ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ВТОРОЙ ЛИСТ

В. М. Бабич

В работе рассматривается аналитическое продолжение решения задачи

$$\Delta u + k^2 u = -\delta(M - M_0);\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0;\ \sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right)_{r\to\infty} \to 0;$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $M = M(x, y)$; $M_0 = M_0(x_0, y_0)$ в квадрант $0 \geqslant \arg k \geqslant -\frac{\pi}{2}$. Показано, что такое аналитическое продолжение возможно в область $0 \geqslant \operatorname{Im} k \geqslant -\varepsilon(\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}}$ при k достаточно больших. В этих же предположениях относительно k получены некоторые оценки функции $u(M, M_0, k)$.

Основным методом работы является метод интегрального уравнения Эрселла. Естественно поставить вопрос, точна ли оценка $0 \geqslant \operatorname{Im} k \geqslant -\varepsilon(\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}}$ по порядку величины. Как расположены ближайшие к оси $\operatorname{Im} k = 0$ полюса резольвенты при $k \to \infty$. Не строго (в духе Дж. Келлера и его школы) построение асимптотики полюсов резольвенты, ближайших к вещественной оси, было проведено В. С. Буслаевым. По договоренности с ним эти построения включены в настоящую статью (см. п. 3°).

Все оценки настоящей работы совершенно аналогичны оценкам работы [1], поэтому они здесь, как правило, опускаются.

1°. Рассмотрим «задачу о точечном источнике» для внешности ограниченной выпуклой области Ω с достаточно гладкой границей S.

$$(\Delta_M + k^2)u = -\delta(M - M_0);\ M = M(x, y),\ M_0 = M_0(x_0, y_0);\ M,\ M_0 \overline{\in} \Omega$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0;\ \sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right)_{r\to\infty} \to 0;\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \arg k = 0.$$

Функцию $u(M, M_0, k)$ часто называют функцией Грина или ядром резольвенты (оператора Лапласа для внешней области).

Нетрудно показать методами теории потенциала, что при $M,\ M_0 \overline{\in} \Omega$ функция $u(M, M_0, k)$ допускает аналитическое продолжение по k на бесконечно листную риманову поверхность $(-\infty < \arg k < +\infty)$ логарифмического типа, причем

$$u(M, M_0, k) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\,|MM_0|) + \frac{F(M, M_0, k)}{D(k)}, \tag{1}$$

где $D(k)$, $F(M, M_0, k)$ — функции, регулярные на римановой поверхности $-\infty < \arg k < +\infty$. При изменении M и M_0 в любой замкнутой области $\subset C\Omega$ ($C\Omega = (-\infty < x, y < +\infty) - \Omega$ дополнение Ω) и k в любом компакте, не содержащем $k=0$, функция $F(M, M_0, k)$ непрерывна, как функция совокупности переменных M, M_0, k (см. также [2]). Как известно, при $0 \leqslant \arg k \leqslant \pi$ $\frac{F(M, M_0, k)}{D(k)}$ не имеет особенностей по k. Будем говорить, что $k_0 \neq 0$ — неспектральная особенность резольвенты, если существует такая пара точек M, $M_0 \overline{\in} \Omega + S$, что $\frac{F(M, M_0, k)}{D(k)}$ неограничена, как функция k в окрестности $k = k_0$.

Теорема. *Если кривизна S нигде не равна нулю, то существует такая константа $\varepsilon > 0$, что все неспектральные особенности резольвенты или (что то же) функции $u(M, M_0, k)$, расположенные в квадранте $0 \geqslant \arg k \geqslant -\frac{\pi}{2}$ и достаточно большие по модулю, лежат вне области*

$$0 \geqslant \operatorname{Im} k \geqslant -\varepsilon (\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}}. \tag{2}$$

Для функции u при больших по модулю k, лежащих в этой области, будут даны некоторые оценки (см. пункт 2°).

Из теоремы сразу же вытекает

Следствие. *Область в квадранте $\pi \leqslant \arg k \leqslant \frac{3\pi}{2}$, симметричная области (2) относительно оси $\operatorname{Re} k = 0$, тоже свободна от неспектральных особенностей при больших $|k|$, все оценки для $|u|$, верные в области (2), верны и в этой симметричной области. Это следует из формулы*

$$u(M, M_0, -\bar{k}) = \overline{u(M, M_0, k)}.$$

Для доказательства теоремы заметим, что при $k \to \infty$ $0 \geqslant \arg k \geqslant -\frac{\pi}{2}$; $0 \geqslant \operatorname{Im} k \geqslant -\varepsilon (\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}}$ ($\varepsilon > 0$ достаточно мало), для изучения $u(M, M_0, k)\, M \in S$ можно воспользоваться методом интегрального уравнения Эрселла (см. [3]).

Следуя [1], построим функцию $L(M, s_0, k)$; $0 \geqslant \operatorname{Im} k \geqslant -\varepsilon (\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}}$.

$$L(M, s_0, k) = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|Ms_0|) + \frac{i}{4} \int\limits_{As_0B} \eta\left(\frac{\theta}{|k|^{-\frac{4}{21}}\chi}\right)\left(\Phi_c \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial n} - H_0^{(1)} \frac{\partial \Phi_c}{\partial n}\right) ds. \tag{1}$$

Эта функция удовлетворяет вне S уравнению

$$(\Delta_M + k^2) L = 0 \tag{3}$$

и краевому условию

$$\left.\frac{\partial L}{\partial n}\right|_S = \delta(s - s_0) - K(s_0, s, k). \tag{4}$$

Оценка для ядра

$$|K(s_0, s, k)| \leqslant C_1 \exp(-k^{\frac{1}{3}} |s - s_0| C_2) + C_3 \exp(-k^{\frac{1}{7}} C_4)$$

доказывается так же, как в работе [1].

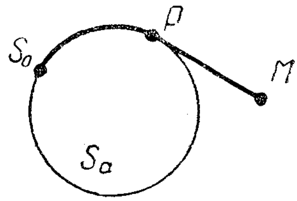
Основной причиной того, что здесь все оценки проходят, является следующее обстоятельство. В зоне глубокой тени для решения задачи

$$\begin{gathered}(\Delta_M + k^2)\,\Phi_c(M,\ s_0,\ k) = 0, \quad s_0 \in S_a \\ \left.\frac{\partial \Phi_c}{\partial n}\right|_{S_a} = 0; \quad \sqrt{r}\left(\frac{\partial \Phi_c}{\partial r} - ik\Phi_c\right)_{r\to\infty} \to 0, \\ S_a \text{ — круг } x^2 + y^2 \leqslant a^2\end{gathered} \tag{5}$$

имеет место асимптотическая формула

$$\Phi_c(s_0,\ M,\ k) \sim A \exp i\,k\tau \exp\left(k^{\frac{1}{3}} \frac{i\varkappa_1 \sigma}{\sqrt[3]{2}\, a^{\frac{2}{3}}}\right). \tag{6}$$

Здесь τ — оптическая длина пути $\tau = s_0 PM$ (PM — «скользящий» луч), $\sigma = \smile Ps_0$ — длина участка, пройденного лучом вдоль поверхности, a — радиус круга (см. рисунок), $\varkappa_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}|\varkappa_1|$ — первый корень производной функций Эйри. Если $\operatorname{Im} k < 0$ и $k \to \infty$, первый множитель возрастает, второй же, если отклонение $\operatorname{Im} k$ от нуля не очень велико, скомпенсирует первый множитель. Нетрудно видеть, что это условие «компенсации» и приводится к условию



$$0 \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant -\varepsilon(\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}}.$$

В самом деле, в глубокой тени

$$\operatorname{Re}\left(ik\tau + k^{\frac{1}{3}} \frac{i\varkappa_1\sigma}{\sqrt[3]{2}\, a^{\frac{2}{3}}}\right)_{k\to\infty} \sim -\operatorname{Im} k\tau - \frac{\sigma \operatorname{Im} i\varkappa_1}{\sqrt[3]{2}\, a^{\frac{2}{3}}}(\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\sigma \operatorname{Re} i\varkappa_1}{\sqrt[3]{2}\, a^{\frac{2}{3}}} + \varepsilon\tau\right)(\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}}. \tag{7}$$

При малом ε выражение в скобках < 0. Таким образом, «теневое затухание» в области (2) по порядку величины такое же, как в случае $\arg k = 0$.

Итак, все оценки для k проходят. Заметим, что ряд

$$u = L + KL + K^2L + \ldots$$

осуществляет аналитическое продолжение по k значений u, начиная с $\arg k = 0$ на область (2). Для этого следует заменить в выражении для $L(s_0,\ M,\ k)$

$$\eta\left(\frac{\theta\,|k^{\frac{4}{21}}|}{\varkappa}\right) \text{ на } \eta\left(\frac{\theta\,[|k|^{\frac{4}{21}}]}{\varkappa}\right),$$

$[\ldots]$ — целая часть числа.

При такой η в каждой области

$$(0 \geqslant \operatorname{Im} k \geqslant -\varepsilon(\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}}) \cap (j < |k|^{\frac{4}{21}} < j+1) \quad j \text{ — целое} \gg 1, \tag{8}$$

ряд

$$u = L + KL + K^2L + \ldots$$

будет равномерно сходящимся рядом аналитических функций, ибо единственная «неаналитичность» у функции L была связана с функцией $\eta\left(\frac{\theta |k|^{\frac{4}{21}}}{\varkappa}\right)$, а в области (8) эта функция не зависит от k.

Для того, чтобы аналитичность была и при целых $|k|^{\frac{4}{21}}$, надо заменить

$$\eta\left(\frac{\theta\,[\,|k|^{\frac{4}{21}}\,]}{\varkappa}\right) \text{ на } \eta\left(\frac{\theta\left[\,|k|^{\frac{4}{21}} + \frac{1}{2}\right]}{\varkappa}\right).$$

В силу единственности аналитического продолжения мы в обоих случаях придем к одному и тому же значению $u(M, M_0, k)|_{M \in S}$. Аналитическое продолжение $u(M, M_0, k)$ при $M \mathrel{\bar{\in}} S$ можно получить с помощью формулы

$$u(M, M_0, k) = \frac{i}{4}\int\limits_S u(s, M_0, k)\frac{\partial}{\partial n_s}H_0^{(1)}(k|Ms|)\,ds + \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|MM_0|). \quad (9)$$

Из этой формулы видно, что в области (2) полюсов функции $(u\,M, M_0, k)$ нет. Это вытекает из аналитичности $u(s, M_0, k)$ по k в этой области при любых M_0.

Уточним это рассуждение. Из (1) и (9) следует

$$\frac{F(M, M_0, k)}{D(k)} = -\frac{i}{4}\int\limits_S u(s, M_0, k)\frac{\partial}{\partial n_s}H_0^{(1)}(k|Ms|)\,ds. \quad (10)$$

Пусть в области (2) имеется неспектральная особенность k_0. Пусть M и M_0 таковы, что

$$M, M_0 \mathrel{\bar{\in}} \Omega + S,\ F(M, M_0, k) = (k - k_0)^{\alpha} F_1(M, M_0, k),\ F_1(M, M_0, k_0) \neq 0,$$
$$D(k) = (k - k_0)^{\beta} D_1(k); \quad D_1(k_0) \neq 0$$

(α, β — целые $\geqslant 0$, $\alpha < \beta$, F_1, D_1 регулярны в окрестности $k = k_0$).

Из (10) следует

$$F_1(M, M_0, k) = -\frac{i}{4}D_1(k)(k - k_0)^{\beta-\alpha}\int\limits_S u\frac{\partial}{\partial n_s}H_0^{(1)}\,ds.$$

Положив в последнем равенстве $k = k_0$, придем к противоречию.

2°. Здесь мы получим оценку для

$$u(s_0) = u(M, M_0, k)|_{M = s_0 \in S}.$$

Обратимся к интегральному уравнению для $u(s_0)$:

$$u(s_0) = \int\limits_S K(s_0, s, k)\,u(s)\,ds + L(M_0, s_0, k).$$

В силу того, что это интегральное уравнение с «малым» ядром, имеем

$$|u(s_0)| \leqslant \text{const}\max_{s_0 \in S}|L(M_0, s_0, k)|. \quad (11$$

Для нахождения оценки для $|u(s_0)|$ достаточно оценить $L(M_0, s_0, k)$ $s_0 \in S$. Функция $L(M_0, s_0, k)$ на величину порядка $O(\exp(-Ck^{\frac{1}{7}}))$ отличается от $\Phi_c(M_0, s_0, k)$. Здесь Φ_c — решение задачи (1), где S заменено на круг кривизны точки s_0 контура S (см. (1)). При таких s_0 для оценки L достаточно оценить Φ_c. Пусть s_0 лежит на замкнутой освещенной дуге $\subset S$, не содержащей точек, отделяющих тень от света.

Обычные приемы дают

$$\Phi_c(M_0, s_0, k) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi k\,|MM_0|}}\, e^{ik|M_0 s_0| - \frac{\pi i}{4}}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Это хорошо известная формула при $\arg k = 0$. *При*

$$0 \geqslant \operatorname{Im} k \geqslant -\varepsilon(\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}} \quad k \to \infty$$

эта формула и ее доказательство сохраняются.

Для $\Phi_c(M_0, s_0, k)$ отсюда получаем оценку:

$$|\Phi_c(M_0, s_0, k)| \leqslant \text{const}\left|\frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik|M_0 s_0|}\right|. \tag{12}$$

Для $\arg k = 0$ эта оценка доказана в (1), для всей освещенной области (const равномерная). Доказательство без каких-либо изменений переносится на случай $0 \geqslant \operatorname{Im} k \geqslant -\varepsilon(\operatorname{Re} k)^{\frac{1}{3}}$.

В зоне тени, повторяя оценки работы (1), получим

$$|\Phi_c(M, M_0, k)| \leqslant \text{const}\left|\frac{1}{\sqrt{k}} e^{ikd}\right| \tag{13}$$
$$d = \max_{s \in S'} |M_0 s|$$

S' — освещенная часть контура S. Оценку можно дать и более точную, но мы ограничимся этой).

Оценки для L имеют тот же вид, что и для Φ_c. Из (11)—(13) следует, что

$$|u(s_0)| \leqslant \text{const}\left|\frac{1}{\sqrt{k}} e^{ikd}\right| \tag{14}$$

($d = \max\limits_{s \in S'} |M_0 s|$, S' — освещенная часть контура S).

Пользуясь формулой (9), нетрудно получить оценку для $u(M, M_0, k)$ для M, лежащих вне контура S.

3°. В этом пункте будут приведены простые соображения, которые указывают правдоподобную асимптотически точную границу области голоморфности и дают возможность получить асимптотику ($k \to \infty$) для ближайших к оси $\operatorname{Im} k = 0$ полюсов на основном листе римановой поверхности. Эти соображения принадлежат В. С. Буслаеву. В математическом отношении предлагаемые здесь формулы являются гипотезой как и известные формулы Келлера (4) для асимптотики в области тени, из которых мы будем исходить. Коротко остановимся на распространении упомянутых соображений на многомерные и некоторые другие задачи.

Пусть точки M и M_0 — аргументы функции $u(M, M_0, k)$ фиксированы в тени относительно друг друга. Асимптотика $u(M, M_0, k)$ при $k \to \infty$ имеет в этом случае следующую структуру:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_n^+ + \Gamma_n^-). \tag{15}$$

Здесь $\Gamma_0^{\pm}$ так называемые огибающие волны, соответствующие кратчайшим кривым, соединяющим M и M_0 и лежащей вне области Ω, $\Gamma_n^{\pm}$ — огибающие волны, соответствующие кривым, которые отличаются от кратчайших дополнительными витками вокруг контура S.

Из формул Келлера следует

$$\Gamma_n^{\pm} = \gamma^{\pm} e^{inkl} e^{inZ\varkappa_1}, \tag{16}$$

здесь $\gamma^{\pm}$ не зависит от n, l — длина контура, $Z = \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \oint \frac{ds}{a^{\frac{2}{3}}}$, $a(s)$ — радиус кривизны контура как функция длины дуги s, $\varkappa_1$ — наименьший по модулю корень производной функций Эйри $w'(\varkappa)$; $\varkappa_1 = |\varkappa_1| e^{i\frac{\pi}{3}}$. Подстановка выражений (16) для Γ_n в ряд (15) дает

$$(\gamma^+ + \gamma^-) \frac{1}{1 - e^{ikl} e^{iZ\varkappa_1}}. \tag{17}$$

Следующее естественное предположение заключается в том, что ближайшие к оси $\operatorname{Im} k = 0$ особенности функции $u(M, M_0, k)$ асимптотически совпадают с особенностями функции

$$\frac{1}{1 - e^{ikl} e^{iZ\varkappa_1}},$$

т. е. являются простыми полюсами, которые определяются из уравнения

$$1 = e^{ikl} e^{iZ\varkappa_1}. \tag{18}$$

При $|k| \gg 1$ уравнение (18) приводит к последовательности полюсов

$$k_j = \frac{2\pi}{l} j - \frac{\varkappa_1}{l} \left(\frac{\pi}{l} j\right)^{\frac{1}{3}} \oint \frac{ds}{a^{\frac{2}{3}}}, \tag{19}$$

($j = j_0, j_0 + 1, \ldots j_0 \gg 1$ — целое), которые лежат на кривой

$$\operatorname{Im} k = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{|\varkappa_1|}{l} \left(\frac{\operatorname{Re} k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \oint \frac{ds}{a^{\frac{2}{3}}}; \tag{20}$$

нужно рассматривать только ту ветвь этой кривой, которая лежит в правой полуплоскости. Особые точки функции $u(M, M_0, k)$ располагаются симметрично оси $\operatorname{Re} k = 0$.

Приведенные вычисления можно рассматривать как новую иллюстрацию простого общего утверждения: асимптотики полюсов функции Грина, связанной с эллиптическими уравнениями, определяются замкнутыми геодезическими. Это подтверждается многими примерами, которые отличаются в основном определением геодезической. В нашем случае — замкнутая геодезическая — кривая экстремальной длины. Если выпуклая область имеет бесконечную границу, то таких кривых не существует. Это позволяет предположить, что ссответствующая функция Грина не имеет полюсов при аналитическом продолжении. Напротив, в аналогичных многомерных задачах во внешности ограниченных областей такие геодезические всегда существуют и обычно их несколько. В трехмерном случае их не меньше трех: это следует из теоремы Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана, утверждающей, что на замкнутой поверхности рода нуль существуют по крайней мере три замкнутых геодезических. Каждой замкнутой геодезической соответствует своя последовательность полюсов, которая и в многомерном случае описывается формулами (19), (20) с точностью до логарифмических членов — членов меньшего порядка. Это легко выводится из многомерного обобщения формул Келлера (см., например, [5]).

Отметим еще два примера. Первый из них дает нам работа Рубинау и Келлера [6] об асимптотике собственных значений и собственных функций краевой задачи для оператора Лапласа внутри ограниченной выпуклой области. Здесь геодезическими оказываются ломаные с вершинами на границе, «отражающиеся» от границы так, что «угол падения равен углу отражения».

Другой пример: уравнение Шредингера $-\psi'' + q(x)\psi = k^2\psi$; $\psi(0) = 0$ на полуоси $[0, \infty]$ с убывающим при $x \to \infty$ потенциалом $q(x)$. При определенных предположениях о потенциале функция Грина в этой задаче допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im} k < 0$. Асимптотика полюсов, возникающих при этом, определяется особенностями потенциала. Ее легко найти точно и можно проверить, что она связана с замкнутыми геодезическими. Геодезические в этой задаче могут отражаться от точки $x = 0$ и особых точек потенциала $q(x)$.

По какому же правилу замкнутые геодезические порождают асимптотику полюсов? Существование и положение полюсов не зависит от расположения точек x и x'. Однако от этих точек зависит, например, величина вычета. Можно выбрать M и M_0 так, чтобы полюса определялись главными членами асимптотики функции Грина $u(M, M_0, k)$ при $k \to \infty$. Для этого нужно расположить точки M и M_0 на рассматриваемой геодезической. Асимптотика в главных членах будет характеризоваться данными задачи в окрестности геодезической. Следует просуммировать эти главные члены, отвечающие разному числу полных циклов замкнутой геодезической. Аналитическое продолжение получившегося ряда должно асимптотически иметь те же особенности, что и функция $u(M, M_0, k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабич. О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца. «Матем. сб.,» т. 65(107): 4, 1964.
2. H. Reichardt. Ausstralungsbedingungen für die Wellengleichung Abhandl. Math. Seminar Univ., Hamburg, 1960, 24, 41—53.
3. F. Ursell. On the short-wave asymptotic theory of the wave equation $(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0$. Proc. Cambridge Phil. Soc. 53, № 1, 1957, 115—133.
4. J. B. Keller. Diffraction by a convex cylinder. IRE Trans. 1956, vol. AP—4, 312—321.
5. В. С. Буслаев. Применение континуальных интегралов для вывода коротковолновой асимптотики в дифракционных задачах. ДАН СССР, т. 160, 1965, № 3.
6. J. B. Keller, S. Rubinow. Asymptotic solution of eigenvalue problems. Annals of Physics, 1960. vol. 9, № 1, 24—75.