О НАКОПЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

И. Я. Кричевский

1. Рассматривается задача о наибольшем значении линейного функционала

$$I(f) = \int_0^T h(t)\,dt, \tag{1}$$

заданного на множестве M всех вещественных, непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$|f(t)| \leqslant m_0; \tag{2}$$
$$|f'(t)| \leqslant m_1; \tag{3}$$
$$|f'(s) - f'(t)| \leqslant m_2 |s - t|. \tag{4}$$

Здесь $h(t)$ — заданная суммируемая функция времени t, имеющая конечное число точек перемен знака $t_2, \ldots t_{n-1}$ в интервале $[0, T]$; $m_i > 0$, $(i = 0, 1, 2)$. Сформулированная задача связана с оценкой накопления возмущений в линейных системах автоматического регулирования и при одном ограничении (2) решена в [1], [2]. В работе [3] получен алгоритм построения максимизирующей функции при ограничениях (2) и (3).

В настоящей статье находится вид функции $f_m(t) \in M$, доставляющей наибольшее значение функционалу (1) в общем случае и при некоторых ограничениях на функцию $h(t)$, когда задача локализуется.

2. Пусть на сегменте $[x_1, x_2]$ задано семейство R всех непрерывных функций $F(x)$, подчиненных следующим требованиям:

I $|F(x)| \leqslant m_1$,

II $|F(x) - F(u)| \leqslant m_2 |x - u|$, $x, u \in [x_1, x_2]$,

III $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = c, \quad c_1 \leqslant c \leqslant c_2$,

IV $F(x_1) = a_1$, $F(x_2) = b_1$,

V $\displaystyle c_1 \leqslant \int_{x_1}^{x} F(s)\,ds \leqslant c_2$.

Множество R может быть пусто. Это произойдет в том случае, если одна из функций

$$\Phi_M(x) = \min\{a_1 + m_2(x - x_1);\; m_1;\; b_1 + m_2(x_2 - x)\}$$

или

$$\Phi_m(x) = \max\{a_1 - m_2(x - x_1);\ -m_1;\ b_1 - m_2(x_2 - x)\}$$

(рис. 1) такова, что

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi_M(x)\,dx < c, \text{ либо } \int_{x_1}^{x_2} \Phi_m(x)\,dx > c.$$

Во всех остальных случаях множество R не пусто.
Действительно, если

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi_M(x)\,dx \geqslant c \text{ и } \int_{x_1}^{x_2} \Phi_m(x)\,dx \leqslant c,$$

то, очевидно, существование точки l_1 или точки l_2 такой, что функция $\Phi_+(x)$ (рис. 2), равная

$$\Phi_+(x) = \begin{cases} \min\{a_1 + m_2(x - x_1);\ m_1;\ m_2(x_1' - x)\} & \text{при } x_1 \leqslant x \leqslant x_1' \\ 0 & \text{при } x_1' \leqslant x \leqslant x_2', \\ \max\{m_2(x_2' - x);\ -m_1;\ b_1 - m_2(x_2 - x)\} & \text{при } x_2' \leqslant x \leqslant x_2, \end{cases} \tag{5а}$$

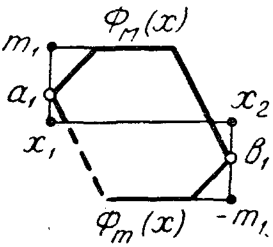

Рис. 1. Вид функций $\Phi_M(x)$ и $\Phi_m(x)$.

где $x_2 + \frac{|a_1|}{m_2} \leqslant x_1' \leqslant x_2' \leqslant x_2 - \frac{|b_1|}{m_2}$, или равная

$$\Phi_+(x) = \begin{cases} \min\{a_1 + m_2(x - x_1);\ m_1;\ b_1 - m_2(x_2 - 2x' + x)\} \text{ при } x_1 \leqslant x \leqslant x',\ b_1 - m_2(x_2 - x) \\ \text{при } x' \leqslant x \leqslant x_2, \end{cases} \tag{5б}$$

где $x_2 - \frac{|b_1|}{m_2} < x' \leqslant x_2$, при $x_1' = x_2' = l_1$, (либо, при $x' = l_2$) будет удовлетворять условиям I—IV. Однако при этом может оказаться, что

$$\int_{x_1}^{l_1} \Phi_+(x)\,dx > c_2, \tag{6}$$

т. е. не будет выполнено условие V. Тогда мы получим неравенства

$$\int_{x_1}^{x_1 + \frac{|a_1|}{m_2}} \Phi_+(x)\,dx \leqslant c_2 \tag{7}$$

и

$$c - \int_{x_2 - \frac{|b_1|}{m_2}}^{x_2} \Phi_+(x)\,dx \leqslant c_2, \tag{8}$$

так как $\Phi_+(x) \leqslant F(x)$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \frac{|a_1|}{m_2}$ и $a_1 > 0$, а также $\Phi_+(x) \geqslant F(x)$ при $x_2 - \frac{|b_1|}{m_2} \leqslant x \leqslant x_2$ и $b_1 < 0$.

Рассматривая попарно неравенства (6), (7) и (6), (8), мы придем к выводу, что существуют такие значения x_1' $\left(x_1 + \frac{|a_1|}{m_2} \leqslant x_1' \leqslant l_1\right)$ и x_2', $\left(l_1 < x_2' \leqslant x_2 - \frac{|b_1|}{m_2}\right)$, при которых функция $\Phi_+(x)$ будет удовлетворять соотношениям

$$\int_{x_1}^{x_1'} \Phi_+(x)\,dx = c - \int_{x_2'}^{x_2} \Phi_+(x)\,dx = c_2,$$

гарантирующим выполнение требования V наряду с I—IV.

Поставим вопрос о нахождении при фиксированном x величины

$$\max \int_{x_1}^{x} F(s)\,ds, \quad F \in R.$$

Оказывается, что каково бы ни было x, этот максимум достигается на функции, которая от x не зависит.

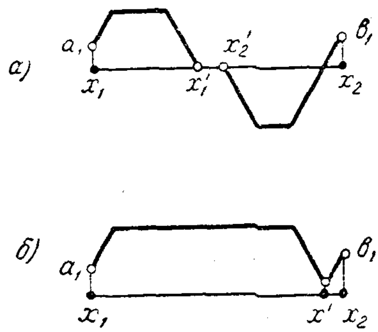

Рис. 2. а) Вид функции $\Phi_+(x)$, имеющей определение (5а). б) Вид функции $\Phi_+(x)$, имеющей определение (5б).

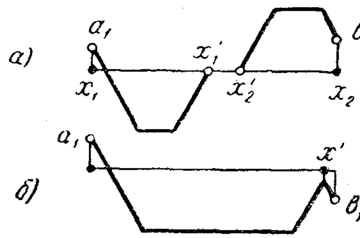

Рис. 3. а) Вид функции $\Phi_-(x)$, определяемой по аналогии с (5а). б) Вид функции $\Phi_-(x)$, определяемой по аналогии с (5б).

Определим множество V всех функций $\Phi_+(x)$ и $\Phi_-(x)$, удовлетворяющих краевым условиям IV, *а также следующим требованиям при* $x_2' > x_1'$:

$$\int_{x_1}^{x_1'} \Phi_+(x)\,dx = c_2, \quad \int_{x_1}^{x_1'} \Phi_-(x)\,dx = c_1. \tag{9}$$

Здесь функция $\Phi_-(x)$ имеет определение, аналогичное (5а) и (5б).

Функция $\Phi_-(x)$ изображена на рис. 3. Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть задано множество функций* $F(x) \in R$.

1. Существуют такие числа x_1' *и* x_2', *либо такое число* x', *что функция* $\Phi_+(x) \in V$ *принадлежит также множеству* R. *2. Справедливо соотношение*

$$\int_{x_1}^{x} \Phi_+(s)\,ds = \sup_{F \in R} \int_{x_1}^{x} F(s)\,ds.$$

Аналогичное утверждение справедливо для некоторой функции $\Phi_-(x)$.

Доказательство. Принадлежность функций $\Phi_+(x)$ и $\Phi_-(x)$ к R непосредственно вытекает из приведенных выше рассуждений. Докажем второе утверждение леммы.

Для доказательства теоремы в общем случае разделим интервал $[x_1, x_2]$ на несколько интервалов, как это сделано ниже в 1°—3°, а также рассмотрим отдельно частный случай, когда функция $\Phi_+(x)$ имеет представление (5б), (случай 4°).

1°. Пусть функция $\Phi_+(x)$ имеет представление (5а). Тогда найдутся такие две точки

$$v_1 \in [x_1,\ x_1'] \text{ и } v_2 \in [x_2',\ x_2],$$

в которых

$$\Phi_+'(v_1 - 0) = m_2 \text{ или } 0;\ \Phi_+'(v_1 + 0) = \Phi_+'(v_2 - 0) = -m_2$$

и

$$\Phi_+'(v_2 + 0) = m_2 \text{ или } 0;\ (\Phi_+'(v - 0) \text{ и } \Phi_+'(v + 0) -$$

— односторонние производные, соответственно слева и справа).

Второе утверждение леммы справедливо для интервала $[x_1,\ v_1]$, так как на нем $\Phi_+(x) \geqslant F(x)$. Оно справедливо также для интервала $[v_2,\ x_2]$, поскольку $\Phi_+(x) \leqslant F(x)$ при $v_2 \leqslant x \leqslant x_2$ и

$$\sup \int_{x_1}^{x} F(s)\,ds = \int_{x_1}^{x_2} F(s)\,ds - \inf \int_{x}^{x_2} F(s)\,ds \leqslant \int_{x_1}^{x_2} \Phi_+(s)\,ds - \int_{x}^{x_2} \Phi_+(s)\,ds =$$

$$= \int_{x_1}^{x} \Phi_+(s)\,ds, \quad v_2 \leqslant x \leqslant x_2. \tag{10}$$

Кроме того, оно автоматически выполняется для всех $x \in [x_1',\ x_2']$, так как

$$\int_{x_1}^{x} \Phi_+(s)\,ds = c_2 \geqslant \int_{x_1}^{x} F(s)\,ds.$$

2°. Переходя к интервалу $[v_1,\ x_1']$ и рассуждая от противного, допустим, что в точке $x_a \in [v_1,\ x_1']$ имеет место неравенство

$$\int_{x_1}^{x_a} \Phi_+(x)\,dx < \int_{x_1}^{x_a} F(x)\,dx. \tag{11}$$

При этом должно быть $\Phi_+(x_a) < F(x_a)$. Иначе $\Phi_+(x) \geqslant F(x)$ при всех $x \in [x_1,\ x_a]$, что влечет за собой (10). Проведем через точку с координатами $(x_a,\ F(x_a))$ прямую $y = Z(x)$ с угловым коэффициентом $-m_2$. Если она пересекает отрезок $[x_1',\ x_2']$ в точке x_3, то

$$F(x) \geqslant Z(x) > \Phi_+(x) \text{ при } x_a \leqslant x \leqslant x_3$$

и

$$\int_{x_1}^{x_3} F(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_a} F(x)\,dx + \int_{x_a}^{x_3} F(x)\,dx > \int_{x_1}^{x_3} \Phi_+(x)\,dx = c_2,$$

что противоречит V. Если же прямая $y = Z(x)$ не пересекает $[x_1',\ x_2']$, то на интервале $[x_a,\ x_2]$ будет $F(x) \geqslant \Phi_+(x)$ и мы ссылаемся на (10).

3°. По аналогии положим, что в точке $x_a \in [x_2',\ v_2]$ справедливо (11). Тогда можно считать, что

$$F(x_a) < \Phi_+(x_a),$$

так как иначе $F(x) \geqslant \Phi_+(x)$ при всех $x \in [x_a,\ x_2]$. Проведем через точку с координатами $[x_a,\ F(x_a)]$ прямую $y = Z_1(x)$ с угловым коэффициентом $-m_2$. Если она пересекает отрезок $[x_1',\ x_2']$ в точке x_3, то на отрезке

$[x_3, x_a] : F(x) < \Phi_+(x)$ и, согласно (9), будет

$$\int_{x_1}^{x_3} F(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_a} F(x)\,dx - \int_{x_3}^{x_a} F(x)\,dx > \int_{x_1}^{x_a} \Phi_+(x)\,dx - \int_{x_3}^{x_a} \Phi_+(x)\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_3} \Phi_+(x)\,dx = c_2,$$

что противоречит V. Если прямая $y = Z_1(x)$ не пересекает $[x_1', x_2']$, то при $x \in [x_1, x_a] : F(x) \leqslant \Phi_+(x)$ и

$$\int_{x_1}^{x} F(s)\,ds \leqslant \int_{x_1}^{x} \Phi_+(s)\,ds.$$

4°. Наконец, если $\Phi_+(x)$ имеет представление (5б), то на отрезке $[u_1, u_2]$, где $\Phi_+'(x) = -m_2$, найдется точка $x_b \in [u_1, u_2]$ такая, что $\Phi_+(x_b) = F(x_b)$, $\Phi_+(x) \geqslant F(x)$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_b$, $\Phi_+(x) \leqslant F(x)$ при $x_b \leqslant x \leqslant x_2$, $(\Phi_+(x), F(x) \in R)$ и мы приходим к двум случаям, рассмотренным в 1°.

Доказательство для функции $\Phi(x)$ проводится аналогично. Таким образом, лемма доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если функция* $\Phi_+(x)$, $(\Phi_-(x))$ *удовлетворяет всем требованиям* I—V, *кроме краевых условий* IV, *а в крайних точках сегмента* $[x_1, x_2]$ *или в одной из них* $\Phi_+(x_1) > F(x_1)$, $(\Phi_-(x_1) < F(x_1))$, $\Phi_+(x_2) < F(x_2)$, $(\Phi_-(x_2) > F(x_2))$, *то справедливы неравенства*

$$\int_{x_1}^{x} \Phi_+(s)\,ds \geqslant \int_{x_1}^{x} F(s)\,ds,$$

$$\int_{x_1}^{x} \Phi_-(s)\,ds < \int_{x_1}^{x} F(s)\,ds, \quad F(x) \in R.$$

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующая

Теорема 1. *Функция* $f_0(t) \in M$, *доставляющая наибольшее значение функционалу* $I(f)$, *является кусочно-квадратичной. Более того, производная* $f_0'(t)$ *в каждом интервале* $[t_k, t_{k+1}]$, *где функция* $h(t) \geqslant 0$ (*или* $h(t) \leqslant 0$), *равна функции* $\Phi_+(t)$ (*соответственно*, $\Phi_-(t)$), *принадлежащей некоторому множеству* V.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, множество M является компактом в пространстве $C[0, T]$, и, следовательно, максимум достигается на некоторой функции $f_0(t) \in M$. Рассуждая от противного, предположим, что в некотором интервале $[t_k, t_{k+1}]$, где $h(t) \geqslant 0$, $(h(t) \leqslant 0)$, производная максимизирующей функции $f_0'(t)$, удовлетворяющей краевым условиям $f_0^{(i)}(t_k) = A_i$, $f_0^{(i)}(t_{k+1}) = B_i$ $(i = 0, 1)$, отличается от функции $\Phi_+(t)$, (соответственно от $\Phi_-(t)$). Тогда, заменив в данном интервале $f_0(t)$ другой функцией

$$\varphi_+(t) = A_0 + \int_{t_k}^{t} \Phi_+(s)\,ds \text{ при } h(t) \geqslant 0,$$

либо

$$\varphi_-(t) = A_0 + \int_{t_k}^{t} \Phi_-(s)\,ds \text{ при } h(t) \leqslant 0,$$

где $\Phi_+(t)$, $(\Phi_-(t))$ принадлежит множеству R_- такому, что $-c_1 = c_2 = m_0$, $c = B_0 - A_0$, $a_1 = A_1$ и $b_1 = B_1$, мы увеличим значение функционала на величину

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t)\,[\varphi_+(t) - f_0(t)]\,dt > 0 \text{ при } h(t) \geqslant 0$$

и

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t)\,[\varphi_-(t) - f_0(t)]\,dt > 0 \text{ при } h(t) \leqslant 0,$$

что противоречит предположению о том, что $f_0(t)$ есть максимизирующая функция. Теорема доказана.

Задача максимизации функционала $I(f)$ является, вообще говоря, нелокальной: изменение функции $h(t)$ в небольшом интервале влечет изменение экстремали в удаленных от этого интервала точках. Это обстоятельство приводит к необходимости перебора решений. Однако, зная форму максимизирующей функции и воспользовавшись принципом оптимальности Р. Беллмана [4], можно построить достаточно простую вычислительную схему для определения наибольшего значения функционала на ЭЦВМ с заданной точностью. Не останавливаясь более на вычислительном аспекте задачи, мы рассмотрим два случая (в 3 и 4), когда задача локализуется, а решение соответственно существенно упрощается.

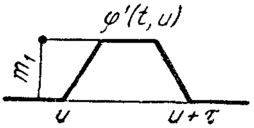

Рис. 4. Вид производной $\varphi'(t, u)$.

3. Определим функцию $\varphi(t, u)$, принадлежащую M по переменной t, полагая $\varphi(t, u) = c_1$ при $t \leqslant u$, $\varphi(t, u) = c_2$ при $t \geqslant u + \tau$ и $\varphi'(t, u) = \min\{m_2(t-u);\ m_1;\ m_2(u+\tau-t)\}$ при $u \leqslant t \leqslant u+\tau$, где число τ выбирается так, чтобы $\varphi(t, u)$ была непрерывной (рис. 4). Очевидно, всегда возможен такой выбор величины $u \in [t_a - \tau,\ t_a]$, при котором в точке $t = t_a$ будет справедливо равенство

$$\varphi(t_a, u) = -\varphi(t_a, \tau - u) = a,\ c_1 \leqslant a \leqslant c_2.$$

Более того, данное соответствие между величинами u и a является взаимнооднозначным.

В следующей лемме мы рассмотрим множество W всех функций $f(t) \in M$, удовлетворяющих условиям

I. $-m_0 \leqslant C_1 \leqslant f(t) \leqslant C_2 \leqslant m_0$,

II. $f(t_a) = a,\ C_1 \leqslant a \leqslant C_2$.

Лемма 2. *Функция $\varphi(t, u)$, заданная так, что $c_1 = C_1$, $c_2 = C_2$ и $\varphi(t_a, u) = a$, реализует неравенство* $\operatorname{sgn}(t - t_a)\,[\varphi(t, u) - f(t)] \geqslant 0$, $f(t) \in W$.

Доказательство. Согласно I существуют такие числа $t_c \leqslant t_a$ и $t_d \geqslant t_a$, где производная $f'(t_c) = f'(t_d) = 0$, так как иначе невозможно удовлетворить требованию I для W. В точке $t = t_a$ справедливо неравенство $\varphi'(t_a, u) \geqslant f'(t_a)$. Если t_a принадлежит интервалу $[u_1', u_2']$, где $\varphi'(t, u) = m_1$, то утверждение очевидно. Если же t_a находится в интервале $[u_2', u+\tau]$, где $\varphi''(t, u) = -m_2$, либо в интервале $[u, u_1']$, где $\varphi''(t, u) = m_2$, то, полагая $\varphi'(t_a, u) < f'(t_a)$, в результате таких же рассуждений, как и при доказательстве леммы 1, 2° и 3°, прийдем к неравенству

$$\varphi'(t, u) < f'(t) \text{ при } u \leqslant t \leqslant u_1', \text{ либо, при } u_2' \leqslant t \leqslant u+\tau.$$

Но тогда мы будем иметь

$$f(u+\tau)=f(t_a)+\int\limits_{t_a}^{u+\tau} f'(t)\,dt>\varphi(t_a,\ u)+\int\limits_{t_a}^{u+\tau}\varphi'(t,\ u)\,dt=C_2,$$

либо

$$f(u)=f(t_a)-\int\limits_{u}^{t_a} f'(t)\,dt<\varphi(t_a,\ u)-\int\limits_{u}^{t_a}\varphi'(t,\ u)\,dt=C_1,$$

что противоречит I. Имея в виду неравенство $\varphi'(t_a,\ u)\geqslant f'(t_a)$, а также применяя лемму 1 и следствие 1 к функциям $f(t)\in W$; $\varphi(t,\ u)$ в интервалах $[t_c,\ t_a]$ и $[t_a,\ t_d]$, получим $\varphi(t,\ u)\geqslant f(t)$ при $t_a\leqslant t\leqslant t_d$ и $\varphi(t,\ u)\leqslant f(t)$ при $t_c\leqslant t\leqslant t_d$. При $t<t_c$: $\varphi(t,\ u)=C_1\leqslant f(t)$, при $t>t_d$: $\varphi(t,\ u)=C_2\geqslant f(t)$. Лемма доказана.

В следующей теореме, относящейся к первому случаю локализации, мы рассмотрим множество $M_0\subset M$ функций $f(t)$, удовлетворяющих начальным условиям $f(0)=f'(0)=0$, а также функцию $\varphi_j^*(t,\ \theta)=\varphi(t,\ u)$ при значениях $C_1=-j\cdot m_0$, $c_2=m_0$, $(j=0,\ 1)$. Соответствующее значение τ для функции $\varphi_j^*(t,\ \theta)$ обозначим через τ_j, $(j=0,\ 1)$. Положим также для определенности $h(t)\geqslant 0$ в нечетных интервалах.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

I. $t_2\geqslant t_1+\tau_0$, $t_{k+1}\geqslant t_k+\tau_1$ $(k>1)$,

II. $\theta_1\geqslant t_1+\tau_0$, $\theta_{k+1}\geqslant\theta_k+\tau_1$ $(k=1,\ \ldots\ n-3)$, $\theta_{n-2}+\tau_1\leqslant T$,

где θ_k — *точка интервала* $[t_k,\ t_{k+1}]$, *в которой интеграл*

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+2}} h(t)\cdot\varphi_j^*(t,\ \theta)\,dt$$

как функция θ *принимает свое наибольшее значение при четном* k *и наименьшее при нечетном* k. *Тогда функция* $f_0(t)$, *равная* $\varphi_0^*(t,\ t_1)$ *при* $t_1\leqslant t\leqslant t_1+\tau_0$, $(-1)^k\varphi_1^*(t,\ \theta_k)$ при $\theta_k\leqslant t\leqslant\theta_k+\tau_1(k=1,\ \ldots,\ n-2)$ и $(-1)^k m_0$ при $t_1+\tau_0\leqslant t\leqslant\theta_1$, $\theta_k+\tau_1\leqslant t\leqslant\theta_{k+1}(k=1,\ \ldots,\ n-2)$ и $\theta_{n-2}+\tau_1\leqslant t\leqslant T$ *принадлежит* M_0 *и доставляет* $I(f)$ *наибольшее значение.*

Доказательство. В силу ограничений I на расстояния между точками перемены знака $h(t)$ существует непустое множество Q кусочно-квадратичных функций $f_m(t)$, удовлетворяющих требованиям теоремы 1 и условию: $(-1)^k\cdot f_m'(t_k)\leqslant 0$ при всех значениях $f_m(t_k)\in[-m_0,\ m_0]$, $(k=1,\ \ldots\ n-1)$. Любая из функций этого множества может быть построена с помощью определенных выше функций $\varphi(t,\ u)$ (или $-\varphi(t,\ u)$).

Отсюда на основании следствия 1 (из леммы 1) приходим к заключению, что максимизирующая функция при ограничениях I будет принадлежать Q. Более того, производная максимизирующей функции будет иметь единственное представление (5а) в нечетных и аналогичное представление в четных интервалах $[t_k,\ t_{k+1}]$. В самом деле, если бы в первом интервале $[t_1,\ t_2]$ производная $f_0'(t)$ имела вид (5б), то мы пришли бы к противоречию:

$$f_0(t_2)=\int\limits_{t_1}^{t_2}\Phi_+(t)\,dt<\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi_0^*(t,\ t_0)\,dt=m_0.$$

Следовательно, наше утверждение справедливо для первого интервала. Оно справедливо также и для второго интервала $[t_2,\ t_3]$, так как если бы производная $f_0'(t) = \Phi_-(t)$ при $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$ имела представление, аналогичное (5б), мы снова пришли бы к противоречивому неравенству

$$f_0(t_3) = f_0(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} \Phi_-(t)\,dt < m_0 - \int_{t_2}^{t_3} \varphi_1^*(t, t_2)\,dt = -m_0,$$

(так как $f_k(t_2) \leqslant 0$). Далее по аналогии можем распространить наше утверждение на все остальные интервалы $[t_k, t_{k+1}]$. Но из (5а) следует, что существуют такие точки $t = t_k'$, $t_k \leqslant t_k' \leqslant t_{k+1}$, где первая производная $f'(t_k') = 0$, вторая производная справа $f''(t_k' + 0) = (-1)^k \cdot m_2$, а сама функция достигает своего наибольшего значения в нечетных и наименьшего в четных интервалах $[t_k, t_{k+1}]$.

Пусть максимизирующая функция $f_0(t)$ принадлежит некоторому множеству $V_1 \subset M_0$ функций $f(t)$, у которых наибольшее (или наименьшее) значение в каждом нечетном (четном) интервале $[t_k, t_{k+1}]$ равно $C_k (k = 1, \ldots n-1)$, а в точках $t = t_k$ функция $f(t_k) = a_k$, $(k = 2, \ldots n-2)$. Применяя лемму 2 для каждого интервала $[t_k', t_{k+1}']$ и учитывая приведенные в п. 1° настоящей теоремы соображения относительно формы функции $f_0(t)$, мы прийдем к следующему: $f_0(t) = (-1)^k \varphi(t, t_k')$ при $t_k' \leqslant t \leqslant t_k' + \tau_k$ и $f_0(t) = C_k$ при $t_k' + \tau_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}'$, где $\varphi(t, t_k')$ есть функция $\varphi(t, u)$, у которой $u = t_k'$, $c_1 = (-1)^{k-1} C_{k-1}$, $c_2 = (-1)^{k-1} C_k$ и $\tau = \tau_k$.

Соответствующее значение функционала будет равно

$$I(f_0) = \int_{t_1}^{t_2} h(t) \cdot \varphi(t, t_1)\,dt + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k \int_{t_k'}^{t_k'+\tau_k} h(t) \cdot \varphi(t, t_k')\,dt +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-2} C_k \int_{t_k'+\tau_k}^{t_{k+1}'} h(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} h(t) \cdot \varphi(t, t_1)\,dt +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k \int_{t_k}^{t_{k+2}} h(t) \cdot \varphi(t, t_k')\,dt - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_k h(t)\,dt. \tag{12}$$

Здесь $t_{n-1}' = t_n = T$.

Зафиксируем все числа C_k и придадим последовательно a_k все возможные значения от $-m_0$ до m_0. Это повлечет за собой соответствующие изменения значений t_k' в выражении для максимизирующей функции, а следовательно, и самого значения функционала $I(f)$, $f \in V_1$. Оказывается, что при фиксированных C_k функционал $I(f)$, как функция a_k $(k = 1, \ldots n-1)$, достигает своего наибольшего значения тогда, когда соответствующие значения $t_k' (k = 1, \ldots n-2)$ будут равны $t_k = \theta_k$, где θ_k определены условием II данной теоремы. Действительно, согласно (12) значения $I(f)$ как функции t_k' (соответственно a_k) будут зависеть от величины интеграла

$$\int_{t_k}^{t_{k+2}} h(t) \cdot \varphi(t, t_k')\,dt = \int_{t_k}^{t_{k+2}} h(t) \cdot \varphi_m(t, t_k')\,dt + [m_0 - (-1)^k C_{k-1}]. \tag{13}$$

$$(k = 1, \ldots n-2)$$

Здесь $\varphi_m(t, t_k') = \varphi(t, t_k') - [m_0 - (-1)^k C_{k-1}]$.

Определим функцию $\varphi_m(t, \theta_k)$, получающуюся в результате смещения $\varphi_m(t, t'_k)$ по оси абсцисс на величину $\theta_k - t'_k$ и функцию $z_k(t)$, равную нулю при $t \leqslant \theta'_k$ и $t \geqslant \theta_k + \tau_1$ и имеющую производную

$$z'_k(t) = \min\{m_2(t - \theta'_k); \quad l_1; \quad m_2(\theta_k + \tau_k - t)\}.$$

Здесь числа θ'_k и l_1 выбраны так, чтобы выполнялось условие

$$\varphi'_m(t, \theta_k) + z'_k(t) = [\varphi_1^*(t, \theta_k)]' \text{ при } \theta_k \leqslant t \leqslant \theta_k + \tau_1.$$

Производная $z'_k(t)$ изображена на рис. 5. Очевидно, и

$$\varphi_m(t, \theta_k) + z_k(t) = \varphi_1^*(t, \theta_k). \tag{14}$$

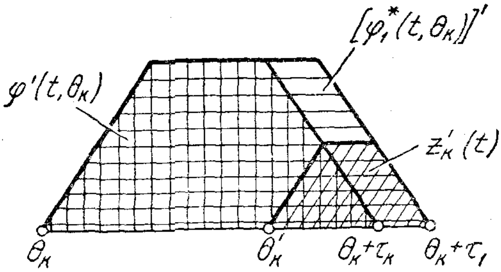

Рис. 5. Вид производной $Z'_k(t)$.

Применяя лемму 2 к функциям $f(t) \in M_0$ и

$\varphi_1^*(t, u_k)$, где $\varphi_1^*(t, u_k) = -m_0$ при $t \leqslant u_k$,

$\varphi_1^*(t, u_k) = m_0$ при $t \geqslant u_k + \tau_1$ и

$\varphi_1^*(t_k, u_k) = f(t_k)$,

мы можем условие II теоремы заменить более общим условием:

$$\int_{t_k}^{t_{k+2}} h(t)\cdot f(t)\,dt \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+2}} h(t)\cdot \varphi_1^*(t, u_k)\,dt \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+2}} h(t)\cdot \varphi_1^*(t, \theta_k)\,dt,$$

откуда, воспользовавшись (14), получим

$$\int_{t_k}^{t_{k+2}} h(t)[\varphi_m(t, t'_k) + z_k(t)]\,dt \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+2}} h(t)[\varphi_m(t, \theta_k) + z_k(t)]\,dt.$$

Последнее неравенство, согласно (13), равносильно следующему:

$$\int_{t_k}^{t_{k+2}} h(t)\varphi(t, t'_k)\,dt \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+2}} h(t)\cdot\varphi(t, \theta_k)\,dt.$$

Таким образом, максимизирующая функция $f_0(t)$ принадлежит некоторому множеству $V_2 \subset V_1$, для которого выполняются условия: $f'_0(t) = 0$ при $\theta_k + \tau_k \leqslant t \leqslant \theta_{k+1}$ и $f'_0(t) = \varphi'(t, \theta_k)$ при $\theta_k \leqslant t \leqslant \theta_k + \tau_k$. С другой стороны, согласно теореме 1, функция $f_0(t)$ принадлежит также некоторому множеству V, удовлетворяющему условию (9). Но согласно условию II, существует одна и только одна функция $f_0(t) \in M_0$, определенная условиями теоремы, принадлежащая одновременно этим двум множествам. Теорема доказана.

В рассмотренном случае задача полностью локализуется: она сводится к отысканию экстремумов функции одной переменной.

4°. Переходя ко второму случаю локализации, определим функцию $\Phi_j^*(t, \theta)$, полагая

$$\underset{(j=0,\,1)}{\Phi_j^*(t, \theta)} = \begin{cases} -m_1\cdot j \text{ при } t \leqslant \theta, \\ m_2(t-\theta) - m_1\cdot j \text{ при } \theta \leqslant t \leqslant \theta + (1+j)\dfrac{m_1}{m_2}, \\ m_1 \text{ при } t \geqslant \theta + \dfrac{2m_1}{m_2}. \end{cases}$$

Обозначим

$$\int_t^T h(s)\,ds = H(t).$$

Пусть, далее, $s_1, \ldots s_m$ — точки перемены знака $H(t)$. Для определенности будем считать $H(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant S_1$. Тогда справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\text{I. } S_1 \geqslant \frac{m_1}{m_2},\ S_{k+1} \geqslant S_k + \frac{2m_1}{m_2}\ (k = 1, 2, \ldots m-2).$$

$$\text{II. } \frac{m_1}{m_2} \leqslant \theta_1 \leqslant \frac{m_0}{m_1},\ \theta_k + \frac{2m_1}{m_2} \leqslant \theta_{k+1} \leqslant \frac{m_0}{m_1} + 2\cdot(-1)^k \Sigma (-1)^j \theta_j + \frac{1}{2}[1+(-1)^k]\frac{m_1}{m_2},$$

где $\theta_k (k = 1, \ldots m-2)$ *точка интервала* $[S_k, S_{k+1}]$, в которой

$$\int_{s_k}^{s_{k+2}} H(t)\cdot\Phi_1^*(t,\theta)\,dt$$

как функция θ *принимает свое наибольшее значение при* k *четном, и наименьшее при* k *нечетном, а* $\theta_{m-1} = T$. *Тогда функция* $f_1(t)$, *у которой производная равна* $\Phi_0^*(t, t_1)$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \frac{m_1}{m_2}$, $(t_1 = 0)$; $(-1)^k\Phi_1^*(t, \theta_k)$ *при* $\theta_k \leqslant t \leqslant \theta_k + \frac{2m_1}{m_2}$ и $(-1)^k\cdot m_1$ *при* $\theta_0 + \frac{m_1}{m_2} \leqslant t \leqslant \theta_1$ и $\theta_k + \frac{2m_1}{m_2} \leqslant t \leqslant \theta_{k+1}$ $(k = 1, \ldots m-2)$, *принадлежит* M_0 *и доставляет функционалу* $I(f)$ *наибольшее значение.*

Условие II теоремы равносильно двум неравенствам

$$\theta \geqslant \frac{m_1}{m_2},\quad \theta_{k+1} \geqslant \theta_k + \frac{2m_1}{m_2},\ (k = 1, \ldots m-2)$$

и

$$\theta_1 \leqslant \frac{m_0}{m_1},\quad \theta_k \leqslant \frac{m_0}{m_1} + 2(-1)^k \sum_{j=1}^{k} (-1)^j\theta_j + \frac{1}{2}[1-(-1)^k]\cdot\frac{m_1}{m_2}.$$

Теорема 3 при ограничениях I и II*a* для функции $H(t)$ является частным случаем теоремы 2. В этом легко убедиться, если применить теорему 2 к задаче максимизации функционала

$$I_1(f') = \int_0^T H(t)\cdot f'(t)\,dt = I(f)$$

при ограничениях I и II*a* для функции $H(t)$ и следующих условиях для $f'(t): |f'(t)| \leqslant m_1$, $|f''(t)| \leqslant m_2$ и $|f''(t) - f''(s)| \leqslant m_3|t-s|$, полагая затем $m_3 = \infty$. В то же время функция $f_1(t)$, доставляющая наибольшее значение функционалу $I_1(f')$ при условиях I и II*a*, будет также удовлетворять неравенству $|f_1(t)| \leqslant m_0$, так как по условию Iб теоремы все экстремумы функции $f(t)$ и ее значение в точке T не будут превосходить по модулю числа m_0.

Таким образом, задача максимизации функционала в рассмотренных двух случаях сведена к определению экстремумов функций одной переменной в каждом интервале $[t_k, t_{k+1}]$.

В то же время в обоих случаях ограничения на функцию $h(t)$ типичны для многих современных систем управления, в том числе для систем с узким спектром пропускания частот.

В заключение автор приносит глубокую благодарность И. М. Глазману и В. И. Мацаеву за ценные замечания, сделанные при подготовке рукописи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Булгаков. ДАН СССР, 51, 1946.
2. Б. В. Булгаков, Т. В. Кузовков. Прикладная математика и механика, т. 14, вып. 2, 1950.
3. Л. С. Гноенский. «Прикладная математика и механика», т. XXV, вып. 2, 1961.
4. Р. Беллман, С. Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования. Изд-во «Наука», М., 1965.