ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТЯХ СО СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Г. В. Сузиков

1. В работе [1] было исследовано поведение решений второй краевой задачи в областях, границами которых служат замкнутые поверхности с большим числом дырок, когда число их неограниченно растет, а диаметры стремятся к нулю. В настоящей работе этот вопрос изучен для третьей краевой задачи.

Пусть Γ — замкнутая поверхность Ляпунова с показателем Ляпунова равным единице. Удалив из Γ конечное число кусков $S_i (i = 1, 2, \ldots p)$, получим продырявленную поверхность Σ. Область, являющуюся дополнением Σ до всего пространства R_3, обозначим D, а области, лежащие соответственно внутри и вне поверхности Γ — D^+ и D^- так, что

$$D = R_3 \setminus \sum, \ \sum = \Gamma \setminus S, \ S = \bigcup_1^p S_i.$$

Поверхность Γ является общей границей областей D^+ и D^-, а поверхность Σ является границей области D.

Везде в дальнейшем будем предполагать, что удаленные из Γ куски S_i ограничены кривыми l_i, удовлетворяющими определенным условиям гладкости (см. [1], введение условия а), в)).

Обозначим $\widetilde{W}_2^1(D)$ множество непрерывных и непрерывно дифференцируемых в области D функций $u(P)$, которые имеют на поверхности Γ непрерывные внутренние $u^+(P)$ и внешние $u^-(P)$ граничные значения и удовлетворяют неравенству

$$\int_D (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, dV < \infty.$$

(Заметим, что функция $u(P) \in \widetilde{W}_2^1(D)$, рассматриваемая во всем пространстве, может иметь разрывы при переходе через Σ).

Функцией Грина (с источником в точке Q) третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца в области D

$$\Delta u + k^2 u = \varphi(P) \quad (\operatorname{Im} k > 0), \tag{1.1}$$

$$\left[\frac{\partial u(P)}{dn_P}\right]^+ + h_1(P)\,[u(P)]^+ = 0, \quad \left[-\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right]^- + h_2(P)\,[u(P)]^- = 0,$$

(n_P — внешняя нормаль к Γ в точке P, $h_1(P)$ и $h_2(P)$ положительные и непрерывные на Γ функции) называется функция

$$G(P, Q, k) = \frac{e^{ikr(P, Q)}}{4\pi r(P, Q)} + \gamma(P, Q, k) \quad (\operatorname{Im} k > 0),$$

удовлетворяющая таким условиям:

1) Функция $\gamma(P, Q, k) \in \widetilde{W}_2^1(D)$ и удовлетворяет в D уравнению

$$\Delta\gamma + k^2\gamma = 0.$$

2) Для всех $P \in \sum$

$$\left[\frac{\partial G(P, Q, k)}{\partial n_P}\right]^+ + h_1(P)[G(P, Q, k)]^+ = 0,$$

$$\left[-\frac{\partial G(P, Q, k)}{\partial n_P}\right]^- + h_2(P)[G(P, Q, k)]^- = 0.$$

Значки $+$ ($-$) показывают, что берутся внутренние (внешние) граничные значения функции на поверхности Γ.

3) Если $F_j = \bigcup\limits_{i=1}^{p} F_j^i$ — последовательность кусочно-гладких поверхностей таких, что F_j^i замкнута и содержит внутри себя l_i — границу связного куска $S_i \subset S$ поверхности Γ; F_j^i и F_j^k не пересекаются и при $j \to \infty$ F_j^i стягивается к l_i, то

$$\lim_{j\to\infty} \int_{F_j} \left| \frac{\partial G(P, Q, k)}{\partial n_P} \right| dS_P = 0.$$

Рассмотрим последовательность областей $D^{(n)}$ с границами $\sum^{(n)} = \Gamma \setminus S^{(n)}$, $S^{(n)} = \bigcup\limits_{i=1}^{p(n)} S_i^{(n)}$ и соответствующие им функции Грина $G^{(n)}(P, Q, k)$. Пусть при $n \to \infty$ диаметры удаляемых из Γ кусков $S_i^{(n)}$ стремятся к нулю, а их число $p(n)$ — к бесконечности. Спрашивается, при каких условиях *существует предел последовательности функций Грина и как его найти.*

Везде в дальнейшем мы будем пользоваться такими обозначениями:

$n(n_P)$ — внешняя нормаль к Γ (в точке P);

$d_i^{(n)}$ — диаметр куска $S_i^{(n)}$;

$c_i^{(n)}$ — емкость куска $S_i^{(n)}$;

$r_{ij}^{(n)}$ — расстояние между кусками $S_i^{(n)}$ и $S_j^{(n)}$;

$\sum\limits_{\sigma} a_i^{(n)}$ — сумма, распространенная при данном n на все те значения индекса i, при которых $S_i^{(n)}$ лежит строго внутри σ (σ — часть поверхности Γ).

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть при $n \to \infty$ выполнены такие условия:*

1) *Диаметры $d_i^{(n)}$ удаляемых из Γ кусков $S_i^{(n)}$ равномерно стремятся к нулю:*

$$\lim_{n\to\infty} \{\max_i d_i^{(n)}\} = 0.$$

2) *Функция*

$$\delta(\rho) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\max_i \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} < \rho}} \frac{c_j^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}} \right)$$

стремится к нулю при $\rho \to 0$.

3) *Емкости* $c_i^{(n)}$ *кусков* $S_i^{(n)}$ *удовлетворяют такому предельному соотношению:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{(\sigma)} c_i^{(n)} = \int_{(\sigma)} f(P)\,dS_P$$

для любого куска (σ) *поверхности* Γ, *где* $f(P)$ *непрерывная на поверхности* Γ *функция.*

Тогда при $n\to\infty$ *в области* $D^+\cup D^-$ *существует предел последовательности функций Грина* $G^{(n)}(P, Q, k)$ $(\operatorname{Im} k > 0)$ *краевых задач* (1.1)

$$\lim_{n\to\infty} G^{(n)}(P, Q, k) = G(P, Q, k), \tag{1.2}$$

и этот предел есть функция Грина краевой задачи

$$\Delta u + k^2 u = \varphi(P) \quad (P \in D^+ \cup D^-), \tag{1.3}$$

$$\left[\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right]^+ + h_1(P)[u(P)]^+ = \left[\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right]^- - h_2(P)[u(P)]^- =$$
$$= \pi f(P)\{[u(P)]^- - [u(P)]^+\}. \tag{1.3'}$$

При этом сходимость в формуле (1.2) *равномерна на любом множестве точек* P, Q, *расстояние от которого до поверхности* Γ *положительно.*

2. Нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения, доказательства которых совершенно аналогичны доказательствам лемм 1—5 работы [1]. Поэтому мы ограничимся только формулировками нужных нам предложений.

Пусть $G_i(P, Q, i\lambda)$ $(\lambda > 0)$ функция Грина третьей краевой задачи в D^+

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0, \quad \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} + h_1(P)\,u(P)\,|_\Gamma = \varphi(P), \tag{2.1}$$

а $G_e(P, Q, i\lambda)$ $(\lambda > 0)$ функция Грина третьей краевой задачи в D^-

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0, \quad -\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} + h_2(P)\,u(P)\,|_\Gamma = \varphi(P). \tag{2.1'}$$

Лемма 1. *При* $X \in \Gamma$ *справедливы представления*

$$G_i(P, X, i\lambda) = \frac{e^{-\lambda r(P, X)}}{2\pi r(P, X)} - \int_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(P, Y)}}{2\pi r(P, Y)} g_i(Y, X, \lambda)\,dS_y -$$
$$- \int_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(P, Y)}}{2\pi r(P, Y)}\left[\int_\Gamma R_i(Y, Z, \lambda)\,g_i(Z, X, \lambda)\,dS_Z\right] dS_Y, \tag{2.2}$$

$$G_e(P, X, i\lambda) = \frac{e^{-\lambda r(P, X)}}{2\pi r(P, X)} - \int_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(P, Y)}}{2\pi r(P, Y)} g_e(Y, X, \lambda)\,dS_Y -$$
$$- \int_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(P, Y)}}{2\pi r(P, Y)}\left[\int_\Gamma R_e(Y, Z, \lambda)\,g_e(Z, X, \lambda)\,dS_Z\right] dS_y, \tag{2.2'}$$

где

$$g_i(Y, X, \lambda) = \frac{e^{-\lambda r(X, Y)}}{2\pi r^3(X, Y)}(\lambda r(X, Y) + 1)(\overrightarrow{YX}, \vec{n}_y) + \frac{h_1(Y)}{2\pi}\frac{e^{-\lambda r(X, Y)}}{r(X, Y)}, \tag{2.3}$$
$$g_e(X, Y, \lambda) = -\frac{e^{-\lambda r(X, Y)}}{2\pi r^3(X, Y)}(\lambda r(X, Y) + 1)(\overrightarrow{YX}, \vec{n}_y) + \frac{h_2(Y)}{2\pi}\frac{e^{-\lambda r(X, Y)}}{r(X, Y)},$$

$R_i(X, Z, \lambda)$ и $R_e(X, Z, \lambda)$ — *ядра резольвент интегральных уравнений, получаемых при решении краевых задач* (2.1), (2.1′) *потенциалами простого* *слоя. Функции* R_i, R_e *непрерывны при* $X \neq Y$, *имеют мажоранты вида* $r^{-1}(X, Y)$ и

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{X\in\Gamma}\int_\Gamma |R_i(X, Z, \lambda)|\,dS_z = \lim_{\lambda\to\infty}\sup_{X\in\Gamma}\int_\Gamma |R_e(X, Z, \lambda)|\,dS_z = 0. \qquad (2.4)$$

Лемма 2. *Для всех точек* Q, *принадлежащих любому замкнутому множеству* $F^+ \subset D^+$, *функцию Грина* $G_i(P, Q, i\lambda)$ *при* $P \in \Gamma$ *можно представить в виде потенциала простого слоя с непрерывной плотностью, т. е.*

$$G_i(P, Q, i\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(P, X)}}{r(P, X)} \nu_i(X, Q, \lambda)\,dS_x \quad (P \in \Gamma,\ Q \in F^+),$$

где функция $\nu_i(X, Q, \lambda)$ *непрерывна при* $X \in \Gamma$ и $Q \in F^+$ *и равномерно стремится к нулю при* $\lambda \to \infty$. *Аналогичные утверждения верны при* $P \in \Gamma$, $Q \in F^- \subset D^-$ *и для* $G_e(P, Q, i\lambda)$ *и* $\nu_e(X, Q, \lambda)$.

Обозначим через $C(\Gamma)$ пространство заданных и непрерывных на поверхности Γ функций с обычным определением нормы

$$\|\varphi\|_C = \max_{X\in\Gamma}|\varphi(X)|.$$

Пусть $e(X)$ заданная на S положительная и непрерывная функция, удовлетворяющая при $P \in S$ равенству

$$\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(P, X)}}{r(P, X)}\,dS_x = \int_S \frac{e^{-\lambda r(P, X)}}{r(P, X)}[1 + e(X)]\,dS_X.$$

Обозначим через $B(S)$ пространство определенных и непрерывных на S функций $\psi(X)$ со следующим определением нормы:

$$\|\psi(X)\|_B = \sup_{X\in S}\frac{|\psi(X)|}{1 + e(X)}.$$

Лемма 3. *Существует линейный оператор* $\hat{S}$, *отображающий пространство* $C(\Gamma)$ *в* $B(S)$, *обладающий такими свойствами:*

1) *Функция*

$$\int_S \frac{e^{-\lambda r(P, X)}}{r(P, X)}\hat{S}[\varphi(X)]\,dS_X$$

непрерывна во всем пространстве и при всех $P \in S$

$$\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(P, X)}}{r(P, X)}\varphi(X)\,dS_X = \int_S \frac{e^{-\lambda r(P, X)}}{r(P, X)}\hat{S}[\varphi(X)]\,dS_X.$$

2) *Норма оператора* $\hat{S}$ *не больше единицы*

$$\|\hat{S}[\varphi]\|_B \leqslant \|\varphi\|_C.$$

3) *Норма оператора* $\hat{S}$ *не больше единицы и в метрике* $L^1(\Gamma)$

$$\int_S |\hat{S}[\varphi(X)]|\,dS_X \leqslant \int_\Gamma |\varphi(X)|\,dS_X.$$

4) *Оператор* $\hat{S}$ *позитивен; т. е. из* $\varphi \geqslant 0$ *следует* $\hat{S}[\varphi] \geqslant 0$. *Заметим, что* $\hat{S}[1] = 1 + e(X)$. *Существование функции* $e(X)$ *и справедливость леммы 3 для случая* $\lambda = 0$ *фактически установлены в работе Заремба* [2]. *Доказательство для любых положительных* λ *вполне аналогично.*

Лемма 4. *Пусть* $\varphi(X) \in B(S)$, *тогда функции*

$$u_i(P) = \int_S G_i(P, X, i\lambda)\varphi(X)\,dS_X, \quad u_e(P) = \int_S G_e(P, X, i\lambda)\varphi(X)\,dS_X,$$

определенные в областях D^+ *и* D^- *соответственно, непрерывны вплоть до* Γ. *Кроме того, во всех внутренних точках* $\sum = \Gamma \setminus S$

$$-\frac{\partial u_e}{\partial n} + h_2 u_e = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial n} + h_1 u_i = 0,$$

а во всех внутренних точках S

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + h_1 u_i = \varphi, \qquad -\frac{\partial u_e}{\partial n} + h_2 u_e = \varphi,$$

причем стремление равномерное на любом замкнутом множестве, находящемся на положительном расстоянии от кривых l_i $(i = 1, 2, \dots p)$ — *общей границы множеств* $\sum$ *и* S.

3. Предположим, что при $k = i\lambda$, $\lambda > 0$ функция Грина $G(P, Q, i\lambda)$ краевой задачи (1.1) существует. Пусть при $P \in S$

$$\left[\frac{\partial G(P, Q, i\lambda)}{\partial n_P}\right]^+ + h_1(P)\,[G(P, Q, i\lambda)]^+ = N(P, Q, i\lambda) = N(P),$$

$$\left[\frac{\partial G(P, Q, i\lambda)}{\partial n_P}\right]^- - h_2(P)\,[G(P, Q, i\lambda)]^- = M(P, Q, i\lambda) = M(P);$$

тогда, если $Q \in D^+$, то, формально используя функции Грина $G_i(P, Q, i\lambda)$ и $G_e(P, Q, i\lambda)$ краевых задач (2.1), (2.1′), получим

$$G(P, Q, i\lambda) = \begin{cases} G_i(P, Q, i\lambda) + \int_S N(X, Q, i\lambda)\,G_i(P, X, i\lambda)\,dS_X & (P \in D^+) \\ -\int_S M(X, Q, i\lambda)\,G_e(P, X, i\lambda)\,dS_X & (P \in D^-). \end{cases} \tag{3.1}$$

Так как $G(P, Q, i\lambda)$ должна удовлетворять в D уравнению Гельмгольца всюду, кроме Q, а множество $S \subset D$, то при всех $P \in S$ должны выполняться равенства

$$G_i(P, Q, i\lambda) + \int_S N(X)\,G_i(P, X, i\lambda)\,dS_X + \int_S M(X)\,G_e(P, X, i\lambda)\,dS_X = 0, \tag{3.2}$$

$$N(P) - M(P) - h_1(P)\left[\int_S N(X)\,G_i(P, X, i\lambda)\,dS_X + G_i(P, Q, i\lambda)\right] + \\ + h_2(P)\int_S M(X)\,G_e(P, X, i\lambda)\,dS_X = 0 \tag{3.2′}$$

для всех $P \in S$. Эти равенства получаются приравниванием значений $G(P, Q, i\lambda)$ и ее нормальной производной на S. Рассмотрим теперь эти равенства как систему уравнений относительно неизвестных функций N и M. Докажем, что эта система имеет решение $N, M \in B(S)$ и что функция, построенная из этого решения по формулам (3.1), действительно является функцией Грина краевой задачи (1.1). Используя результаты леммы 1, перепишем систему (3.2), (3.2′) в виде

$$G_i(P, Q, i\lambda) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(P, X)}}{r(P, X)}\,[N(X) - A_i[N] - A_i'[N]]\,dS_X +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,X)}[M(X)-A_e[M]-A'_e[M]]\,dS_X=0, \tag{3.3}$$

$$N(P)-M(P)-T_i[N]+T_e[M]-h_1(P)G_i(P,Q,i\lambda)=0, \tag{3.3'}$$

где

$$A_i[N]=\int_S g_i(X,\ Y,\ \lambda)N(Y)\,dS_Y\quad(X\in\Gamma), \tag{3.4}$$

$$A'_i[N]=\int_S\Big[\int_\Gamma R_i(X,\ Z,\ \lambda)g_i(Z,\ Y,\ \lambda)\,dS_Z\Big]N(Y)\,dS_Y=$$

$$=\int_\Gamma R_i(X,\ Z,\ \lambda)A_i[N]\,dS_Z\quad(X\in\Gamma), \tag{3.5}$$

$$T_i[N]=h_1(P)\int_S N(X)G_i(P,\ X,\ i\lambda)\,dS_X=$$

$$=\frac{h_1(P)}{2\pi}\int_S\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,X)}[N(X)-A_i[N]-A'_i[N]]\,dS_X\quad(P\in S), \tag{3.6}$$

а соответствующие операторы со значком e получаются заменой i на e и $h_1(P)$ на $h_2(P)$ в формуле для T_e.

Лемма 5. *Интегральные операторы A_i, A_e, A'_i, A'_e осуществляют линейные вполне непрерывные отображения пространства $B(S)$ в $C(\Gamma)$, и их нормы ограничены константой, не зависящей от множества S и стремящейся к нулю при $\lambda\to\infty$.*

Интегральные операторы T_i, T_e осуществляют линейные вполне непрерывные отображения пространства $B(S)$ в $C(S)$, и их нормы ограничены константой, не зависящей от множества S и стремящейся к нулю при $\lambda\to\infty$.

Доказательство. В силу (3.4) и (2.3)

$$A_i[N]=\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{e^{-\lambda r(X,\,Y)}(\lambda r(X,Y)+1)}{r^3(X,Y)}(\overrightarrow{XY},\ \vec{n}_X)N(Y)\,dS_Y+$$

$$+\frac{h_1(X)}{2\pi}\int_S\frac{e^{-\lambda r(X,\,Y)}}{r(X,Y)}N(Y)\,dS_Y\quad(X,\ Y\in\Gamma). \tag{3.7}$$

Докажем сначала, что интегральные операторы в правой части этого равенства переводят ограниченное в $B(S)$ множество в множество равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных на Γ функций. Так как $h_1(X)$ непрерывная функция, то отсюда, очевидно, следует, что оператор A_i вполне непрерывен.

Пусть S_δ часть S, удаленная от границы S (кривых l_i, $i=1,\ 2\ \ldots\ p$) более чем на δ, но так, что каждая точка границы S_δ отстоит от границы S не более чем на 2δ. Так как $\hat{S}[1]\geqslant 0$, то согласно теореме Дини [3]

$$\int_S\hat{S}[1]\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,X)}\,dS_X=\lim_{\delta\to 0}\int_{S_\delta}\hat{S}[1]\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,X)}\,dS_X \tag{3.8}$$

равномерно на всей поверхности Γ.

Для поверхности Ляпунова с показателем Ляпунова, равным единице, имеет место оценка

$$|(\overrightarrow{XY},\ \vec{n}_X)|\leqslant cr^2(X,\ Y)\quad(X,\ Y\in\Gamma), \tag{3.9}$$

и так как $|N(Y)| \leqslant \|N\|_B \hat{S}[1]$, то при $X,\ Y \in \Gamma$

$$\left| \frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r^3(X,Y)} (\lambda r(X,\ Y)+1)(\overrightarrow{XY},\ \vec{n}_X) N(Y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant c(\lambda d+1) \frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r(X,\ Y)} \|N\|_B \hat{S}[1] \tag{3.10}$$

(d — диаметр Γ).

Из (3.8) и (3.10) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$, зависящее лишь от ε, такое, что при всех $\delta < \delta(\varepsilon)$

$$\left| \int\limits_{S/S_\delta} \frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r^3(X,\ Y)} (\lambda r(X,\ Y)+1)(\overrightarrow{XY},\ \vec{n}_X) N(Y)\, dS_Y \right| < \varepsilon \tag{3.11}$$

для каждого ограниченного в $B(S)$ множества функций $N(X)$. Так как функции из ограниченного в $B(S)$ множества равномерно ограничены на S_δ, то интегральный оператор

$$V(N) = \int\limits_{S_\delta} \frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r^3(X,\ Y)} (\lambda r(X,\ Y)+1)(\overrightarrow{XY},\ \vec{n}_X) N(Y)\, dS_Y$$

переводит ограниченное в $B(S)$ множество функций $N(Y)$ в множество равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных на Γ функций. Это следует из того, что ядро

$$\frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r^3(X,\ Y)} (\lambda r(X,Y)+1)(\overrightarrow{XY},\ \vec{n}_X)$$

непрерывно при $X \neq Y$ и согласно (3.9) имеет мажоранту вида $r^{-1}(X,Y)$. Отсюда, учитывая неравенство (3.11), заключаем, что оператор

$$\int\limits_S \frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r^3(X,Y)} (\lambda r(X,Y)+1)(\overrightarrow{XY},\ \vec{n}_X) N(Y)\, dS_Y$$

осуществляет вполне непрерывное отображение $B(S)$ в $C(\Gamma)$. Доказательство для второго слагаемого в (3.7) совершенно аналогично.

Оценим теперь норму оператора A_i. Из (3.9) и (2.3) имеем

$$|g_i(X,Y,\lambda)| \leqslant c_1 \left[\frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r(X,Y)} + \lambda e^{-\lambda r(X,Y)} \right]$$

с константой c_1, не зависящей от X, Y, λ, а тогда, так как для любой функции $N(X) \in B(S)$ $|N(X)| \leqslant \|N\|_B \hat{S}[1]$, получаем

$$|A_i[N]| \leqslant c_1 \left[\lambda \int\limits_S \hat{S}[1]\, e^{-\lambda r(X,Y)} dS_Y + \int\limits_S \hat{S}[1] \frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r(X,Y)} dS_Y \right] \|N\|_B \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \|N\|_B \left[\lambda \int\limits_S \hat{S}[1]\, e^{-\lambda r(X,Y)} dS_Y + \max_{X \in S} \int\limits_S \frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r(X,Y)} \hat{S}[1]\, dS_Y \right]. \tag{3.12}$$

В силу пункта 1 леммы 3

$$\int\limits_S \hat{S}[1] \frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r(X,Y)} dS_Y = \int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r(X,Y)} dS_Y,$$

и так как

$$\int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(X,Y)}}{r(X,Y)} dS_Y \leqslant \frac{c_2}{1+\lambda} \tag{3.13}$$

с константой c_2, не зависящей от S, λ, X, то и

$$\int\limits_S \hat{S}[1] \frac{e^{-\lambda r(X, Y)}}{r(X, Y)} dS_Y \leqslant \frac{c_2}{1+\lambda}. \tag{3.14}$$

В силу пунктов 1, 2 леммы 3 и (3.14)

$$\lambda \int\limits_S \hat{S}[1] e^{-\lambda r(X, Y)} dS_Y = \lambda \int\limits_{\substack{Y \in S \\ r(X, Y) < \lambda^{-\frac{1}{2}}}} \hat{S}[1] e^{-\lambda r(X, Y)} dS_Y + \lambda \int\limits_{\substack{Y \in S \\ r(X, Y) \geqslant \lambda^{-\frac{1}{2}}}} \hat{S}[1] e^{-\lambda r(X, Y)} dS_Y \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^{\frac{1}{2}} \int\limits_S \frac{e^{-\lambda r(X, Y)}}{r(X, Y)} \hat{S}[1] dS_Y + \lambda e^{-\sqrt{\lambda}} \int\limits_S \hat{S}[1] dS_Y \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\lambda} \max_{X \in \Gamma} \int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda r(X, Y)}}{r(X, Y)} dS_Y + \lambda e^{-\sqrt{\lambda}} \int\limits_S \hat{S}[1] dS_Y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2 \sqrt{\lambda}}{1+\lambda} + S(\Gamma) \lambda e^{-\sqrt{\lambda}},$$

где $S(\Gamma)$ площадь поверхности Γ. Подставляя полученные оценки в (3.12), получим

$$|A_i[N]| \leqslant c_1 \left[\frac{c_2 \sqrt{\lambda}}{1+\lambda} + S(\Gamma) \lambda e^{-\sqrt{\lambda}} + \frac{c_2}{1+\lambda}\right] \|N\|_B = c_i(\lambda) \|N\|_B,$$

где $c_i(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. В части, относящейся к A_i, лемма установлена.

Доказательства для всех остальных операторов проводятся аналогично.

В силу лемм 2, 3, 4, 5 первое уравнение системы (3.3), (3.3′) эквивалентно такому

$$\int\limits_S \frac{e^{-\lambda r(P, X)}}{r(P, X)} [\hat{S}[\nu_i] + N(X) - \hat{S}A_i[N] - \hat{S}A_i'[N] + M(X) -$$

$$- \hat{S}A_e[M] - \hat{S}A_e'[M]] dS_X = 0,$$

а тогда система (3.3), (3.3′) эквивалентна следующей:

$$N(X) + M(X) - \hat{S}A_i[N] - \hat{S}A_e[M] - \hat{S}A_i'[N] - \hat{S}A_e'[M] + \hat{S}[\nu_i] = 0, \tag{3.15}$$

$$N(X) - M(X) - T_i[N] + T_e[M] - h_1(X) G_i(X, Q, i\lambda) = 0, \tag{3.15′}$$

где все операторы $\hat{S}A_i$, $\hat{S}A_e$, $\hat{S}A_e'$, T_i, T_e, $\hat{S}A_i'$ осуществляют вполне непрерывные отображения $B(S)$ в себя. Последнее вытекает из лемм 3 и 5, если еще учесть, что $C(S) \subset B(S)$, причем $\|\psi\|_{C(S)} \geqslant \|\psi\|_{B(S)}$.

Лемма 6. *Если $N(X)$, $M(X) \in B(S)$ удовлетворяют системе (3.15), (3.15′), то построенная с помощью $N(X)$, $M(X)$ по формулам (3.1) функция $G(P, Q, i\lambda)$ является функцией Грина краевой задачи (1.1).*

Доказательство. Эта функция, очевидно, удовлетворяет уравнению $\Delta u - \lambda^2 u = 0$ всюду вне Γ и точки Q. При $P = Q$ имеет нужную особенность за счет слагаемого $G_i(P, Q, i\lambda)$. В силу леммы 4 она имеет непрерывные граничные значения на Γ, совпадающие в силу уравнения (3.15) (эквивалентного (3.2)) на S. Из уравнений (3.2), 3.2′) легко получаем для $P \in S$

$$\left[\frac{\partial G(P, Q, i\lambda)}{\partial n_P}\right]^+ = \left[\frac{\partial G(P, Q, i\lambda)}{\partial n_P}\right]^-,$$

откуда сразу следует, что $G(P, Q, i\lambda)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u - \lambda^2 u = 0$ всюду вне Σ и точки Q. Во внутренних точках Σ в силу леммы 4

$$\left[\frac{\partial G(P, Q, i\lambda)}{\partial n_P}\right]^+ + h_1(P)[G(P, Q, i\lambda)]^+ = 0,$$
$$-\left[\frac{\partial G(P, Q, i\lambda)}{\partial n_P}\right]^- + h_2(P)[G(P, Q, i\lambda)]^- = 0.$$

Доказательства неравенства

$$\int_D [(\nabla\gamma)^2 + \gamma^2]\, dV < \infty,$$

где

$$\gamma(P, Q, i\lambda) = G(P, Q, i\lambda) - \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda r(P, Q)}}{r(P, Q)},$$

и справедливость условия 3, входящего в определение функции Грина, проводятся так же, как и в работе [1] (см. доказательства формул (3.10) — (3.12) и далее в работе [1]).

Лемма 7. Система (3.15), (3.15′) *имеет решение* $N(X), M(X) \in B(S)$, *и это решение единственно.*

Доказательство. Система (3.15), (3.15′) Фредгольмова. Поэтому достаточно доказать, что соответствующая однородная система не имеет ненулевых решений в пространстве $B(S)$. Пусть $N^\circ(X)$, $M^\circ(X)$ решение однородной системы (3.15), (3.15′), тогда, повторяя доказательство предыдущей леммы, докажем, что функция

$$u(P) = \begin{cases} \int_S N^\circ(X)\, G_i(P, X, i\lambda)\, dS_X & (P \in D^+), \\ -\int_S M^\circ(X)\, G_e(P, X, i\lambda)\, dS_X & (P \in D^-) \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению $\Delta u - \lambda^2 u = 0$ всюду вне Σ, принадлежит $\widetilde{W}_2^1(D)$ и удовлетворяет однородному третьему краевому условию в смысле требований 2, 3, входящих в определение функции Грина. Используя формулу Грина, получим

$$\int_D [(\nabla u)^2 + \lambda^2 u^2]\, dV = 0$$

т. е. $u \equiv 0$. В силу леммы 4

$$N^\circ(P) = \left[\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right]^+ + h_1(P)[u(P)]^+ \equiv 0,$$
$$M^\circ(P) = \left[\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right]^- - h_2(P)[u(P)]^- \equiv 0.$$

Лемма доказана.

Из последних двух лемм следует, что при $k = i\lambda$ $(\lambda > 0)$ функция Грина краевой задачи (1.1) существует и может быть представлена формулой (3.1), где функции $N, M \in B(S)$ находятся из системы (3.15), (3.15′).

При всех других невещественных значениях k функция Грина $G(P, Q, k)$ может быть найдена из уравнения Гильберта

$$G(P, Q, k) = G(P, Q, i\lambda) + (k^2 + \lambda^2)\int_D G(P, X, i\lambda)\, G(X, Q, k)\, dV_X. \quad (3.16)$$

4. Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.

Рассмотрим последовательность краевых задач (1.1) в областях $D^{(n)}$, границы которых $\Sigma^{(n)} = \Gamma \setminus S^{(n)}$ удовлетворяют условиям теоремы 1. В силу лемм 6, 7 функции Грина $G^{(n)}(P, Q, i\lambda)$ $(\lambda > 0)$ этих краевых задач выражаются через решения $N^{(n)}(X)$, $M^{(n)}(X) \in B(S^{(n)})$ систем (3.15), (3.15′) по формулам (3.1).

Существенное значение в дальнейшем будет иметь то обстоятельство, что при некотором $\lambda_0 > 0$ можно дать оценки для решений уравнений (3.15) (3,15′) при всех $\lambda \geqslant \lambda_0$, не зависящие от n.

Действительно, так как норма $\hat{S}$ не больше единицы, то в силу леммы 5 найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что нормы операторов $\hat{S}A_i$, $\hat{S}A_i'$, $\hat{S}A_e$, $\hat{S}A_e'$, T_i, T_e при $\lambda \geqslant \lambda_0$ будут меньше $\frac{1}{6}$ для всех n. Тогда, если $N^{(n)}(X)$, $M^{(n)}(X) \in B(S^{(n)})$ решения систем (3.15), (3,15′), то, как легко видеть,

$$\begin{gathered}\| N^{(n)} \|_B \leqslant 2 \| \hat{S}[\nu_i] \|_B + 2 \| h_1 G_i \|_B \leqslant \\ \leqslant 2 \max_{X \in \Gamma} \{ | \nu_i(X, Q, \lambda) | + | h_1(X) G_i(X, Q, i\lambda) | \},\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\| M^{(n)} \|_B \leqslant 2 \| \hat{S}[\nu_i] \|_B + 2 \| h_1 G_i \|_B \leqslant \\ \leqslant 2 \max_{X \in \Gamma} \{ | \nu_i(X, Q, \lambda) | + | h_1(X) G_i(X, Q, i\lambda) | \}.\end{gathered} \tag{4.1′}$$

Заметим, что здесь и в дальнейшем мы не ставим индекса n у операторов $\hat{S}$, A_i, A_e, A_i', A_e', T_i, T_e и везде в дальнейшем функции $N^{(n)}(X)$ и $M^{(n)}(X)$, определенные на $S^{(n)}$, считаем равными нулю на $\Sigma^{(n)}$ и тем самым определенными на всей поверхности Γ.

Лемма 8. *Пусть $N^{(n)}(X)$, $M^{(n)}(X) \in B(S^{(n)})$ решение системы (3.15), (3.15′), тогда существует такая не зависящая от множества $S^{(n)}$ константа c, что*

$$\int_{S_i^{(n)}} | N^{(n)}(X) | \, dS_X \leqslant c\, c_i^{(n)}, \quad \int_{S_i^{(n)}} | M^{(n)}(X) | \, dS_X \leqslant c\, c_i^{(n)},$$

где $S_i^{(n)}$ любая связная компонента $S^{(n)}$, а $c_i^{(n)}$ — ее емкость.

Доказательство. Согласно лемме 9 работы [1] на куске $S_i^{(n)}$ найдется точка $P_i^{(n)}$ такая, что

$$\int_{S_i^{(n)}} \frac{| N^{(n)}(X) |}{r(P_i^{(n)}, X)} dS_X = \frac{1}{c_i^{(n)}} \int_{S_i^{(n)}} | N^{(n)}(X) | \, dS_X.$$

Пусть d — диаметр Γ. Тогда в силу п. 1 леммы 3

$$\int_{S_i^{(n)}} \frac{| N^{(n)}(X) |}{r(P_i^{(n)}, X)} dS_X \leqslant e^{\lambda d} \left[\int_{S_i^{(n)}} \frac{| N^{(n)}(X) |}{r(P_i^{(n)}, X)} e^{-\lambda r(P_i^{(n)}, X)} dS_X \right] \leqslant$$

$$\leqslant e^{\lambda d} \| N^{(n)} \|_B \int_{S^{(n)}} \frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)}, X)}}{r(P_i^{(n)}, X)} \hat{S}[1] \, dS_X \leqslant e^{\lambda d} \| N^{(n)} \|_B \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)}, X)}}{r(P_i^{(n)}, X)} dS_X \leqslant$$

$$\leqslant e^{\lambda d} \frac{c_2}{1 + \lambda} \| N^{(n)} \|_B,$$

откуда согласно (4.1) следует утверждение леммы в части, относящейся к $N^{(n)}(X)$. Доказательство для $M^{(n)}(X)$ совершенно аналогично.

Из леммы 8 и условия 3 теоремы 1 имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int\limits_{(\sigma)}|N^{(n)}(X)|\,dS_X\leqslant c\int\limits_{(\sigma)}f(P)\,dS_P,\ \varlimsup_{n\to\infty}\int\limits_{(\sigma)}|M^{(n)}(X)|\,dS_X\leqslant c\int\limits_{(\sigma)}f(P)\,dS_P. \tag{4.2}$$

Неравенства (4.2) показывают, что можно выделить такую подпоследовательность $n_1,\ n_2\ \ldots .\ n_k\ \ldots$, что

$$\lim_{n=n_k\to\infty}\int\limits_{\Gamma}F(X)\,N^{(n)}(X)\,dS_X=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}F(X)\,\overline{N}(X)\,dS_X,\ \lim_{n=n_k\to\infty}\int\limits_{\Gamma}F(X)\,M^{(n)}(X)\,dS_X=\int\limits_{\Gamma}F(X)\,\overline{M}(X)\,dS_X$$

для всякой непрерывной на Γ функции $F(X)$, причем из (4.2) следует ограниченность функций $\overline{N}(X)$ и $\overline{M}(X)$.

Переходя в (3.1) к пределу по подпоследовательности $\{n_k\}$ заключаем, что существует предел

$$\lim_{n=n_k\to\infty}G^{(n)}(P,\ Q,\ i\lambda)=G(P,\ Q,\ i\lambda),$$

где

$$G(P,Q,i\lambda)=\begin{cases}G_i(P,Q,i\lambda)+\int\limits_{\Gamma}G_i(P,X,i\lambda)\,\overline{N}(X)\,dS_X & (P\in D^+)\\ \qquad\qquad -\int\limits_{\Gamma}G_e(P,X,i\lambda)\,\overline{M}(X)\,dS_X & (P\in D^-),\end{cases} \tag{4.3}$$

причем сходимость здесь равномерна на любом множестве точек P, Q, находящемся на положительном расстоянии от Γ (это следует из того, что решение системы (3.15), (3.15′) непрерывно зависит от $Q\in F^+\subset D^+$). При этом в силу леммы 8 и условий 1, 2 теоремы 1

$$\int\limits_{(\sigma)}\overline{N}(X)\,dS_X=\lim_{n=n_k\to\infty}\sum_{(\sigma)}\omega_i^{(n)},$$

$$\int\limits_{(\sigma)}\overline{M}(X)\,dS_X=\lim_{n=n_k\to\infty}\sum_{(\sigma)}\omega_i'^{(n)},$$

где

$$\omega_i^{(n)}=\int\limits_{S_i^{(n)}}N^{(n)}(X)\,dS_X,\quad \omega_i'^{(n)}=\int\limits_{S_i^{(n)}}M^{(n)}(X)\,dS_X. \tag{4.4}$$

Из формул (2.2), (2.2′) и ограниченности $\overline{N}$ и $\overline{M}$ следует, что предельная функция $G(P,\ Q,\ i\lambda)$ имеет непрерывные на Γ граничные значения, которые удовлетворяют такому равенству:

$$[G(P,\ Q,\ i\lambda)]^+-[G(P,\ Q,\ i\lambda)]^-=G_i(P,\ Q,\ i\lambda)+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{-\lambda r(P,X)}}{2\pi r(P,X)}\,[\overline{N}(X)+\overline{M}(X)-A_i[\overline{N}]-A_e[\overline{M}]-A_i'[\overline{N}]-A_e'[\overline{M}]]\,dS_X, \tag{4.5}$$

где операторы A_i, A_e, A_i', A_e' определены формулами (3.4), (3.5) с заменой интегрирования по S интегрированием по всей поверхности Γ.

Обратимся теперь к равенствам (3.3), (3.3′) (напомним, что система (3.3), (3.3′) эквивалентна системе (3.15), (3.15′)).

В силу слабой сходимости $N^{(n_k)}$ к $\overline{N}$ и $M^{(n_k)}$ к $\overline{M}$

$$\lim_{n=n_k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}[A_i'[N^{(n)}]+A_e'[M^{(n)}]]\,dS_X=\lim_{n=n_k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}N^{(n)}(Y)\times$$
$$\times\left\{\int_{\Gamma}\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}\left[\int_{\Gamma}R_i(X,\,Z,\,\lambda)\,g_i(Z,\,Y,\,\lambda)\,dS_Z\right]dS_X\right\}dS_y+$$
$$+\lim_{n=n_k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}M^{(n)}(Y)\left\{\int_{\Gamma}\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}\left[\int_{\Gamma}R_e(X,\,Z,\,\lambda)\,g_e(Z,\,Y,\,\lambda)\,dS_Z\right]dS_X\right\}dS_Y=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}[A_i'[\overline{N}]+A_e'[\overline{M}]]\,dS_X,$$

ибо функции, стоящие в фигурных скобках, непрерывны и не зависят от n.

Если $P\in\sigma(P_0,\ \rho)$ — части Γ, вырезаемой из Γ сферой радиуса ρ с центром в $P_0\in\Gamma$, то

$$\lim_{n=n_k\to\infty}\int_{\Gamma\setminus\sigma(P_0,\,2\rho)}\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}[N^{(n)}(X)+M^{(n)}(X)-A_i[N^{(n)}]-A_e[M^{(n)}]]\,dS_X=$$
$$=\int_{\Gamma\setminus\sigma(P_0,\,2\rho)}\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}[\overline{N}(X)+\overline{M}(X)-A_i[\overline{N}]-A_e[\overline{M}]]\,dS_X,$$

причем сходимость равномерная по всем точкам $P\in\sigma(P_0,\ \rho)$.

Теперь первое из равенств (3.3), (3.3′) при всех $P\in\sigma(P_0,\ \rho)\cap S^{(n)}$ можем записать в виде

$$G_i(P,\ Q,\ i\lambda)+\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma(P_0,\,2\rho)}\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}[N^{(n)}(X)+M^{(n)}(X)-A_i[N^{(n)}]-$$
$$-A_e[M^{(n)}]]\,dS_X+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma\setminus\sigma(P_0,\,2\rho)}[\overline{N}(X)+\overline{M}(X)-A_i[\overline{N}]-$$
$$-A_e[\overline{M}]]\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}\,dS_X-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}[A_i'[\overline{N}]+A_e'[\overline{M}]]\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}dS_X=\varepsilon^{(n)}(P),$$

где равномерно по всем $P\in\sigma(P_0,\ \rho)$

$$\overline{\lim_{n=n_k\to\infty}}\,|\varepsilon^{(n)}(P)|=0. \tag{4.6}$$

Учитывая (4.5), это равенство можно переписать так:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma(P_0,\,2\rho)}[N^{(n)}(X)+M^{(n)}(X)-A_i[N^{(n)}]-A_e[M^{(n)}]]\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}\,dS_X=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma(P_0,\,2\rho)}[\overline{N}(X)+\overline{M}(X)-A_i[\overline{N}]-A_e[\overline{M}]]\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{r(P,\,X)}\,dS_X+$$
$$+[G(P,\ Q,\ i\lambda)]^{-}-[G(P,\ Q,\ i\lambda)]^{+}+\varepsilon^{(n)}(P). \tag{4.7}$$

Обозначим

$$\alpha^{(n)}(P)=\int_{\sigma(P_0,\,2\rho)}\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{2r(P,\,X)}A_i[N^{(n)}]\,dS_X,$$
$$\alpha_1^{(n)}(P)=\int_{\sigma(P_0,\,2\rho)}\frac{e^{-\lambda r(P,\,X)}}{2r(P,\,X)}A_e[M^{(n)}]\,dS_X. \tag{4.8}$$

В силу леммы 5 и оценок (4.1), (4.1′) $|A_i[N^{(n)}]|<c$, $|A_e[M^{(n)}]|<c$, где c не зависит от n и X. Поэтому

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\alpha^{(n)}|\leqslant\varepsilon(\rho),\ \varlimsup_{n\to\infty}|\alpha_1^{(n)}|\leqslant\varepsilon(\rho),\quad \varepsilon(\rho)\underset{\rho\to 0}{\to}0, \tag{4.9}$$

где $\varepsilon(\rho)$ зависит лишь от ρ.

Согласно лемме 9 работы [1] на $S_i^{(n)}$ найдется точка $P_i^{(n)}$, такая, что

$$\int\limits_{S_i^{(n)}}\frac{N^{(n)}(X)}{r(P_i^{(n)},X)}\,dS_X=\frac{\omega_i^{(n)}}{c_i^{(n)}},\qquad \omega_i^{(n)}=\int\limits_{S_i^{(n)}}N^{(n)}(X)\,dS_X.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\sigma(P_0,2\rho)}\frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},X)}}{r(P_i^{(n)},X)}N^{(n)}(X)\,dS_X=\frac{\omega_i^{(n)}}{c_i^{(n)}}+\beta_i^{(n)}, \tag{4.10}$$

где

$$\beta_i^{(n)}=\int\limits_{S_i^{(n)}}\frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},X)}-1}{r(P_i^{(n)},X)}N^{(n)}(X)\,dS_X+\int\limits_{\sigma(P_0,2\rho)\setminus S_i^{(n)}}\frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},X)}}{r(P_i^{(n)},X)}N^{(n)}(X)\,dS_X.$$

Так как при $n\to\infty$ диаметры кусков $S_i^{(n)}$ равномерно стремятся к нулю, то

$$\left|\int\limits_{S_i^{(n)}}\frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},X)}-1}{r(P_i^{(n)},X)}N^{(n)}(X)\,dS_X\right|\leqslant\lambda\int\limits_{S_i^{(n)}}|N^{(n)}(X)|\,dS_X,$$

и так как

$$\left|\int\limits_{S_j^{(n)}}\frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},X)}}{r(P_i^{(n)},X)}N^{(n)}(X)\,dS_X\right|\leqslant\frac{1}{r_{ij}^{(n)}}\int\limits_{S_j^{(n)}}|N^{(n)}(X)|\,dS_X,$$

то, воспользовавшись результатами леммы 8, получим

$$|\beta_i^{(n)}|\leqslant c\Big(\sum_{\sigma(P_0,2\rho)}c_i^{(n)}+\sum_{j\neq i,\ r_{ij}^{(n)}<2\rho}(r_{ij}^{(n)})^{-1}c_j^{(n)}\Big),$$

откуда согласно условиям 1,2 теоремы 1 следует, что равномерно по i

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\beta_i^{(n)}|\leqslant c\delta(2\rho). \tag{4.11}$$

Из уравнения (3.15′) следует

$$\int\limits_{S_i^{(n)}}\frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},X)}}{r(P_i^{(n)},X)}M^{(n)}(X)\,dS_X=\int\limits_{S_i^{(n)}}\frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},X)}}{r(P_i^{(n)},X)}N^{(n)}(X)\,dS_X+\gamma_i^{(n)},$$

причем в силу леммы 5 и оценок (4.1), (4.1′)

$$|\gamma_i^{(n)}|=\left|\int\limits_{S_i^{(n)}}\frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},X)}}{r(P_i^{(n)},X)}[T_e[M^{(n)}]-T_i[N^{(n)}]+h_1G_i]\,dS_X\right|\leqslant c\int\limits_{S_i^{(n)}}\frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},X)}}{r(P_i^{(n)},X)}dS_X$$

с константой c, не зависящей от i, n, $P_i^{(n)}$. В силу условия 1 теоремы 1 равномерно по i

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\gamma_i^{(n)}| = 0. \tag{4.12}$$

Теперь можем записать

$$\int\limits_{\sigma(P_0,\,2\rho)} \frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},\,X)}}{r(P_i^{(n)},\,X)} M^{(n)}(X)\,dS_X = \frac{\omega_i^{(n)}}{c_i^{(n)}} + \beta_i'^{(n)}, \tag{4.13}$$

где

$$\beta_i'^{(n)} = \gamma_i^{(n)} + \int\limits_{S_i^{(n)}} N^{(n)}(X) \frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},\,X)} - 1}{r(P_i^{(n)},\,X)}\,dS_X +$$

$$+ \int\limits_{\sigma(P_0,\,2\rho)\setminus S_i^{(n)}} \frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},\,X)}}{r(P_i^{(n)},\,X)} M^{(n)}(X)\,dS_X.$$

Поступая как и при доказательстве (4.11) и учитывая (4.12), получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta_i'^{(n)}| \leqslant c\,\delta(2\rho). \tag{4.14}$$

Полагая в (4.7) $P = P_i^{(n)}$ и используя (4.10), (4.13), (4.8), получим

$$\frac{1}{\pi}\frac{\omega_i^{(n)}}{c_i^{(n)}} = -\frac{1}{2\pi}\beta_i^{(n)} - \frac{1}{2\pi}\beta_i'^{(n)} + \frac{1}{\pi}\alpha^{(n)} + \frac{1}{\pi}\alpha_1^{(n)} + \varepsilon^{(n)}(P_i^{(n)}) + [G(P_i^{(n)}, Q, i\lambda)]^- -$$

$$-[G(P_i^{(n)}, Q, i\lambda)]^+ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma(P_0,\,2\rho)} [\overline{N}(X) + \overline{M}(X) - A_i[\overline{N}] - A_e[\overline{M}]] \frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},\,X)}}{r(P_i^{(n)},\,X)}\,dS_X,$$

или

$$\frac{\omega_i^{(n)}}{c_i^{(n)}} = \pi\{[G(P_0, Q, i\lambda)]^- - [G(P_0, Q, i\lambda)]^+\} + \pi\varepsilon^{(n)}(P_i^{(n)}) + \alpha^{(n)}(P_i^{(n)}) +$$

$$+ \alpha_1^{(n)}(P_i^{(n)}) - \frac{1}{2}\beta_i^{(n)} - \frac{1}{2}\beta_i'^{(n)} + h_i^{(n)}(\rho), \tag{4.15}$$

где

$$h_i^{(n)}(\rho) = \frac{1}{2}\int\limits_{\sigma(P_0,\,2\rho)} [\overline{N}(X) + \overline{M}(X) - A_i[\overline{N}] - A_e[\overline{M}]] \frac{e^{-\lambda r(P_i^{(n)},\,X)}}{r(P_i^{(n)},\,X)}\,dS_X +$$

$$+ \pi\{[G(P_i^{(n)}, Q, i\lambda)]^- - [G(P_0, Q, i\lambda)]^-\} + \pi\{[G(P_0, Q, i\lambda)]^+ -$$

$$- [G(P_i^{(n)}, Q, i\lambda)]^+\}.$$

Из ограниченности $\overline{N}$ и $\overline{M}$ и непрерывности $[G(P, Q, i\lambda)]^+$ и $[G(P, Q, i\lambda)]^-$ следует, что

$$h(\rho) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_i |h_i^{(n)}(\rho)| \quad (P_i^{(n)} \in S^{(n)} \cap \sigma(P_0, \rho)) \tag{4.16}$$

стремится к нулю при $\rho \to 0$.

Из (4.15) следует, что

$$\Big|\sum_{\sigma(P_0,\,\rho)} \omega_i^{(n)} - \pi\{[G(P_0,\ Q,\ i\lambda)]^- - [G(P_0,\ Q,\ i\lambda)]^+\} \sum_{\sigma(P_0,\,\rho)} c_i^{(n)}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\sigma(P_0,\,\rho)} \left| \pi\varepsilon^{(n)}(P_i^{(n)}) + \alpha^{(n)}(P_i^{(n)}) + \alpha_1^{(n)}(P_i^{(n)}) - \frac{1}{2}\beta_i^{(n)} - \frac{1}{2}\beta_i^{\prime(n)} + h_i^{(n)}(\rho)\right| c_i^{(n)}.$$

Отсюда при $n = n_k \to \infty$, учитывая условие 3 теоремы 1 и формулу (4.4), получим согласно (4.6), (4.9), (4.11), (4.14), (4.16)

$$\Big|\int_{\sigma(P_0,\,\rho)} \overline{N}(X)\,dS_X - \pi\{[G(P_0,\ Q,\ i\lambda)]^- - [G(P_0,\ Q,\ i\lambda)]^+\} \int_{\sigma(P_0,\,\rho)} f(X)\,dS_X \leqslant$$
$$\leqslant [2\varepsilon(\rho) + c\delta(2\rho) + h(\rho)] \int_{\sigma(P_0,\,\rho)} f(X)\,dS_X.$$

Поделив обе части этого неравенства на площадь куска $\sigma(P_0,\ \rho)$ и устремив затем ρ к нулю, будем иметь

$$\overline{N}(P_0) = \pi\{[G(P_0, Q, i\lambda)]^- - [G(P_0, Q, i\lambda)]^+\} f(P_0). \qquad (4.17)$$

Так как $[G(P_0,\ Q,\ i\lambda)]^+$, $[G(P_0,\ Q,\ i\lambda)]^-$, $f(P)$ непрерывны на Γ, то и $\overline{N}(P_0)$ будет непрерывной на Γ функцией.

Согласно лемме 9 работы [1] на $S_i^{(n)}$ найдется точка $P_i^{\prime(n)}$ такая, что

$$\int_{S_i^{(n)}} \frac{M^{(n)}X}{r(P_i^{\prime(n)}, X)}\,dS_X = \frac{1}{c_i^{(n)}} \int_{S_i^{(n)}} M^{(n)}(X)\,dS_X.$$

Заменив точку $P_i^{(n)}$ на точку $P_i^{\prime(n)}$ и проводя те же рассуждения, что и при доказательстве (4.17), получим

$$\overline{M}(P_0) = \pi\{[G(P_0, Q, i\lambda)]^- - [G(P_0,\ Q,\ i\lambda)]^+\} f(P_0). \qquad (4.18)$$

Из (4.3), непрерывности функций $\overline{N}(X)$ и $\overline{M}(X)$ и свойств функций $G_i(P,\ Q,\ i\lambda)$ и $G_e(P,\ Q,\ i\lambda)$ в силу (4.17), (4.18) следует

$$\left[\frac{\partial G(P_0,\ Q,\ i\lambda)}{\partial n_{P_0}}\right]^+ + h_1(P_0)[G(P_0,\ Q,\ i\lambda)]^+ = \overline{N}(P_0) = \left[\frac{\partial G(P_0,\ Q,\ i\lambda)}{\partial n_{P_0}}\right]^- -$$
$$- h_2(P_0)[G(P_0,\ Q,\ i\lambda)]^- =$$
$$= \overline{M}(P_0) = \pi f(P_0)\{[G(P_0,\ Q,\ i\lambda)]^- - [G(P_0,Q,i\lambda)]^+\}. \qquad (4.19)$$

Так как P_0 — произвольная точка Γ, то функция $G(P,\ Q,\ i\lambda)$ удовлетворяет граничным условиям (1.3′) на поверхности Γ, а в области $D^+ \cup D^-$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\Delta u - \lambda^2 u = -\delta(P,\ Q),$$

что и следует из (4.3) и (4.19).

Таким образом, мы доказали, что из последовательности (и, очевидно, из любой ее подпоследовательности) $G^n(P,\ Q,\ i\lambda)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к функции Грина задачи (1.3), (1.3′). Так как функция Грина этой краевой задачи единственна, то и вся последовательность сходится к ней.

Теорема доказана для $k = i\lambda\ (\lambda \geqslant \lambda_0)$.

При всех других невещественных k справедливость теоремы можно установить, как и в работе [4], с помощью тождества (3.16) (см. стр. 469 работы [4]).

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. В. А. Марченко за руководство данной работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, Г. В. Сузиков. Вторая краевая задача в областях со сложной границей. «Матем. сб.», т. 69 (111) : 1, 1966.

2. С. Заремба. Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа. «Усп. матем. наук», вып. 3—4 (13—14) (1946), 125—146.

3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV, изд. 5. Физматгиз, М., 1958.

4. В. А. Марченко и Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. «Матем. сб.», 65 (107) : 3 (1964), 458—472.