(\varphi-\psi)} - 1\right),$$

получим

$$\tilde{g}(\rho, \psi) = \int_0^{2\pi} V(\varphi)\, d\varphi. \tag{59}$$

Для оценки поведения функции $\tilde{g}(\rho, \psi)$ при больших значениях ρ особую роль играют точки «стационарности фазы», где производная функции $f(\varphi) = r(\varphi)\cos(\varphi-\psi)$ обращается в ноль. Проверим, что эти точки не могут оказаться сколь угодно близкими одна к другой и что они не совпадают с точками, где $\cos(\varphi-\psi) = 0$.

Если $f'(\varphi_0) = 0$, то $r'(\varphi_0)\cos(\varphi_0-\psi) - r(\varphi_0)\sin(\varphi_0-\psi) = 0$ и

$$\cos^2(\varphi_0-\psi) = \frac{r^2(\varphi_0)}{r'^2(\varphi_0) + r^2(\varphi_0)} \geqslant \frac{a^2}{M_1^2 + a^2}.$$

Далее, так как $f(\varphi) = x(\varphi)\cos\psi + y(\varphi)\sin\psi$, то

$$|f''(\varphi_0)| = \frac{|x''y' - x'y''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} = |\varkappa(\varphi)|\,(r^2 + r'^2) \geqslant \varkappa_0 a^2.$$

Если $f'(\varphi_1) = 0$ $(\varphi_1 \neq \varphi_0)$, то в некоторой точке $\bar{\varphi}$, лежащей между φ_0 и φ_1, $f''(\bar{\varphi}) = 0$. С другой стороны,

$$f''(\bar{\varphi}) - f''(\varphi_0) = f'''(\varphi_2)(\bar{\varphi} - \varphi_0),$$

откуда

$$|\varphi_1 - \varphi_0| \geqslant |\bar{\varphi} - \varphi_0| \geqslant \frac{|f''(\varphi_0)|}{|f'''(\varphi_2)|} \geqslant \frac{\varkappa_0 a^2}{M_3 + 3M_2 + 3M_1 + M}. \tag{60}$$

Из (60) следует, что при фиксированном ψ функция $f'(\varphi)$ обращается в ноль в конечном числе точек, расстояния между которыми ограничены снизу константой, не зависящей от ψ.

Пусть $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ — точки, где $f'(\varphi) = 0$ и $\tilde{\varphi}_1 = \psi + \frac{\pi}{2}$, $\tilde{\varphi}_2 = \psi + \frac{3}{2}\pi$ — точки, где $\cos(\tilde{\varphi}_k - \psi) = 0$. Согласно предыдущему, расстояния между всеми этими точками ограничены снизу некоторой положительной константой, не зависящей от ψ. Поэтому можно эти точки покрыть непересекающимися интервалами $(\varphi_k - b, \varphi_k + b)$ и $(\tilde{\varphi}_k - b, \tilde{\varphi}_k + b)$, в каждом из которых содержится только одна из рассматриваемых точек.

Для получения оценки (39) рассмотрим интегралы трех типов.

1. $I_1 = \int\limits_{|\varphi-\varphi_k|\leqslant b} V(\varphi)\, d\varphi, \quad f'(\varphi_k) = 0.$

2. $I_2 = \int\limits_{|\varphi-\tilde{\varphi}_k|\leqslant b} V(\varphi)\, d\varphi, \quad \cos(\tilde{\varphi}_k - \psi) = 0.$

3. $I_3 = \int\limits_i V(\varphi)\, d\varphi,$

где

$$i = (0, 2\pi) - \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k - b, \varphi_k + b) - \sum_{k=1}^{2} (\tilde{\varphi}_k - b, \tilde{\varphi}_k + b).$$

Что касается I_3, то, интегрируя первое слагаемое в этом интеграле см. (59)) по частям, мы немедленно получаем

$$|I_3| < C_1\rho^{-2}. \tag{61}$$

Перейдем к I_2. Поскольку $f'(\varphi)$ не меняет знака в интервале $|\varphi-\tilde{\varphi}_k| \leqslant b$, то можем сделать замену переменных в I_2, положив $u=f(\varphi)$. Функция $\varphi=\varphi(u)$ будет монотонной трижды непрерывно дифференцируемой функцией. Положим $f(\tilde{\varphi}_k-b)=-\eta_1$, $f(\tilde{\varphi}_k+b)=\eta$. Тогда

$$\varphi-\tilde{\varphi}_k=\frac{1}{r(\tilde{\varphi}_k)}u-\frac{r^1(\tilde{\varphi}_k)}{r^3(\tilde{\varphi}_k)}u^2+\alpha_1(u)u^3,$$

$$r^2(\varphi)=r(\tilde{\varphi}_k)+\frac{r'(\tilde{\varphi}_k)}{r(\tilde{\varphi}_k)}u+\alpha_2(u)u^2,$$

$$\frac{du}{d\varphi}=r(\tilde{\varphi}_k)+\frac{2r^1(\tilde{\varphi}_k)}{r(\tilde{\varphi}_k)}u+\alpha_3(u)u^2.$$

В интервале $-\eta_1<u<\eta$ функция $\alpha_1(u)$ — непрерывна, а $\alpha_2(u)$ и $\alpha_3(u)$ — непрерывно дифференцируемы. Имеем

$$I_2=\int_{-\eta_1}^{\eta}\left\{-\frac{1}{i\rho u}e^{-i\rho u}+\frac{1}{\rho^2u^2}(e^{-i\rho u}-1)\right\}\left\{r^2(\tilde{\varphi}_k)+3r'(\tilde{\varphi}_k)u+\gamma(u)u^2\right\}du,$$

где $\gamma(u)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Для того, чтобы оценить I_2, мы должны, в свою очередь, оценить три интеграла, соответствующие трем слагаемым, стоящим во втором множителе подынтегрального выражения в I_2.

Совершенно очевидно, что

$$\left|\int_{-\eta_1}^{\eta}\left\{-\frac{1}{i\rho u}e^{-i\rho u}+\frac{1}{\rho^2u^2}(e^{-i\rho u}-1)\right\}\gamma(u)u^2\,du\right|<C_2\rho^{-2}. \tag{62}$$

Затем легко можем оценить еще один интеграл

$$\left|\int_{-\eta_1}^{\eta}\left\{-\frac{1}{i\rho u}e^{-i\rho u}+\frac{1}{\rho^2u^2}(e^{-i\rho u}-1)\right\}u\,du\right|\leqslant\left|\int_{-\eta_1}^{\eta}-\frac{1}{i\rho}e^{-i\rho u}\,du\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{\rho^2}\int_{-\eta_1}^{\eta}\frac{1}{u}(e^{-i\rho u}-1)\,du\right|\leqslant C_3\rho^{-2}+\left|\int_{-\eta_1\rho}^{\eta\rho}\frac{1}{z}(e^{-iz}-1)\,dz\right|\rho^{-2}\leqslant C_4\rho^{-2}. \tag{63}$$

Остается рассмотреть интеграл

$$I(-\eta_1,\ \eta)=\int_{-\eta_1}^{\eta}\left\{-\frac{1}{i\rho u}e^{-i\rho u}+\frac{1}{\rho^2u^2}(e^{-i\rho u}-1)\right\}du.$$

Замечая, что $I(-\infty,\ +\infty)=0$, получим

$$|I(-\eta_1,\ \eta)|\leqslant|I(\eta,\ \infty)|+|I(-\infty,\ -\eta_1)|<C_5\rho^{-2}. \tag{64}$$

Неравенства (62), (63) и (64) вместе дают

$$|I_2|\leqslant C_6\rho^{-2}. \tag{65}$$

Перейдем, наконец, к оценке I_1.

Так как $f(\varphi)-f(\varphi_k)$ во всем интервале интегрирования сохраняет знак, то, считая для определенности $f(\varphi)-f(\varphi_k)>0$, можем сделать в интеграле I_1 замену переменных, положив $f(\varphi)-f(\varphi_k)=s^2$. Тогда I_1, как нетрудно видеть, можно представить в виде

$$I_1=-\frac{e^{-i\rho f(\varphi_k)}\,r(\varphi_k)}{\rho\,[f''(\varphi_k)]^{3/2}\cos(\varphi_k-\psi)}\int\limits_0^{s_0}e^{-i\rho s^2}\,ds+\frac{e^{-i\rho f(\varphi_k)}}{\rho}\int\limits_0^{s_0}G(s)\,d\,\frac{e^{-i\rho s^2}}{\rho},\tag{66}$$

где $G(s)$ — непрерывно дифференцируемая функция s. Замечая, что

$$\int\limits_0^{s_0}e^{-i\rho s^2}\,ds=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(A-\int\limits_{s_0\sqrt{\rho}}^{\infty}e^{-iz^2}\,dz\right),$$

и интегрируя второе слагаемое в (66) по частям, получаем

$$|I_1|<C_7\rho^{-\frac{3}{2}}.\tag{67}$$

Неравенства (61), (65) и (67) доказывают справедливость (39). Если теперь функцию

$$\tilde{g}(\rho,\psi)=\iint\limits_S e^{-i\rho r\cos(\varphi-\psi)}\,r\,d\,r\,d\varphi$$

продифференцировать по ρ, то, повторяя вычисления, аналогичные проведенным, получим (40). Лемма доказана.

В заключение заметим, что когда Γ — круг радиуса R, то

$$\int\limits_0^R r\,dr\int\limits_0^{2\pi}e^{-ir\rho\cos(\varphi-\psi)}\,d\varphi=2\pi\int\limits_0^R I_0(r\rho)\,r\,dr=\frac{2\pi R I_1(R\rho)}{\rho}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. А. Стрэттон. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, 1948.
2. Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. Изд-во «Мир», 1964.
3. O. D. Kellog. On the derivatives of harmonic functions on the boundary. Trans. Amer. Math. Soc., 33 (1931).
4. С. Заремба. Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа. УМН, т. I, вып. 3—4, 1946.
5. В. Д. Купрадзе. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. Гостехиздат, 1956.
6. Н. И. Ахиезер и А. Н. Ахиезер. К задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране. ДАН СССР, 109, № 1, 1956.
7. Н. И. Ахиезер. К теории спаренных интегральных уравнений. «Зап. матем. отд. физ.-матем. ф-та и ХМО», т. XXV, серия 4, 1957.