НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПЕКТРОВ ПЕРВОЙ И ТРЕТЬЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

С. И. Гринберг

ВВЕДЕНИЕ

Пусть V — конечная открытая область в трехмерном пространстве, S — ее граница. Рассмотрим операцию $-\Delta u + qu$ с вещественным потенциалом $q \in \mathrm{Lip}\, a\, (0 < a \leqslant 1)$ в $\bar{V}$; пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ $(\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \mu_1 \leqslant \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots)$ — собственные значения операторов, порожденных этой операцией при краевых условиях $u|_S = 0$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_S = 0$ соответственно, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная функции u в направлении внешней нормали к поверхности S, а σ — непрерывная и вещественная функция [1].

С помощью метода, близкого к методу Т. Карлемана (см. [1, 2]), в работе устанавливаются асимптотические формулы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k + p)^2} = \frac{v}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{s}{16\pi} \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (p \to +\infty),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_k + p)^2} = \frac{v}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{s}{16\pi} \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (p \to +\infty),$$

где v и s — объем области V и площадь поверхности S, откуда с помощью тауберовой теоремы Харди—Литтлвуда затем выводятся соотношения

$$\sum_{\lambda_k \leqslant x} (\lambda_k - \mu_k) \sim \frac{s}{16\pi} x^2, \quad \sum_{\mu_k \leqslant x} (\lambda_k - \mu_k) \sim \frac{s}{16\pi} x^2, \quad (x \to +\infty).$$

Эти соотношения можно рассматривать как обобщение на трехмерный случай формулы И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана для разности следов двух операторов Штурма—Лиувилля (см. [3]).

О поверхности S везде в дальнейшем будем предполагать, что:

---

[1] Указанные ограничения на функции q и σ будем предполагать выполненными постоянно.

а) через любую точку P на ней можно провести две сферы одного и того же, не зависящего от P, радиуса $l > 0$, одна из которых находится полностью внутри $\bar{V}$, а другая — полностью вне V;

б) конечным числом кусочно гладких кривых она разбивается на части $S^{(1)}, \ldots, S^{(\nu)}$ $(\nu \geqslant 1)$, каждая из которых допускает дважды непрерывно дифференцируемую параметризацию.

Обозначения, введенные выше, будут сохранять тот же смысл и в дальнейшем, на протяжении всей статьи.

Автор глубоко признателен В. А. Марченко за внимание, проявленное к этой работе.

§ 1. ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ЧАСТЕЙ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Пусть

$$G_i(M, M_1, -\varkappa^2) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\varkappa r_{MM_1}}}{r_{MM_1}} - g_i(M, M_1, \varkappa) \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

(r_{MM_1} — расстояние между точками M и M_1) — функции Грина выражения $\Delta u - \varkappa^2 u$ $(\varkappa > 0)$ для области V при краевых условиях $u|_S = 0$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_S = 0$ соответственно. В настоящем параграфе получим оценки производных $[g_i(M, M, \varkappa)]'_\varkappa$ $(i = 1, 2)$ при больших значениях $\varkappa$ для точек M, расположенных как вблизи границы S, так и сравнительно далеко от нее.

Введем некоторые обозначения, которыми будем часто пользоваться.

Рассмотрим прямоугольную пространственную систему координат xyz с началом в произвольной точке $N \in S$, и пусть ось аппликат совпадает с нормалью к S в точке N. Через Ω_N обозначим ту часть поверхности S, которая лежит в области $|z| \leqslant \sqrt{l^2 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2} l\right)^2$.

Пусть, далее, $\boldsymbol{n}_N$ — орт внешней нормали к поверхности S в точке N, $\boldsymbol{r}_{MM_1}$ — вектор с началом и концом в точках M и M_1, и $r_{MM_1} = |\boldsymbol{r}_{MM_1}|$.

1.1. Вспомогательные утверждения геометрического характера

Рассмотрим несколько простых утверждений; доказательства мы либо опустим, либо приведем только их идеи.

Лемма 1.1. *Пусть N и P — произвольные точки, $N \in S$, $P \in \Omega_N$, θ — угол между ортами $\boldsymbol{n}_N$ и $\boldsymbol{n}_P$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, ρ — расстояние от точки P до нормали (к поверхности S) в точке N. Тогда*

$$\cos\theta > \frac{1}{2}, \quad \sin\theta \leqslant \frac{2\rho}{l}.$$

Для доказательства достаточно убедиться в том, что имеют место более точные неравенства

$$\cos\theta \geqslant \frac{2\sqrt{l^2 - \rho^2} - l}{2l - \sqrt{l^2 - \rho^2}}, \quad \sin\theta \leqslant \frac{\sqrt{3}\rho}{2l - \sqrt{l^2 - \rho^2}}.$$

Установить же первое из этих неравенств (а из него следует и второе) нетрудно методом от противного: если допустить, что оно не выполняется, то можно будет указать две сферы радиуса l, одна из которых касается поверхности S изнутри, а вторая — извне, расстояние между центрами которых меньше $2l$, что, однако, противоречит первому из ограничений, налагаемых на поверхность S.

Следствие 1.1. *Пусть M — произвольная точка области $\overline{V}$, N — ближайшая к M точка поверхности S, $\zeta = r_{MN}$, ρ — расстояние от произвольной точки $P \in \Omega_N$ до нормали к поверхности S в точке N. Тогда*

$$|\boldsymbol{r}_{MP}\boldsymbol{n}_P| \leqslant \zeta + \frac{5}{l}\rho^2.$$

Лемма 1.2. *Пусть точки M, N и P — те же, что и в следствии 1.1, P_1 — проекция точки P на касательную плоскость к S в точке N. Тогда*

$$r_{MP} \geqslant \frac{1}{2} r_{MP_1}.$$

1.2. Оценки резольвент некоторых ядер. Интегральные представления производных регулярных частей функций Грина

Лемма 1.3. *Пусть P, Q — произвольные несовпадающие точки поверхности S, $\frac{\partial}{\partial n_P}$ — символ дифференцирования в сторону внешней нормали к S в точке P, $\varkappa$ — постоянная,*

$$H_1(P, Q, \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{e^{-\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}}, \quad H_2(P, Q, \varkappa) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n_P} + \sigma(P)\right]\frac{e^{-\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}}, \tag{1.2}$$
$$R_i(P, Q, \varkappa) = R_i(P, Q, \varkappa; \lambda)|_{\lambda=1} \quad (i = 1,2),$$

где $R_i(P, Q, \varkappa; \lambda)$ — резольвента ядра $H_i(P, Q, \varkappa)$ $(i = 1,2)$.

Существует число $\varkappa_0 > 0$ такое, что при всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$

$$|R_i(P, Q, \varkappa)| < c_i\frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}}, \quad |[R_i(P, Q, \varkappa)]'_\varkappa| < c_i e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}} \quad (i = 1, 2),$$

где c_1 и c_2 — величины, не зависящие от точек P, Q и параметра $\varkappa$, α — какая угодно постоянная, $\alpha < 1$.

Доказательство. Принимая во внимание ограниченность выражения $\boldsymbol{r}_{QP}\boldsymbol{n}_P r_{QP}^{-2}$ для любых $P, Q \in S$ (при $P \in \Omega_Q$ она вытекает из следствия 1.1), получаем для ядра

$$H_1^{(1)}(P, Q, \varkappa) \equiv H_1(P, Q, \varkappa) = -\frac{1}{2\pi}\frac{(1 + \varkappa r_{PQ})e^{-\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}^3}\boldsymbol{r}_{QP}\boldsymbol{n}_P$$

и его производной

$$[H_1(P, Q, \varkappa)]'_\varkappa = \frac{1}{2\pi}\varkappa r_{PQ}^{-1}e^{-\varkappa r_{PQ}}\boldsymbol{r}_{QP}\boldsymbol{n}_Q$$

следующие оценки:

$$|H_1(P, Q, \varkappa)| < a_1\frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}}, \quad |H_1(P, Q, \varkappa)| < \frac{a_1}{\varkappa^\beta}\frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}^{1+\beta}}, \tag{1.3}$$

$$|[H_1(P, Q, \varkappa)]'_\varkappa| < a_1 e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}, \quad |[H_1(P, Q, \varkappa)]'_\varkappa| < \frac{a_1 e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{\varkappa^\beta r_{PQ}^\beta}, \tag{1.4}$$

где α и β — постоянные, $\alpha < 1$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$, и a_1 — некоторая величина, не зависящая от P, Q и $\varkappa$.

Используя эти оценки и неравенство $r_{PQ} \leqslant r_{PP_1} + r_{P_1Q}$, можно доказать, что

$$|H_1^{(2)}(P, Q, \varkappa)| < \frac{a_1^2 b_1}{\varkappa^\beta} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}^\beta}, \tag{1.5}$$

$$|H_1^{(n)}(P, Q, \varkappa)| < \frac{a_1^n b_1^{n-1}}{\varkappa^{(n-1)\beta}} e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}} \quad (n \geqslant 3), \tag{1.6}$$

и

$$|[H_1^{(n)}(P, Q, \varkappa)]'_\varkappa| < \frac{n a_1^n b_1^{n-1}}{\varkappa^{(n-1)\beta}} e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}} \quad (n \geqslant 2), \tag{1.7}$$

где b_1 — некоторая постоянная.

Из соотношений (1.3—1.7) вытекает, что при всех $\varkappa \geqslant \varkappa_1 > (a_1 b_1)^{\frac{1}{\beta}}$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_1^{(n)}(P, Q, \varkappa)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [H_1^{(n)}(P, Q, \varkappa)]'_\varkappa$ соответственно мажорируются сходящимися рядами

$$\left(a_1 + \frac{a_1^2 b_1}{\varkappa_1^\beta} r_{PQ}^{1-\beta} + r_{PQ} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_1^n b_1^{n-1}}{\varkappa_1^{(n-1)\beta}}\right) \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_1^n b_1^{n-1}}{\varkappa_1^{(n-1)\beta}} e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}},$$

суммы которых не превосходят $\frac{c_1 e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}}$ и $c_1 e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}$, где c_1 — некоторая постоянная (относительно P, Q и $\varkappa$).

Следовательно, для любых $P, Q \in S$ $(P \neq Q)$

$$|R_1(P, Q, \varkappa)| < c_1 \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}}, \quad |[R_1(P, Q, \varkappa)]'_\varkappa| < c_1 e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}} \ (\varkappa \geqslant \varkappa_1). \tag{1.8}$$

Точно так же можно доказать, что при всех $P, Q \in S$ $(P \neq Q)$

$$|R_2(P, Q, \varkappa)| < c_2 \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}}, \quad |[R_2(P, Q, \varkappa)]'_\varkappa| < c_2 e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}} \ (\varkappa \geqslant \varkappa_2), \tag{1.9}$$

где $\varkappa_2$ — некоторая положительная постоянная, и c_2 — величина, не зависящая от P, Q и $\varkappa$.

Для получения требуемого результата достаточно неравенства (1.8) и (1.9) рассматривать лишь при $\varkappa \geqslant \varkappa_0 = \max\{\varkappa_1, \varkappa_2\}$.

Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть функции $R_i(P, Q, \varkappa)$ $(i = 1, 2)$ и число $\varkappa_0$ — те же, что и в лемме 1.3.*

При всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$ производные $[g_i(M, M, \varkappa)]'_\varkappa$ $(i = 1, 2)$ допускают следующие интегральные представления:

$$[g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa = -\frac{1}{8\pi^2} \int_S \frac{(1 + 2\varkappa r_{MP}) e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}^3} \boldsymbol{r}_{MP} \boldsymbol{n}_P ds_P - T_1(M, \varkappa),$$

$$[g_2(M, M, \varkappa)]'_\varkappa = \frac{1}{8\pi^2} \int_S \frac{(1 + 2\varkappa r_{MP}) e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}^3} \boldsymbol{r}_{MP} \boldsymbol{n}_P ds_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_S \sigma(P)\frac{e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}}\,ds_P + T_2(M, \varkappa),$$

где

$$T_1(M, \varkappa)=\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{SS}\left[\frac{e^{-\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}}R_1(P, Q, \varkappa)\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{e^{-\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}}\right)\right]'_\varkappa ds_P ds_Q$$

и

$$T_2(M, \varkappa)=\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{SS}\left[\frac{e^{-\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}}R_2(P, Q, \varkappa)\left(\frac{\partial}{\partial n_Q}+\sigma(Q)\right)\frac{e^{-\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}}\right]'_\varkappa ds_P ds_Q$$

(ds_P — элемент площади поверхности, соответствующий точке P).

Доказательство. Выведем лишь первую из формул.

Получим сначала интегральное представление функции $g_1(M, M_1, \varkappa)$. С этой целью будем ее искать в виде потенциала двойного слоя (для выражения $\Delta u - \varkappa^2 u$):

$$g_1(M, M_1, \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{e^{-\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}}\right) m_1(Q, M_1, \varkappa)\,ds_Q, \tag{1.10}$$

где $m_1(Q, M_1, \varkappa)$ — подлежащая определению плотность слоя.

Если в обеих частях предыдущего равенства устремим M к произвольной точке границы S, учтем, что

$$\lim_{M\to Q} g_1(M, M_1, \varkappa) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\varkappa r_{M_1Q}}}{r_{M_1Q}} \quad (Q\in S),$$

и воспользуемся теоремой о скачке потенциала двойного слоя, то придем к интегральному уравнению

$$m_1(Q, M_1, \varkappa) = \int\limits_S H_1(P, Q, \varkappa)\, m_1(P, M_1, \varkappa)\,ds_P - \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\varkappa r_{M_1Q}}}{r_{M_1Q}}$$

с ядром $H_1(P, Q, \varkappa)$, определяемым первой из формул (1.2); решив это уравнение, находим:

$$m_1(Q, M_1, \varkappa) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\varkappa r_{M_1Q}}}{r_{M_1Q}} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S R_1(P, Q, \varkappa)\frac{e^{-\varkappa r_{M_1P}}}{r_{M_1P}}\,ds_P.$$

Подстановка в (1.10) полученного выражения для функции $m_1(Q, M_1, \varkappa)$ дает:

$$g_1(M, M_1, \varkappa) = -\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{e^{-\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}}\right)\frac{e^{-\varkappa r_{M_1Q}}}{r_{M_1Q}}\,ds_Q -$$

$$-\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{SS}\frac{e^{-\varkappa r_{M_1P}}}{r_{M_1P}}R_1(P, Q, \varkappa)\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{e^{-\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}}\right)ds_P ds_Q.$$

Полагая в этом равенстве $M_1 = M$ и взяв затем производные обеих его частей по $\varkappa$ (при $\varkappa \geqslant \varkappa_0$), получим искомое представление функции $[g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa$. Законность дифференцирования второго слагаемого (в правой части) под знаком интеграла следует из равномерной сходимости при $\varkappa \geqslant \varkappa_0$ *интеграла* $T_1(M, \varkappa)$, *вытекающей из оценок, получаемых ниже,* в лемме 1.7.

Лемма доказана.

1.3. Оценки интегралов, входящих в формулы для производных $[g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa$ и $[g_2(M, M, \varkappa)]'_\varkappa$.

Здесь и в дальнейшем буквой ζ будем обозначать расстояние от произвольной точки $M \in V$ до ближайшей к ней точки $N \in S$.

Лемма 1.5. *Если* $0 < \zeta \leqslant \frac{1}{2} l$, *то*

$$\left| \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_S \frac{(1 + 2\varkappa r_{MP}) e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}^3} \boldsymbol{r}_{MP} \boldsymbol{n}_P ds_P - \frac{1}{4\pi} e^{-2\varkappa\zeta} \right| < A_1 \frac{e^{-2\alpha\varkappa\zeta}}{\varkappa},$$

а если $\zeta > \frac{1}{2} l$, *то*

$$\left| \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_S \frac{(1 + 2\varkappa r_{MP}) e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}^3} \boldsymbol{r}_{MP} \boldsymbol{n}_P ds_P \right| < A_2 e^{-\alpha\varkappa l},$$

где A_1 и A_2 — величины, не зависящие от M и $\varkappa$, α — произвольная постоянная, $\alpha < 1$.

Доказательство. Допустим сначала, что $0 < \zeta \leqslant \frac{1}{2} l$.

Пусть I_N и E_N — сферы радиуса l, касающиеся поверхности S в точке N изнутри и извне. Заметим, что

$$\int\limits_{I_N} \frac{(1 + 2\varkappa r_{MP}) e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}^3} \boldsymbol{r}_{MP} \boldsymbol{n}_P \, ds_P > \int\limits_S \cdots ds_P > \int\limits_{E_N} \cdots ds_P, \qquad (1.11)$$

где символ $\boldsymbol{n}_P$ в интегралах по сферам I_N и E_N соответственно означает орт внешней и внутренней нормали к этим поверхностям (в переменной точке P). Для вывода неравенств (1.11) достаточно интегралы по поверхностям I_N, S и E_N преобразовать с помощью теоремы Гаусса — Остроградского и сравнить соответствующие тройные интегралы, учитывая при этом, что

$$\operatorname{div} \frac{(1 + 2\varkappa r_{MP}) e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}^3} \boldsymbol{r}_{MP} = -\frac{4\varkappa^2}{r_{MP}} e^{-2\varkappa r_{MP}} < 0.$$

Выполняя вычисления в сферических координатах, нетрудно установить, что

$$\int\limits_{I_N} \frac{(1 + 2\varkappa r_{MP}) e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}^3} \boldsymbol{r}_{MP} \boldsymbol{n}_P \, ds_P = \frac{2\pi l}{l - \zeta} \left(1 + \frac{1}{2l\varkappa}\right) [e^{-2\varkappa\zeta} - e^{-2\varkappa(2l - \zeta)}]$$

и

$$\int\limits_{E_N} \frac{(1 + 2\varkappa r_{MP}) e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}^3} \boldsymbol{r}_{MP} \boldsymbol{n}_P ds_P = \frac{2\pi l}{l + \zeta} \left[e^{-2\varkappa\zeta} - \frac{1}{2\varkappa l} e^{-2\varkappa\zeta} + e^{-2\varkappa(2l + \zeta)} \left(1 + \frac{1}{2\varkappa l}\right) \right].$$

Пользуясь дальше соотношением

$$(1 + x) e^{-(1 - \alpha) x} \leqslant \frac{e^{-\alpha}}{1 - \alpha} \quad (0 \leqslant x < \infty), \qquad (1.12)$$

находим:

$$\int\limits_{I_N} \frac{(1+2\varkappa r_{MP})\, e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}^3} \boldsymbol{r}_{MP}\boldsymbol{n}_P ds_P < 2\pi e^{-2\varkappa\zeta} + \frac{2\pi e^{-\alpha}}{l(1-\alpha)} \cdot \frac{e^{-2\alpha\varkappa\zeta}}{\varkappa},$$

$$\int\limits_{E_N} \frac{(1+2\varkappa r_{MP})\, e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}^3} \boldsymbol{r}_{MP}\boldsymbol{n}_P\, ds_P > 2\pi e^{-2\varkappa\zeta} - \frac{2\pi e^{-\alpha}}{l(1-\alpha)} \cdot \frac{e^{-2\alpha\varkappa\zeta}}{\varkappa}.$$

Комбинируя последние два неравенства с (1.11) и полагая $A_1 = \frac{e^{-\alpha}}{4\pi l(1-\alpha)}$, получаем доказательство первой части леммы.

Пусть $\zeta > \frac{1}{2} l$. Учитывая, что теперь $r_{MP} > \frac{1}{2} l$, используя неравенство (1.12) и полагая $A_2 = \frac{se^{-\alpha}}{2\pi^2 l^2 (1-\alpha)}$, получаем доказательство второй части леммы. Лемма доказана полностью.

Лемма 1.6. *Если* $0 < \zeta \leqslant \frac{1}{2} l$, *то*

$$\left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_S \sigma(P) \frac{e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}} ds_P \right| < B_1 \frac{e^{-\varkappa\zeta}}{\varkappa}, \tag{1.13}$$

а если $\zeta > \frac{1}{2} l$, *то*

$$\left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_S \sigma(P) \frac{e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}} ds_P \right| < B_2 e^{-\varkappa l}, \tag{1.14}$$

где B_1 *и* B_2 *— величины, не зависящие от точки* M *и параметра* $\varkappa$.

Доказательство. Пусть $0 < \zeta \leqslant \frac{1}{2} l$. Так как на основании лемм 1.1 и 1.2

$$\left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Omega_N} \sigma(P) \frac{e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}} ds_P \right| < \frac{2}{\pi} \max_{P\in S} |\sigma(P)| \int\limits_0^{\frac{1}{2}l} \frac{e^{-\varkappa\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} \rho d\rho < \frac{2}{\pi} \max_{P\in S} |\sigma(P)| \frac{e^{-\varkappa\zeta}}{\varkappa},$$

а в силу неравенств $r_{MP} \geqslant \frac{1}{2} l \geqslant \zeta$ и

$$xe^{-x} \leqslant \frac{1}{e} \quad (0 \leqslant x < \infty) \tag{1.15}$$

имеем

$$\left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{S-\Omega_N} \sigma(P) \frac{e^{-2\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}} ds_P \right| < \frac{s}{\pi^2 l^2 e} \max_{P\in S} |\sigma(P)| \frac{e^{-\frac{1}{2}\varkappa l}}{\varkappa} \leqslant \frac{s}{\pi^2 l^2 e} \max_{P\in S} |\sigma(P)| \frac{e^{-\varkappa\zeta}}{\varkappa},$$

то выполняется неравенство (1.13), где $B_1 = \frac{1}{\pi}\left(2 + \frac{s}{\pi^2 l^2 e}\right) \max\limits_{P\in S} |\sigma(P)|$.

Если же $\zeta > \frac{1}{2} l$, то, учитывая, что теперь $r_{MP} > \frac{1}{2} l$ и полагая $B_2 = \frac{s}{2\pi^2 l} \max\limits_{P\in S} |\sigma(P)|$, приходим к неравенству (1.14).

Лемма доказана.

Лемма 1.7. Пусть число $\varkappa_0$ — *такое же, как и в лемме 1.3, функции* $T_1(M, \varkappa)$ *и* $T_2(M, \varkappa)$ — *те же, что и в лемме 1.4, и* $\varkappa \geqslant \varkappa_0$.

Если $0 < \zeta \leqslant \frac{1}{2} l$, *то*

$$|T_i(M, \varkappa)| < B_1^{(i)} \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\varkappa\zeta}}{\varkappa} \quad (i = 1, 2),$$

а если $\zeta > \frac{1}{2} l$, *то*

$$|T_i(M, \varkappa)| < B_2^{(i)} e^{-\alpha\varkappa l} \quad (i = 1, 2),$$

где $B_1^{(i)}$ *и* $B_2^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ — *величины, не зависящие от точки* M *и параметра* $\varkappa$, *и* α — *произвольная постоянная,* $0 < \alpha < 1$.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением лишь случая $i = 1$ (при $i = 2$ доказательство аналогичное).

Допустим сначала, что $0 < \zeta \leqslant \frac{1}{2} l$. Используя лемму 1.3 и неравенства (1.12) и (1.15), находим:

$$|T_1(M, \varkappa)| < \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_S \int\limits_S \left| \left[\frac{e^{-\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}} R_1(P, Q, \varkappa) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\frac{e^{-\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}} \right) \right]_\varkappa' \right| ds_P \, ds_Q <$$

$$< \frac{c_1 e^{-\alpha}}{8\pi^2 (1-\alpha)} \int\limits_S \int\limits_S \left[e^{-\alpha\varkappa r_{MP}} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}^3} + \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}} e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}^2} \right] \boldsymbol{r}_{MQ} \boldsymbol{n}_Q \, ds_P \, ds_Q. \tag{1.16}$$

Интеграл в правой части представим теперь в виде суммы двух: по области $\Omega_N \times \Omega_N$ и по ее дополнению до области $S \times S$. При $\varkappa \to +\infty$ последний интеграл экспоненциально мал; можно показать, что

$$|T_1(M, \varkappa)| < \frac{c_1 e^{-\alpha}}{8\pi^2 (1-\alpha)} \int\limits_{\Omega_N} \int\limits_{\Omega_N} \left[e^{-\alpha\varkappa r_{MP}} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}} e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}^3} + \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{e^{-\alpha\varkappa r_{MQ}}}{r_{MQ}^3} \right] |\boldsymbol{r}_{MQ} \boldsymbol{n}_Q| \, ds_P \, ds_Q +$$

$$+ h_1 e^{-\frac{1}{2}\alpha\varkappa l},$$

где h_1 — величина, не зависящая от точки M и параметра $\varkappa$.

Пусть Π_N — касательная плоскость к поверхности S в точке N, P_1 и Q_1 — проекции точек P и Q на плоскость Π_N. Используя леммы 1.1, 1.2, следствие 1.1 и неравенство $r_{PQ} \geqslant \frac{1}{2} r_{P_1Q_1}$, имеем далее:

$$|T_1(M, \varkappa)| < \frac{8 c_1 e^{-\alpha}}{\pi^2 (1-\alpha)} \int\limits_{\Pi_N} \int\limits_{\Pi_N} \left[e^{-\tau r_{MP_1}} \frac{e^{-\tau r_{P_1Q_1}}}{r_{P_1Q_1}} \frac{e^{-\tau r_{MQ_1}}}{r_{MQ_1}^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\tau r_{MP_1}}}{r_{MP_1}} e^{-\tau r_{P_1Q_1}} \frac{e^{-\tau r_{MQ_1}}}{r_{MQ_1}^3} + \frac{e^{-\tau r_{MP_1}}}{r_{MP_1}} \frac{e^{-\tau r_{P_1Q_1}}}{r_{P_1Q_1}} \frac{e^{-\tau r_{MQ_1}}}{r_{MQ_1}^2} \right] \left(\zeta + \frac{5}{l} \rho^2 \right) ds_{P_1} \, ds_{Q_1} +$$

$$+ h_1 e^{-\frac{1}{2}\alpha\varkappa l}, \tag{1.17}$$

где $\tau = \frac{\alpha\varkappa}{2}$, $\rho = r_{NQ_1}$.

Оценим слагаемые в правой части равенства (1.17).

Учитывая формулу

$$\int\limits_{\Pi_N} \frac{e^{-\tau r_{MP_1}}}{r_{MP_1}} \frac{e^{-\tau r_{P_1Q_1}}}{r_{P_1Q_1}} ds_{P_1} = 2\pi \int\limits_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-\tau\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}} dt$$

(см., например, [4]), получаем:

$$\int\limits_{\Pi_N}\int\limits_{\Pi_N} \left[e^{-\tau r_{MP_1}} \frac{e^{-\tau r_{P_1Q_1}}}{r_{P_1Q_1}} \frac{e^{-\tau r_{MQ_1}}}{r^3_{MQ_1}} + \frac{e^{-\tau r_{MP_1}}}{r_{MP_1}} e^{-\tau r_{P_1Q_1}} \frac{e^{-\tau r_{MQ_1}}}{r^3_{MQ_1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\tau r_{MP_1}}}{r_{MP_1}} \frac{e^{-\tau r_{P_1Q_1}}}{r_{P_1Q_1}} \frac{e^{-\tau r_{MQ_1}}}{r^2_{MQ_1}} \right] \left(\zeta + \frac{5}{l}\rho^2\right) ds_{P_1} ds_{Q_1} =$$

$$= -\frac{d}{d\tau} \int\limits_{\Pi_N}\int\limits_{\Pi_N} \frac{e^{-\tau r_{MP_1}}}{r_{MP_1}} \frac{e^{-\tau r_{P_1Q_1}}}{r_{P_1Q_1}} \frac{e^{-\tau r_{MQ_1}}}{r^3_{MQ_1}} \left(\zeta + \frac{5}{l}\rho^2\right) ds_{P_1} ds_{Q_1} =$$

$$= -4\pi^2 \frac{d}{d\tau} \int\limits_0^{\infty} \left(\zeta + \frac{5}{l}\rho^2\right) \rho d\rho \int\limits_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-\tau\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}}{(\sqrt{\rho^2+\zeta^2})^3} \frac{e^{-\tau\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}} dt =$$

$$= 4\pi^2 \int\limits_0^{\infty} \left(\zeta + \frac{5}{l}\rho^2\right) \rho d\rho \int\limits_{\zeta}^{\infty} \left[\frac{e^{-\tau\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}}{(\sqrt{\rho^2+\zeta^2})^3} e^{-\tau\sqrt{\rho^2+t^2}} + \frac{e^{-\tau\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}}{\rho^2+\zeta^2} \frac{e^{-\tau\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}} \right] dt <$$

$$< 8\pi^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\tau\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}}{(\sqrt{\rho^2+\zeta^2})^3} \left(\zeta + \frac{5}{l}\rho^2\right) \rho d\rho \int\limits_{\zeta}^{\infty} e^{-\tau\sqrt{\rho^2+t^2}} dt <$$

$$< \frac{8\pi^2}{\tau} \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\tau\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}}{(\sqrt{\rho^2+\zeta^2})^3} \left(\zeta + \frac{5}{l}\rho^2\right) \rho d\rho < \frac{16\pi^2}{\alpha} \left(1 + \frac{10}{\alpha l \varkappa_0}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\varkappa\zeta}}{\varkappa}.$$

Итак,

$$\int\limits_{\Pi_N}\int\limits_{\Pi_N} \left[e^{-\tau r_{MP_1}} \frac{e^{-\tau r_{P_1Q_1}}}{r_{P_1Q_1}} \frac{e^{-\tau r_{MQ_1}}}{r^3_{MQ_1}} + \frac{e^{-\tau r_{MP_1}}}{r_{MP_1}} e^{-\tau r_{P_1Q_1}} \frac{e^{-\tau r_{MQ_1}}}{r^3_{MQ_1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\tau r_{MP_1}}}{r_{MP_1}} \frac{e^{-\tau r_{P_1Q_1}}}{r_{P_1Q_1}} \frac{e^{-\tau r_{MQ_1}}}{r^2_{MQ_1}} \right] \left(\zeta + \frac{5}{l}\rho^2\right) ds_{P_1} ds_{Q_1} <$$

$$< \frac{16\pi^2}{\alpha} \left(1 + \frac{10}{\alpha l \varkappa_0}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\varkappa\zeta}}{\varkappa}. \tag{1.18}$$

Кроме того, используя соотношение (1.15) и неравенство $0 < \zeta \leqslant \frac{1}{2} l$, находим:

$$e^{-\frac{1}{2}\alpha\varkappa l} \leqslant \frac{4}{\alpha l e} \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\varkappa\zeta}}{\varkappa}. \tag{1.19}$$

Комбинируя соотношения (1.17), (1.18) и (1.19) и полагая $B_1^{(1)} = \frac{128 c_1 e^{-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \left(1 + \frac{10}{\alpha l \varkappa_0}\right) + \frac{4h_1}{\alpha l e}$, получаем доказательство первой части леммы.

Если же $\zeta > \frac{1}{2} l$, то требуемая оценка легко может быть получена из соотношения (1.16) и неравенств $r_{MP} > \frac{1}{2} l$ и $r_{MQ} > \frac{1}{2} l$.

Лемма доказана.

1.4. Оценки производных $[g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa$ и $[g_2(M, M, \varkappa)]'_\varkappa$.

Из лемм 1.4—1.7 вытекает следующая

Теорема 1.1. *Пусть*

$$f_1(M, \varkappa) = [g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa + \frac{1}{4\pi}e^{-2\varkappa\zeta},\ f_2(M, \varkappa) = [g_2(M, M, \varkappa)]'_\varkappa - \frac{1}{4\pi}e^{-2\varkappa\zeta}$$

и $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, *где число* $\varkappa_0$ *— то же, что и в лемме 1.3. Если* $0 < \zeta \leqslant \frac{1}{2}l$, *то*

$$|f_i(M, \varkappa)| < C_1^{(i)} \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\varkappa\zeta}}{\varkappa} \quad (i = 1, 2),$$

а если $\zeta > \frac{1}{2}l$, *то*

$$|[g_i(M, M, \varkappa)]'_\varkappa| < C_2^{(i)} e^{-\alpha\varkappa l} \quad (i = 1, 2),$$

где $C_1^{(i)}$ *и* $C_2^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ *— величины, не зависящие от точки* M *и параметра* $\varkappa$, *и* α *— произвольная постоянная,* $0 < \alpha < 1$.

§ 2. ОБ АСИМПТОТИКЕ НЕКОТОРЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРВОЙ И ТРЕТЬЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Об асимптотике выражений типа $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + p)^{-2}$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\mu_k\}$ *— собственные значения уравнения* $\Delta u + \lambda u = 0$ *для области* V *при краевых условиях* $u|_S = 0$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_S = 0$ *соответственно. Тогда при* $p \to +\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k + p)^2} = \frac{v}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{s}{16\pi}\frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_k + p)^2} = \frac{v}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{s}{16\pi}\frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right).$$

Доказательство. Установим лишь первую из формул (вывод второй аналогичен).

Пусть M, M_1 — произвольные несовпадающие точки области V, $\varkappa$ и $\varkappa_1$ — произвольные числа, $\varkappa \neq \varkappa_1$, $\varkappa > \varkappa_0$, $\varkappa_1 > \varkappa_0$ (число $\varkappa_0$ — такое же, как и в теореме 1.1). Возьмем пределы при $M_1 \to M$ обеих частей равенства

$$G_1(M, M_1, -\varkappa_1^2) - G_1(M, M_1, -\varkappa^2) = -(\varkappa_1^2 - \varkappa^2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(M)\,u_k(M_1)}{(\lambda_k + \varkappa_1^2)(\lambda_k + \varkappa^2)},$$

где $u_1(M)$, $u_2(M)$, ... — нормированные собственные функции рассматриваемой краевой задачи (соответствующие числам λ_1, λ_2, ...). Пользуясь формулой (1.1), находим:

$$\frac{1}{4\pi}(\varkappa_1 - \varkappa) + [g_1(M, M, \varkappa_1) - g_1(M, M, \varkappa)] = (\varkappa_1^2 - \varkappa^2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k^2(M)}{(\lambda_k + \varkappa_1^2)(\lambda_k + \varkappa^2)}.$$

Если обе части этого равенства разделим на разность $\varkappa_1^2 - \varkappa^2$, и затем устремим $\varkappa_1$ к $\varkappa$, то получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k^2(M)}{(\lambda_k + \varkappa^2)^2} = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{2\varkappa}[g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa.$$

Последующее интегрирование по области V дает:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k + \varkappa^2)^2} = \frac{v}{8\pi}\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{2\varkappa}\int_V [g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa \, dv_M, \tag{2.1}$$

где dv_M — элемент объема, соответствующий переменной точке M.

Обозначим теперь через ξ и η параметры, определяющие положение переменной точки на части $S^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ поверхности S (см. указанные во введении ограничения на поверхности S, пункт б)), а через $\widetilde{S}^{(i)}$ — ту область в плоскости (ξ, η), образом которой является поверхность $S^{(i)}$.

Пусть $V^{(i)}$ $(V^{(i)} \subset V,\ i = 1, 2, \ldots, \nu)$ — область, состоящая из всех таких точек, расстояния от которых до $S^{(i)}$ не больше $\frac{1}{2}l$, и которые лежат на нормалях, проведенных через точки поверхности $S^{(i)}$, а V^* $(V^* \subset \subset V)$ — область, все точки которой удалены от поверхности S на расстояния, большие $\frac{1}{2}l$.

Положение любой точки $M \in V^{(i)}$ будем задавать координатами (ξ, η, ζ), где, как и выше, $\zeta\left(0 < \zeta \leqslant \frac{1}{2}l\right)$ — расстояние от точки M до ближайшей к ней точки $N(\xi, \eta) \in S^{(i)}$. Можно показать, что

$$dv_M = (1 - 2h\zeta + k\zeta^2)\sqrt{EG - F^2}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{2.2}$$

где E, F и G — коэффициенты первой квадратичной формы на поверхности $S^{(i)}$, h и k — средняя и гауссова кривизны.

Используя теорему 1.1 и формулу (2.2), составим равенство

$$\int_V [g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa \, dv_M = -\sum_{i=1}^{n} \iint_{\widetilde{S}^{(i)}} \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{1}{4\pi} e^{-2\varkappa\zeta} \sqrt{EG - F^2}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + I,$$

где

$$I = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\widetilde{S}^{(i)}} \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{1}{4\pi} \zeta e^{-2\varkappa\zeta} (2h - k\zeta)\sqrt{EG - F^2}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{V^{(i)}} f_1(M, \varkappa)\, dv_M + \int_{V^*} [g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa \, dv_M.$$

Но

$$\sum_{i=1}^{n} \iint_{\widetilde{S}^{(i)}} \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{1}{4\pi} e^{-2\varkappa\zeta} \sqrt{EG - F^2}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{s}{8\pi}\frac{1}{\varkappa} - \frac{s}{8\pi}\frac{e^{-\varkappa l}}{\varkappa};$$

кроме того, на основании теоремы 1.1 и ограниченности кривизн h и k

$$I = O\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right) \quad (\varkappa \to +\infty).$$

Следовательно, имеет место формула

$$\int\limits_V [g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa \, dv_M = -\frac{s}{8\pi}\frac{1}{\varkappa} + O\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right) \quad (\varkappa \to +\infty).$$

Сочетая ее с равенством (2.1) и полагая $p = \varkappa^2$, приходим к заключению теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\mu_k\}$ ($\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots$ [1]) — *собственные значения уравнения* $\Delta u - qu + \lambda u = 0$ *для области* V *при краевых условиях* $u\Big|_S = 0$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_S = 0$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k + p)^2} = \frac{v}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{s}{16\pi}\frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right) \quad (p \to +\infty) \tag{2.3}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_k + p)^2} = \frac{v}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{s}{16\pi}\frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right) \quad (p \to +\infty). \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $Q = \max\limits_{M \in \overline{V}} |q(M)|$ и $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots$ ($\lambda_1^{(0)} \leqslant \lambda_2^{(0)} \leqslant \ldots$) — собственные значения уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ при краевом условии $u_{|S} = 0$.

Так как $\lambda_k^{(0)} - Q \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_k^{(0)} + Q$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то при $p > Q - \lambda_1^{(0)}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_k^{(0)} + Q + p]^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k + p)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_k^{(0)} - Q + p]^2}.$$

Если теперь заметим, что при $p \to +\infty$ вследствие теоремы 2.1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_k^{(0)} \pm Q + p]^2} = \frac{v}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{p \pm Q}} - \frac{s}{16\pi}\frac{1}{p \pm Q} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right) = \frac{v}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{s}{16\pi}\frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right),$$

то придем к формуле (2.3). Аналогично доказывается и формула (2.4).

Отметим еще одно утверждение [2], которое можно легко получить из теоремы 2.1.

Теорема 2.3. *Пусть область* V *неограниченно расширяется с сохранением подобия,* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\mu_k\}$ — *собственные значения уравнения* $\Delta u + \lambda u = 0$ *для области* V *при краевых условиях* $u|_S = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0$ *соответственно;* p_0 — *положительная постоянная. Тогда при* $v \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k + p_0)^2} = \frac{1}{8\pi\sqrt{p_0}} v - \frac{1}{16\pi p_0} s + O\left(v^{\frac{1}{3}}\right)$$

---

[1] Это ограничение здесь не является, конечно, необходимым. Оно, однако, существенно для утверждений пункта 2.2, и мы будем его считать выполненным уже сейчас.

[2] На это утверждение внимание автора обратил И. М. Сливняк.

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_k + p_0)^2} = \frac{1}{8\pi \sqrt{p_0}} v + \frac{1}{16\pi p_0} s + O\left(v^{\frac{1}{3}}\right).$$

2.2. Об асимптотике некоторых сумм, содержащих числа $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$.

Теорема 2.4. *Пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ ($\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots$) — собственные значения уравнения $\Delta u - qu + \lambda u = 0$ при краевых условиях $u|_S = 0$ и $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\right|_S = 0$ соответственно. Тогда**

$$\Phi_1(x) \equiv \sum_{\lambda_k \leqslant x} (\lambda_k - \mu_k) \sim \frac{s}{16\pi} x^2 \quad (x \to +\infty), \tag{2.5}$$

$$\Phi_2(x) \equiv \sum_{\mu_k \leqslant x} (\lambda_k - \mu_k) \sim \frac{s}{16\pi} x^2 \quad (x \to +\infty). \tag{2.6}$$

Доказательство. Приведем лишь вывод формулы (2.5) (формула (2.6) устанавливается аналогично).

Заметим, что $\delta_k \equiv \lambda_k - \mu_k \geqslant 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) (см. [5], гл. VI) и, следовательно, функция $\Phi_1(x)$ неубывающая. Воспользуемся теперь теоремой 2.2: вычитая почленно (2.3) из (2.4) и учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\mu_k + p)^2} - \frac{1}{(\lambda_k + p)^2}\right] = \varphi(p) + \psi(p),$$

где

$$\varphi(p) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{(\lambda_k + p)^3}, \quad \psi(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k^2 (\lambda_k + 2\mu_k + 3p)}{(\lambda_k + p)^3 (\mu_k + p)^2},$$

получаем:

$$\varphi(p) + \psi(p) = \frac{s}{8\pi} \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right) \quad (p \to +\infty).$$

Поскольку, как покажем ниже,

$$\psi(p) = o(\varphi(p)) \quad (p \to +\infty), \tag{2.7}$$

то

$$\int_a^{\infty} \frac{d\Phi_1(x)}{(x + p)^3} = \frac{1}{2} \varphi(p) \sim \frac{s}{16\pi} \frac{1}{p} \quad (p \to +\infty),$$

где a — какая угодно постоянная, $a < \lambda_1$. Для того, чтобы прийти к заключению теоремы, достаточно теперь воспользоваться тауберовой теоремой Харди—Литтлвуда, формулировка которой такова:

Пусть на интервале $[a, \infty)$ задана неубывающая функция $\Phi(x)$ и

$$\int_a^{\infty} \frac{d\Phi(x)}{(x + p)^{\alpha}} \sim \frac{C}{p^{\beta}} \quad (p \to +\infty),$$

где C, α, β — постоянные и $0 < \beta < \alpha$. Тогда

$$\Phi(x) \sim \frac{C\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha - \beta + 1)} x^{\alpha - \beta} \quad (x \to +\infty)$$

(см., например, [6], где приводится эквивалентная формулировка теоремы).

Осталось установить равенство (2.7).

---

* После того, как статья была сдана в печать, автором были получены формулы для собственных значений третьей краевой задачи (соответствующих различным функциям, входящим в краевое условие), аналогичные (2.5) и (2.6).

Пусть p_0 — произвольная постоянная, $p_0 > -\mu_1$. Так как $\lambda_k \sim \mu_k$ $(k \to \infty)$, то

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\delta_k}{\mu_k + p_0} = 0,$$

и, значит, $\frac{\delta_k}{\mu_k + p_0} < A$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где A — некоторое число; поэтому

$$\frac{\lambda_k + p}{\mu_k + p} < A + 1 \quad (p \geqslant p_0, \ k = 1, 2, \ldots). \tag{2.8}$$

Обозначим через ε произвольное положительное число; пусть величины $N = N(\varepsilon)$ и $P(\varepsilon)$ такие, что

$$\frac{\delta_k}{\mu_k + p_0} < \frac{\varepsilon}{3(A+1)} \quad (k > N) \tag{2.9}$$

и

$$\frac{3(A+1)\max\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N\}}{p - p_0} < \varepsilon \quad (p > P(\varepsilon)). \tag{2.10}$$

Так как вследствие (2.8) и (2.9)

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\delta_k^2 (\lambda_k + 2\mu_k + 3p)}{(\lambda_k + p)^3 (\mu_k + p)^2} < \frac{\varepsilon}{2} \varphi(p) \quad (p > p_0),$$

а на основании (2.8) и (2.10)

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\delta_k^2 (\lambda_k + 2\mu_k + 3p)}{(\lambda_k + p)^3 (\mu_k + p)^2} < \frac{\varepsilon}{2} \varphi(p) \quad (p > P(\varepsilon)),$$

то $\psi(p) < \varepsilon\varphi(p)$ $(p > P(\varepsilon))$, что в силу произвольности величины ε означает (2.7). Теорема доказана.

Учитывая, что

$$\lambda_n \sim \mu_n \sim \left(\frac{6\pi^2 n}{v}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (n \to \infty) \tag{2.11}$$

(см., например, [2] или [5]) и полагая $x = \lambda_n$ в формуле (2.5) (или $x = \mu_n$ в формуле (2.6)), получаем

Следствие 2.1. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) \sim \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \frac{s}{v^{\frac{4}{3}}} n^{\frac{4}{3}} \quad (n \to \infty).$$

Рассмотрим одно обобщение теоремы 2.4.

Теорема 2.5. *Пусть на полуоси* $[a, +\infty)$ *задана знакопостоянная функция* $f(x)$, *абсолютно непрерывная на каждом отрезке* $[a, b]$ $(b < +\infty)$; *пусть, далее, почти всюду на полуоси* $[a, +\infty)$ *отношение* $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ *ограничено, и*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x t f(t)\, dt = \infty.$$

Тогда при $x \to +\infty$

$$\sum_{a<\lambda_k\leqslant x} f(\lambda_k)(\lambda_k-\mu_k) \sim \frac{s}{8\pi}\int_a^x tf(t)\,dt, \tag{2.12}$$

$$\sum_{a<\mu_k\leqslant x} f(\mu_k)(\lambda_k-\mu_k) \sim \frac{s}{8\pi}\int_a^x tf(t)\,dt. \tag{2.13}$$

Доказательство. Установим лишь формулу (2.12). Для простоты рассуждений будем предполагать, что $a>0$ и $f(x)>0$.

Положим $\Phi_1(x)=\sum\limits_{\lambda_k\leqslant x}(\lambda_k-\mu_k)=\frac{s}{6\pi}x^2+x^2\theta(x)$ ($\theta(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ на основании теоремы 2.4). Так как

$$\sum_{a<\lambda_k\leqslant x} f(\lambda_k)(\lambda_k-\mu_k)=\int_a^x f(t)\,d\Phi_1(t)=\frac{s}{8\pi}\int_a^x tf(t)\,dt-$$

$$-\int_a^x t^2f'(t)\,\theta(t)\,dt+x^2f(x)\,\theta(x)-a^2f(a)\,\theta(a),$$

то для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\int_a^x t^2f'(t)\,\theta(t)\,dt=o\Big(\int_a^x tf(t)\,dt\Big)\quad(x\to+\infty), \tag{2.14}$$

$$x^2f(x)\,\theta(x)=o\Big(\int_a^x tf(t)\,dt\Big)\quad(x\to+\infty). \tag{2.15}$$

Но поскольку существует постоянная $C>0$ такая, что почти всюду на $[a,+\infty)$

$$x\,|f'(x)|\leqslant Cf(x),$$

то

$$\Big|\int_a^x t^2f'(t)\,\theta(t)\,dt\Big|\leqslant C\int_a^x tf(t)\,|\theta(t)|\,dt$$

и, значит, имеет место (2.14). Кроме того, так как

$$x^2f(x)=\int_a^x 2tf(t)\,dt+\int_a^x t^2f'(t)\,dt+a^2f(a),$$

то

$$x^2f(x)\leqslant\int_a^x (C+2)\,tf(t)\,dt+a^2f(a).$$

Следовательно, выполняется и соотношение (2.15).

Теорема доказана.

Пример 2.1. Условию теоремы 2.5 удовлетворяет функция $f(x)=x^m$ ($m\geqslant -2$). Следовательно, при $x\to+\infty$

$$\sum_{a<\lambda_k\leqslant x}\lambda_k^m(\lambda_k-\mu_k)\sim\sum_{a<\mu_k\leqslant x}\mu_k^m(\lambda_k-\mu_k)\sim\begin{cases}\dfrac{s}{8\pi}\dfrac{x^{m+2}}{m+2} & (m>-2),\\[2mm] \dfrac{s}{8\pi}\ln x & (m=-2).\end{cases}$$

Пример 2.2. Если среди чисел $\{\lambda_k\}$ нет равных нулю, то из формулы (2.12) при $f(x) = \frac{1}{x}$ и $x = \lambda_n$ вытекает с учетом (2.11), что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\lambda_k} = n - \left(\frac{9\pi}{128}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{s}{v^{\frac{2}{3}}} n^{\frac{2}{3}} + o(n^{\frac{2}{3}}) \quad (n \to \infty).$$

Аналогично доказывается, что при $\mu_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu_k} = n + \left(\frac{9\pi}{128}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{s}{v^{\frac{2}{3}}} n^{\frac{2}{3}} + o(n^{\frac{2}{3}}) \quad (n \to \infty).$$

Пример 2.3. Пусть $f(x) = x^{m-1}$ $(m=1, 2, \ldots)$; полагая $x = \lambda_n$ в (2.12) и $x = \mu_n$ в (2.13), получаем с учетом (2.11):

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{m-1} (\lambda_k - \mu_k) \sim \sum_{k=1}^{n} \mu_k^{m-1} (\lambda_k - \mu_k) \sim \frac{s}{8\pi} \frac{\lambda_n^{m+1}}{m+1} \quad (n \to \infty)$$

Так как

$$\mu_k^{m-1} \leqslant \lambda_k^i \mu_k^{m-i-1} \leqslant \lambda_k^{m-1} \quad (0 \leqslant i \leqslant m-1)$$

при всех $\mu_k \geqslant 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^m - \mu_k^m) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{m-1} + \lambda_k^{m-2}\mu_k + \ldots + \mu_k^{m-1})(\lambda_k - \mu_k) \sim$$

$$\sim \frac{s}{8\pi} \frac{m}{m+1} \left(\frac{6\pi^2 n}{v}\right)^{\frac{2}{3}(m+1)} \quad (n \to \infty).$$

Приложение. Формулировки соответствующих основных результатов в плоском случае

Пусть S — конечная, открытая область на плоскости. О границе Γ области S будем предполагать, что: а) через любую точку $P \in \Gamma$ можно провести две окружности одного и того же, не зависящего от P радиуса $l > 0$, одна из которых находится полностью внутри $\bar{S}$, а другая — полностью вне S; б) она состоит из конечного числа линий с непрерывной кривизной.

Пусть, далее, $g_1(M, M_1, \varkappa)$ и $g_2(M, M_1, \varkappa)$ — регулярные части функций Грина дифференциального выражения $\Delta u - \varkappa^2 u$ $(\varkappa > 0)$ для области S при краевых условиях $u|_\Gamma = 0$ и $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\right|_\Gamma = 0$ соответственно $\Big(\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная функции u в направлении внешней нормали к линии Γ, σ — непрерывная и вещественная функция точки на линии $\Gamma\Big)$, и $\{\lambda_k\}$, $\{\mu_k\}$ $(\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots)$ — собственные значения уравнения $\Delta u - qu + \lambda u = 0$ для области S при этих же краевых условиях (q — вещественная функция, $q \in \operatorname{Lip} a (0 < a \leqslant 1)$ в $\bar{S}$).

Имеют место следующие теоремы, для доказательства которых можно применить методику, существенно не отличающуюся от использованной в трехмерном случае:

Теорема 1. *Пусть* ζ — *расстояние от точки* $M \in S$ *до границы* Γ, α — *произвольная постоянная,* $0 < \alpha < 1$.

Существует такое число $\varkappa_0 > 0$, *что для всех* $\varkappa \geqslant \varkappa_0$

$$\left| [g_1(M, M, \varkappa)]'_\varkappa + \frac{1}{\pi} \zeta K_1(2\varkappa\zeta) \right| < C_1^{(1)} \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\varkappa\zeta}}{\varkappa^2},$$

$$\left| [g_2(M, M, \varkappa)]'_\varkappa - \frac{1}{\pi} \zeta K_1(2\varkappa\zeta) \right| < C_1^{(2)} \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\varkappa\zeta}}{\varkappa^2},$$

если $0 < \zeta \leqslant \frac{1}{2} l$, *а если* $\zeta > \frac{1}{2} l$, *то*

$$| [g_i(M, M, \varkappa)]'_\varkappa | < C_2^{(i)} e^{-\varkappa l} \quad (i = 1, 2),$$

где $K_m(x) = \int\limits_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} mt \, dt$ — *модифицированная цилиндрическая функция II рода индекса* m, $C_k^{(i)}$ $(i, k = 1, 2)$ — *величины, не зависящие от точки* M *и параметра* $\varkappa$.

Теорема 2. *При* $p \to +\infty$ *имеют место формулы*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(\lambda_k + p)^2} = \frac{s}{4\pi} \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{16} \frac{1}{p^{3/2}} + O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(\mu_k + p)^2} = \frac{s}{4\pi} \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{16} \frac{1}{p^{3/2}} + O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

где s *и* γ — *площадь области* S *и длина линии* Γ.

Теорема 3. *При* $x \to +\infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\sum_{\lambda_k \leqslant x} (\lambda_k - \mu_k) \sim \sum_{\mu_k \leqslant x} (\lambda_k - \mu_k) \sim \frac{\gamma}{3\pi} x^{\frac{3}{2}}.$$

Следствие. *При* $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \mu_k) \sim \frac{8\sqrt{\pi}}{3} \frac{\gamma}{s^{\frac{3}{2}}} n^{\frac{3}{2}}.$$

Теорема 4. *Пусть на полуоси* $[a, +\infty)$ $(a \geqslant 0)$ *задана знакопостоянная функция* $f(x)$, *абсолютно непрерывная на каждом отрезке* $[a, b]$ $(b < +\infty)$; *пусть, далее, почти всюду на* $[a, +\infty)$ *отношение* $\frac{x f'(x)}{f(x)}$ *ограничено и*

$$\lim_{x \to +\infty} \int\limits_a^x t^{\frac{1}{2}} f(t) \, dt = \infty.$$

Тогда при $x \to +\infty$

$$\sum_{a < \lambda_k \leqslant x} f(\lambda_k)(\lambda_k - \mu_k) \sim \sum_{a < \mu_k \leqslant x} f(\mu_k)(\lambda_k - \mu_k) \sim \frac{\gamma}{2\pi} \int\limits_a^x t^{\frac{1}{2}} f(t) \, dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Carleman. Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, Skand. Mat. Kongr. (1934).

2. T. Carleman. Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen, Berichte Sächs. Akad. Wiss. 88 (1936).

3. И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. ДАН СССР, 88, № 4 (1953).

4. A. Pleijel. On Green's functions and the eigenvaluedistribution of the three-dimensional membrane equation, 12 Skand. Mat. Kongr. (1954).

5. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. I, изд. 3-е, Гостехиздат (1951).

6. Э. Ч. Титчмарш. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2, Изд-во иностр. лит. (1961).