ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Б. Я. Скачек

Вариационные принципы Р. Куранта широко применялись при выводе асимптотических формул распределения числа собственных значений многомерных краевых задач в ограниченных областях.

Применение вариационного метода в случае бесконечных областей осложняется необходимостью учитывать поведение коэффициентов дифференциального уравнения при $|x| \to \infty$. Поэтому в этом случае, как правило, бесполезно разбивать область на кубы одинаковой величины и использовать распределение числа собственных значений краевых задач в этих кубах, как это делается в регулярных задачах.

В работах [1—3] было применено разбиение с «переменным шагом», зависящим от характера убывания коэффициентов при достаточно больших $|x|$.

Данная заметка примыкает к исследованиям [1—3]. Основным в ней является лемма о разбиении области на кубы, которая в сочетании с вариационными принципами дает возможность получить ряд новых асимптотических формул для сингулярных дифференциальных операторов.

Пусть x — точка k-мерного евклидова пространства E, а $f(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая вне некоторой сферы неравенству

$$f(x) < |x|^{-2-\delta}, \tag{1}$$

где δ — какое-нибудь положительное число. Через x_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ будем обозначать координаты x, а через $x^{(l)}$ — значение вектора x в конкретной точке пространства.

Функцию $f(x)$ назовем a-убывающей $(a > 1)$ в области D, если для любых $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ из области D, удовлетворяющих неравенству

$$|x^{(2)}| \geqslant a\,|x^{(l)}|, \tag{2}$$

будет иметь место

$$f(x^{(1)}) \geqslant f(x^{(2)}).$$

Вначале заметим, что монотонно убывающие функции являются a-убывающими при любом a.

Далее, если функция $f(x)$ a-убывающая при каком-нибудь $a = a_0$, то она будет a-убывающей при любом $a > a_0$.

Приведем два примера таких функций.

1°. Рассмотрим функции, удовлетворяющие вне некоторой сферы неравенствам

$$|x|^{-\beta} < f(x) < |x|^{-\alpha}, \tag{3}$$

где β, $\alpha > 2$.

По заданным α, β и a можно определить радиус R шара Ω_R, внутри которого функция $f(x)$ является a-убывающей.

Если

$$|x^{(2)}|^{\alpha} > |x^{(1)}|^{\beta}, \tag{4}$$

то в силу (3)

$$f(x^{(1)}) > f(x^{(2)}).$$

Остается заметить, что для всех $x \in \Omega_R$ и удовлетворяющих (2) будет выполняться (4), если имеет место неравенство

$$\left(\frac{R}{a}\right)^{\beta} \leqslant R^{\alpha}. \tag{5}$$

Определяя R из неравенства (5), получим радиус сферы Ω_R, внутри которой функция $f(x)$ — a-убывающая.

2°. Пусть

$$b^{-\beta|x|} < f(x) < b^{-\alpha|x|}, \tag{6}$$

где b, β и α — положительные числа.

Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что функция $f(x)$ будет a-убывающей при всех $a \geqslant \frac{\beta}{\alpha}$ в любой области.

Введем некоторые определения.

Пусть $D(\delta)$ и $D(\theta)$ — шары с центрами в начале координат и радиусами $(4\lambda)^{1/\delta}$ и λ^{θ}, а

$$D(\delta, \theta) = D(\delta) - D(\theta),$$

где δ из (1), а θ — какое-нибудь число, меньшее $\min\left\{\frac{\delta}{4}, 1\right\}$. Далее, обозначим через $d_{i_1 \ldots i_k}$ k-мерный куб, у которого стороны параллельны осям координат. Пусть $\check{f}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ наименьшее, а $\hat{f}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ наибольшее значение функции $f(x)$ в кубе $d_{i_1 \ldots i_k}$.

Не оговаривая особо, далее встречающиеся функции f, r, u, p будем считать непрерывными.

Имеет место следующая

Лемма. *Если функция $f(x)$ a-убывающая в $D(\theta, \delta)$ при всех $\lambda \geqslant \lambda_0$, где $a = \lambda^{\theta}$, а λ_0 — какое-нибудь положительное число, то можно указать такое разбиение области $D(\delta)$ на N k-мерных кубов $d_{i_1 \ldots i_k}$, что будут иметь место предельные соотношения*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\int \cdots \int_{D\delta} f(x)\,dx}{\sum\limits_{i_1} \cdots \sum\limits_{i_k} \hat{f}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})\, b^k_{i_1 \ldots i_k}(\lambda)} =$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\int \cdots \int_{D\delta} f(x)\,dx}{\sum\limits_{i_1} \cdots \sum\limits_{i_k} \check{f}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})\, b^k_{i_1 \ldots i_k}(\lambda)} = 1, \tag{7}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \hat{f}^{\frac{k-1}{2}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})\, b^{k-1}_{i_1 \ldots i_k}(\lambda) = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{N}{\lambda^{k/2}} = 0. \tag{9}$$

Очевидно, при $k=1$ (8) вытекает из (9).

Примечание. Условиям леммы удовлетворяют монотонно убывающие функции, а также функции, для которых вне некоторой сферы справедливо (6) при каких-нибудь α, β, b или имеет место (3) при $\alpha > \beta - \delta\theta$.

Доказательство. Для наглядности изложение будем вести для $k=2$. При $k \neq 2$ доказательство аналогично.

Пусть $x_1 = x$, $x_2 = y$. Обозначим через $\overline{\Omega}_i$ квадраты с центром в начале координат, стороны которых параллельны осям координат и равны по длине $\bar{b}_i$.

Разобьем $D(\delta)$ на области Ω_i, где $\Omega_0 = \overline{\Omega}_0$, а при $i \geqslant 1$ $\Omega_i = \overline{\Omega}_i - \overline{\Omega}_{i-1}$. Далее, пусть

$$b_i = \frac{1}{2}(\bar{b}_i - \bar{b}_{i-1}) \quad (i = 1,2,\ldots),$$

а

$$\bar{b}_0 = \lambda^\theta, \quad \bar{b}_1 = 2\lambda^\theta, \quad \bar{b}_i = \bar{b}_{i-1}\lambda^{\theta r} \ (i = 2,3,\ldots), \tag{10}$$

где r — какое-нибудь положительное число, меньшее, чем $\min\left\{\frac{\delta}{4}, 1\right\}$.

Разобьем теперь каждую из областей Ω_i на квадраты $d_{pl}^{(i)}$, $p, l = 0, \pm 1, \ldots, \pm M_i$, где $M_i = b_i/a_i$, со сторонами длины a_i, параллельными осям координат. Обозначим через $(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})$ координаты вершины квадрата $d_{pl}^{(i)}$, ближайшей к началу координат.

Разбиение на квадраты $d_{pl}^{(i)}$ и их нумерацию произведем так, чтобы выполнялись условия:

1) $x_0^{(i)} = y_0^{(i)} = 0$.

2) Положительным (соответственно, отрицательным) p и l отвечают положительные (соответственно, отрицательные) $x_p^{(i)}$ и $y_l^{(i)}$.

3) Если $|i_1| > |i_2|$, то выполняются неравенства $|x_{i_1}| > |x_{i_2}|$ и $|y_{i_1}| > |y_{i_2}|$.

Заметим, что при выполнении условий (1 — 3) квадраты $d_{pl}^{(i)}$, не пересекающие осей координат, однозначно определяются индексами i, p, l.

Пусть

$$a_0 = a_1 = a_2 = \lambda^{-\beta}, \quad a_3 = \lambda^\theta, \quad a_i = b_{i-2} \ (i = 4,5,\ldots), \tag{11}$$

где β — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$0 < \beta < \frac{1-4\theta}{4}.$$

Покажем, что разбиение на квадраты $d_{pl}^{(i)}$ и есть искомое разбиение.

Докажем вначале (7). Обозначим через d_{il} какой-нибудь квадрат со стороной длины a_i, все точки которого принадлежат Ω_l. При $i \geqslant 2$ и достаточно большом λ в силу a-убывания функции $f(x)$ относительно $a = \lambda^\theta$ имеют место неравенства

$$f(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})\, a_i^2 \leqslant \iint\limits_{d_{i,\,i-2}} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{12}$$

Так как в каждой области Ω_i при $i > 2$ существует не более $\lambda^{4\theta r}$ квадратов d_{ii}, то в силу (12)

$$\sum_{i=3}^{N_0} \sum_{p=-M_i}^{M_i} \sum_{l=-M_i}^{M_i} \hat{f}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})\, a_i^2 \leqslant \lambda^{4\theta r} \sum_{i=1}^{N_0} \iint\limits_{\Omega_i} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{13}$$

Далее заметим, что при $\lambda \to \infty$

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{p=-M_i}^{M_i} \sum_{l=-M_i}^{M_i} \hat{f}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})\, a_i^2 = \iint_{D(\delta)} f(x, y)\, dx\, dy + o(1), \tag{14}$$

$$\sum_{i=0}^{1} \sum_{p=-M_i}^{M_i} \sum_{l=-M_i}^{M_i} \check{f}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})\, a_i^2 = \iint_{D(\delta)} f(x, y)\, dx\, dy + o(1). \tag{15}$$

Оценим теперь члены в правой части (13)

$$\lambda^{4r\theta} \sum_{i=1}^{N_0} \iint_{\Omega_i} f(x, y)\, dx\, dy = \lambda^{4r\theta} \iint_{D-\Omega_0} f(x, y)\, dx\, dy \leqslant 2\pi\lambda^{4r\theta} \int_{\frac{b_0}{2}}^{\infty} r^{-1-\delta} dr = O(\lambda^{4r\theta-\delta\theta}). \tag{16}$$

Из (13—16) следует (7).

Далее, учитывая (12), получаем

$$\sum_{i=0}^{N_0} \sum_{p=-M_i}^{M_i} \sum_{l=-M_i}^{M_i} \hat{f}^{\frac{k-1}{2}}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})\, a_i \leqslant \lambda^{4r\theta} \sum_{i=1}^{N_0} \frac{1}{a_i} \iint_{\Omega_i} f^{\frac{k-1}{2}}(x, y)\, dx\, dy +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2} \sum_{p=-M_i}^{M_i} \sum_{l=-M_i}^{M_i} \hat{f}^{\frac{k-1}{2}}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})\, a_i. \tag{17}$$

В силу (1) при $i \geqslant 1$ и достаточно большом λ

$$\frac{1}{a_i} \iint_{\Omega_i} f^{\frac{k-1}{2}}(x, y)\, dx\, dy \leqslant \frac{2\pi b_i^{1-\delta/2}}{a_i},$$

откуда ввиду (10) и (11) при этих i будет

$$\frac{1}{a_i} \iint_{\Omega_i} f^{\frac{k-1}{2}}(x, y)\, dx\, dy < \lambda^{2\theta}. \tag{18}$$

Заметим также, что

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{p=-M_i}^{M_i} \sum_{l=-M_i}^{M_i} \hat{f}^{\frac{k-1}{2}}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})\, a_i < C \sum_{i=0}^{2} \frac{b_i^2}{a_i}, \tag{19}$$

где

$$C = \sup_{x, y \in E} f^{\frac{k-1}{2}}(x, y).$$

Из (16—19) следует, что

$$\sum_{i=0}^{N_0} \sum_{p=-M_i}^{M_i} \sum_{l=-M_i}^{M_i} \hat{f}^{\frac{k-1}{2}}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})\, a_i < C\lambda^{2\theta+\beta}, \tag{20}$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от λ.

Из (10) и (20) вытекает (8).

Далее,

$$N = \sum_{i=0}^{N_0} \frac{\Omega_i}{a_i^2} < \sum_{i=0}^{N_0} \frac{\overline{\Omega}_i}{a_i^2}.$$

Вследствие (10) и (11) будет

$$N < 3\lambda^{2\theta+2\beta} + \lambda^{4r\theta}(N_0 - 2), \tag{21}$$

где N_0 определяется из соотношения

$$2\lambda^{(N_0-1)\theta r+\theta} \geqslant (4\lambda)^{1/\delta}.$$

Из (21) и (11) вытекает (9).

Лемма доказана полностью.

С помощью леммы можно получить ряд новых асимптотических формул для числа $m(\lambda)$ собственных значений, лежащих левее λ, у некоторых сингулярных дифференциальных операторов.

Пусть L — самосопряженный оператор, определяемый в $L_2(E)$ дифференциальной операцией

$$l(u) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \tag{22}$$

где $r(x) > 0$.

Имеет место

Теорема 1. *Если функция $r^{-1}(x)$ удовлетворяет* (1) *и a-убывающая в $D(\theta, \delta)$ при всех $\lambda \geqslant \lambda_0$, где $a = \lambda^\theta$, а λ_0 — какое-нибудь положительное число, то для числа $m(\lambda)$ собственных значений оператора L, лежащих левее λ, имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{m(\lambda)}{\lambda^{k/2}} = \frac{1}{2^k \pi^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \int\limits_E \cdots \int r^{-\frac{k}{2}} dx. \tag{23}$$

Доказательство. Для простоты приведем доказательство при $k = 2$. Проведем сферу D с центром в начале координат и радиусом $R = (4\lambda)^{1/\delta}$. Заметим, что собственные значения оператора, определенного в $L_2(E - D)$ операцией (22) и естественными краевыми условиями, больше λ. Поэтому в силу вариационных принципов Р. Куранта для вывода (23) достаточно оценить число собственных значений, меньших λ, у операторов, определяемых в $L_2(D)$ операцией (22) с нулевыми и естественными краевыми условиями.

Разобьем область D на квадраты $d_{pl}^{(i)}$, как указано в лемме. Обозначим через $m_{pl}^{(i)}(\lambda)$ и $\overline{m}_{pl}^{(i)}(\lambda)$ число собственных значений, меньших чем λ, соответственно у оператора, определяемого в $L_2(d_{pl}^{(i)})$ операцией

$$l(u) = -\hat{r}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})\,\Delta u \tag{24}$$

и нулевым граничным условием, и у оператора, определяемого в $L_2(d_{pl}^{(i)})$ операцией

$$l(u) = -\check{r}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})\,\Delta u \tag{25}$$

и естественными краевыми условиями.

Из вариационных принципов Р. Куранта вытекает

$$\sum_{i=0}^{N_0}\sum_{p=-M_i}^{M_i}\sum_{l=-M_i}^{M_i} m_{pl}^{(i)}(\lambda) \leqslant m(\lambda) \leqslant \sum_{i=0}^{N_0}\sum_{p=-M_i}^{M_i}\sum_{l=-M_i}^{M_i} \overline{m}_{pl}^{(i)}(\lambda). \tag{26}$$

Решая уравнения (24) и (25), получим

$$\overline{m}_{pl}^{(i)}(\lambda) \leqslant \frac{\lambda a_i^2}{4\pi^2 \check{r}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})} + \frac{\sqrt{\lambda}\, a_i}{2\pi\sqrt{\check{r}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})}}, \tag{27}$$

а

$$m_{pl}^{(i)}(\lambda) \geqslant \frac{a_i^2\lambda}{4\pi^2\hat{r}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})} - \frac{a_i\sqrt{\lambda}}{2\pi\sqrt{\hat{r}(x_p^{(i)}, y_l^{(i)})}}. \tag{28}$$

Подставляя (27) и (28) в (26) и применяя лемму, получим (23). Теорема доказана.

Лемма имеет место и в случае, когда E — полупространство, поэтому ее можно использовать для получения асимптотических формул в случае операторов, действующих на полуоси.

Пусть L — самосопряженный оператор, определяемый в $L_2(0, \infty)$ операцией

$$l(u) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(r(x)\frac{d^n u}{dx^n}\right),$$

где $r(x) > 0$.

Имеет место

Теорема 2. *Если при $x > R$ функция $r^{-n}(x)$ удовлетворяет* (1) *и a-убывающая в $D(\theta, \delta)$ при всех $\lambda \geqslant \lambda_0$, где $a = \lambda^{\theta}$, а λ_0 — какое-нибудь положительное число, то для числа $m(\lambda)$ собственных значений оператора L, лежащих левее λ, имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{m(\lambda)}{\sqrt[2n]{\lambda}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[2n]{r(x)}}. \tag{29}$$

Теорема 2 и теорема 3 доказываются аналогично теореме 1.

Рассмотрим оператор L, определяемый в $L_2(E)$ операцией

$$l(u) = -h\Delta u - p(x)u, \tag{30}$$

где $h > 0$.

Имеет место

Теорема 3. *Если вне некоторой сферы радиуса R функция $p(x)$ удовлетворяет* (1) *и a-убывающая в $D(\theta, \delta)$, при всех $\lambda \geqslant \lambda_0$, где $a = \lambda^{\theta}$, а λ_0 — какое-нибудь положительное число, то для числа $n(h)$ отрицательных собственных значений имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{h\to 0}\frac{n(h)}{h^{-\frac{k}{2}}} = \frac{1}{2^k\pi^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\int\limits_{(E)}\cdots\int p^{\frac{k}{2}}(x)\,dx. \tag{31}$$

М. Ш. Бирман в [4] получил формулу (31) для оператора, определенного в ограниченной области операцией (30) и нулевым граничным условием. Поэтому теорему 3 и далее следующую теорему 4 можно рассматривать как распространение теоремы 4.12 работы [4] на сингулярные операторы.

Если функция $p(x)$ стремится к нулю при $|x| \to \infty$ и вне некоторой сферы удовлетворяет неравенству

$$p(x) > |x|^{-2+\delta}, \tag{32}$$

где δ — какое-нибудь положительное число, то отрицательный спектр состоит из бесконечной последовательности собственных значений с единственной предельной точкой $\lambda = 0$. Имеет место

Теорема 4. *Если функция $p(x)$ стремится к нулю при $|x| \to \infty$ и вне некоторой сферы удовлетворяет* (32), *то для числа $m(-\varepsilon)$ собственных значений оператора* L, *лежащих левее $-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{m(-\varepsilon)}{h^{-\frac{k}{2}}} = \frac{1}{2^k \pi^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \int \cdots \int_{p \geqslant \varepsilon} (p-\varepsilon)^{\frac{k}{2}} dx. \tag{33}$$

Доказательство. Приведем доказательство при $k=2$. Пусть $D(\varepsilon)$ — область, состоящая из точек, в которых $p(x) \geqslant 0$. Разобьем область $D(\varepsilon)$ на N квадратов d_i $(i=1,\ldots,N)$, стороны которых параллельны осям координат и равны по длине h^α $\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$. Обозначим через $\hat{p}_i$ — наибольшее, а через $\check{p}_i$ — наименьшее значение функции $p(x)$ в кубе d_i.

Используя вариационные принципы Р. Куранта, получим неравенства, аналогичные (26—28), откуда будет вытекать, что

$$\frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^{N} (\check{p}_i - \varepsilon) h^{-1+2\alpha} - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\check{p}_i - \varepsilon}\, h^{-\frac{1}{2}+\alpha} \leqslant m(-\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^{N} (\hat{p}_i - \varepsilon) h^{-1+2\alpha} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\hat{p}_i - \varepsilon}\, h^{-\frac{1}{2}+\alpha}. \tag{34}$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{N} (\hat{p}_i - \varepsilon) h^{-1+2\alpha} = \frac{1+o(1)}{h} \iint_{D(\varepsilon)} (p-\varepsilon)\, dx, \tag{35}$$

а

$$\sum_{i=1}^{N} \sqrt{\hat{p}_i - \varepsilon}\, h^{-\frac{1}{2}+\alpha} = \frac{1+o(1)}{h^{\frac{1}{2}+\alpha}} \iint_{D(\varepsilon)} \sqrt{p-\varepsilon}\, dx. \tag{36}$$

Из (34) ввиду (35) — (36) и аналогичных соотношений для $\sum_{i=1}^{N} (\check{p}_i - \varepsilon) h^{-1+2\alpha}$ и $\sum_{i=1}^{N} \sqrt{\hat{p}_i - \varepsilon}\, h^{-\frac{1}{2}+\alpha}$ следует асимптотическая формула (33).

Теорема доказана.

Пользуюсь случаем, чтобы выразить признательность М. Ш. Бирману за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Глазман, Б. Я. Скачек, О дискретной части спектра лапласиана в предельно-цилиндрических областях. ДАН СССР, **147**, (1962), 760—763.

2. Б. Я. Скачек. Асимптотика отрицательной части спектра одномерных сингулярных дифференциальных операторов. Сб. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. АН УССР, Киев, (1963), 96—109.

3. Б. Я. Скачек. Про асимптотику негативної частини спектру багатовимірних сингулярних диференціальних операторів. ДАН УССР, № 1 (1964).

4. М. Ш. Бирман. О спектре граничных сингулярных задач. «Матем. сб.», 55 (97) : 2 (1961), 125—173.