ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СПОСОБОВ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

А. Д. Мышкис, П. А. Мышкис

Понятие несобственного интеграла в n-мерном пространстве, введенное в работах [1, 2], основано на заданном способе аппроксимации изнутри области интегрирования. Здесь мы рассмотрим один из наиболее естественных способов такой аппроксимации; будучи довольно общим, он в то же время допускает полностью разобраться в вопросе об эквивалентности различных способов несобственного интегрирования.

Пусть K — непустое открытое множество n-мерного пространства E_n точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$; по K будет производиться интегрирование. Примем, что на K задана непрерывная функция $h(x)>0$, причем для любого $t>0$ множество H_t точек K, в которых $h(x) \geqslant t$, компактно в себе. (Другими словами, $h(x) \to 0$, если точка x уходит к границе множества K, к которой, в случае неограниченности K, причисляется и бесконечно удаленная точка пространства E_n). Каждая такая функция $h(x)$ определяет в K способ несобственного интегрирования. Именно, пусть в K задана локально суммируемая функция $f(x)$; тогда несобственным интегралом от $f(x)$ по K «по способу, определяемому функцией h» называется предел

$$\int_K f(x)\, d_h x = \lim_{t \to +0} \int_{H_t} f(x)\, dx,$$

если он существует (и конечен).

Пусть функция $h'(x)$ обладает теми же свойствами, что h, а $H'_{t'} = E\{x \mid h'(x) \geqslant t'\}\ (t'>0)$.

Теорема. *Для того чтобы h и h' определяли один и тот же класс несобственно интегрируемых функций $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы каждое множество H_t для достаточно малых $t>0$ было множеством $H'_{t'}$ и наоборот.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Для доказательства его необходимости допустим, что оно не выполнено. Будем обозначать меру Лебега и множество точек плотности для множества A соответственно через $\mu(A)$ и $\Pi\{A\}$.

Рассмотрим сначала «основной случай», когда существует последовательность пар множеств H_{t_i}, $H'_{t'_i}$ $(t_i \to +0,\ t'_i \to +0)$, «несравнимых по μ», т. е. для которых $\mu(H_{t_i}\setminus H'_{t'_i})>0$, $\mu(H_{t'_i}\setminus H_{t_i})>0$. Без ограничения общности можно предполагать, что для каждого $i=1,2,\ldots$ имеет место по крайней мере одно из двух условий:

1а) $H_{t_i}\cap[K\setminus(H_{t_i}\cup H'_{t'_i})]\neq\Lambda$;

и

1б) $H_{t_i}\cap[\Pi\{H'_{t'_i}\setminus H_{t_i}\}]\neq\Lambda$;

2а) $H'_{t'_i}\cap[K\setminus(H_{t_i}\cup H'_{t'_i})]\neq\Lambda$

и

2б) $H'_{t'_i}\cap[\Pi\{H_{t_i}\setminus H'_{t'_i}\}]\neq\Lambda$

(квадратными скобками обозначено замыкание в K). В самом деле, соотношение 1а или 2а выполняется в зависимости от того, что какая-либо из точек границы $H_{t_i}\cup H'_{t'_i}$ принадлежит H_{t_i} или $H'_{t'_i}$. Чтобы удовлетворить соотношению 1б или 2б, надо выбрать кикую-либо точку p границы $H_{t_i}\cap H'_{t'_i}$ и, если p принадлежит границе H_{t_i}, то достаточно мало уменьшить t'_i, а если p принадлежит границе $H'_{t'_i}$, то достаточно мало уменьшить t_i. Допустим теперь, что из условий 1а и 2а выполнено только одно, например, первое; тогда обязательно выполнено условие 1б, так как в противном случае, рассматривая любую граничную точку множества $[\Pi\{H'_{t'_i}\setminus H_{t_i}\}]$, легко прийти к противоречию.

Перейдя к подпоследовательности пар H_{t_i}, $H'_{t'_i}$, можно считать, что для всех этих пар выполняется одно и то же условие 1 или 2, например 1, и, кроме того, каждая точка множества $H_{t_i}\cup H'_{t'_i}$ строго внутренняя для $H_{t_{i+1}}\cap H'_{t'_{i+1}}$. Выберем для каждого $i=1,2,\ldots$ совокупность значений $t_i^{(1)}>t_i^{(2)}>\ldots>t_i^{(i^2)}$ так, чтобы

$$t_i^{(1)}<t_i^{(0)}=t_i,\quad H_{t_i^{(i^2)}}\subseteq H_{t_{i+1}}\cap H'_{t'_{i+1}},$$
$$\mu((H_{t_i^{(m)}}\setminus H_{t_i^{(m-1)}})\cap H'_{t'_i})>0,$$
$$\mu((H_{t_i^{(m)}}\setminus H_{t_i^{(m-1)}})\cap(K\setminus H'_{t'_i}))>0.$$

Для этого надо взять $t_i^{i^2}<t_i$ произвольным достаточно близким к t_i, а после построения $t_i^{(m)}$ взять $t_i^{(m-1)}<t_i$ достаточно близким к t_i. Построим теперь функцию $f(x)$ в K по формулам

$$f(x)=0\ \ (x\in H_{t_1},\ x\in H_{t_{i+1}}\setminus H_{t_i^{i^2}},\ i=1,2,\ \ldots\ ),$$
$$f(x)=(i\mu((H_{t_i^{(m)}}\setminus H_{t_i^{(m-1)}})\cap H_{t'_i}))^{-1}$$
$$(x\in(H_{t_i^{(m)}}\setminus H_{t_i^{(m-1)}})\cap H_{t'_i});$$
$$f(x)=-(i\mu((H_{t_i^{(m)}}\setminus H_{t_i^{(m-1)}})\cap(K\setminus H'_{t'_i}))^{-1}$$
$$(x\in(H_{t_i^{(m)}}\setminus H_{t_i^{(m-1)}})\cap(K\setminus H'_{t'_i}),$$
$$(i=1,2,\ \ldots\ ;\ m=1,\ \ldots\ ,\ i^2).$$

Она измерима и локально ограничена в K, причем

$$\left|\int_{H_t} f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{i}\quad(t_{i+1}\leqslant t\leqslant t_i),\quad \int_{H'_{t'_i}} f(x)\,dx=i.$$

Поэтому $\int_K f(x)\,d_hx=0$, тогда как $\int_K f(x)\,d_{h'}x$ не существует.

Расмотрим теперь «неосновной случай». Без ограничения общности можно предполагать существование последовательности множеств $H'_{t'_i}(t'_i \to +0)$, не являющихся множествами H_t. Обозначим через H_{t_i} наименьшее из множеств $H_t \supseteq H'_{t'_i}$. Тогда H_{t_i} содержит и некоторую окрестность множества $H'_{t'_i}$, так как в противном случае, уменьшив t'_i достаточно мало, а затем уменьшив t_i достаточно мало, мы придем к несравнимым по μ множествам H_{t_i} и $H'_{t'_i}$, т. е. к «основному случаю». Из тех же соображений выводим, что при $t > t_i$ будет $H_t \subseteq H'_{t'_i}$.

Переходя к подпоследовательности пар H_{t_i}, $H'_{t'_i}$, можно считать, что $H_{t_i} \subseteq H'_{t'_{i+1}}$ $(i=1,2,\ldots)$. Выберем $\tau_i < t'_i$ так, чтобы

$$H'_{\tau_i} \subset H_{t_i}, \quad \mu(H_{t_i} \setminus H'_{\tau_i}) > 0 \text{ и положим}$$

$$f(x) = 0 \quad (x \in H_{t_1},\ x \in H'_{t'_{i+1}} \setminus H_{t_i},\ i = 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$f(x) = -i\,(\mu(H_{t_i} \setminus H'_{\tau_i}))^{-1} \quad (x \in H_{t_i} \setminus H'_{\tau_i},\ i = 1,2,\ldots);$$

$$f(x) = i\,(\mu(H'_{\tau_i} \setminus H'_{t'_i}))^{-1} \quad (x \in H'_{\tau_i} \setminus H'_{t'_i},\ i = 1,2,\ldots).$$

Тогда $\int\limits_{H_t} f(x)\,dx \equiv 0$, т. е. $\int\limits_K f(x)\,d_h x = 0$, тогда как $\int\limits_{H'_{\tau_i}} f(x)\,dx = i$, т. е. $\int\limits_K f(x)\,d_{h'} x$ не существует. Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Если два способа несобственного интегрирования, приведенные выше, определяют один и тот же класс интегрируемых функций, то и значения интегралов совпадают, т. е. эти два способа полностью эквивалентны.*

Это утверждение в какой-то степени напоминает известную теорему Мазура — Орлича о суммировании числовых рядов (см., например, [3], стр. 155 и 367]).

Следствие 2. *Для эквивалентности двух способов несобственного интегрирования, определенных функциями h и h', необходимо и достаточно существование непрерывной возрастающей функции $t' = \psi(t)$ $(t > 0)$, для которой $\psi(+0) = 0$ и*

$$h'(x) \equiv \psi(h(x)) \tag{1}$$

при всех достаточно малых значениях h.

Замечание 1. М. А. Шубин обратил наше внимание на то, что теорема непосредственно распространяется на случай, когда K является метрическим или даже топологическим пространством с (быть может, несобственной) мерой, согласованной с топологией. При этом надо требовать, чтобы непустые компактные подмножества K имели конечную меру и непустую границу, а открытые подмножества K имели положительную меру.

Замечание 2. Было бы интересно найти условие того, что все функции, интегрируемые «по способу h», интегрируемы и по способу h'. Правдоподобно, что этим условием служит существование соотношения (1), где от функции $\psi(t) > 0$ взамен возрастания требуется равномерная ограниченность числа компонент связности множества $E\{t \mid \psi(t) \geqslant \alpha\}$ при всех $\alpha > 0$.

Замечание 3. Указанный здесь способ несобственного интегрирования *аналогичен суммированию расходящегося ряда при помощи подпоследовательности частных сумм. Более полным континуаль-*

ным аналогом матриц Теплица служит определение несобственного интеграла как предела

$$\int\limits_{\mathring{K}} f(x)\, d_Q x \underset{\text{def}}{=} \lim_{t \to +0} \int\limits_{K} f(x)\, Q(x,\ t)\, dx.$$

Общая теория таких интегралов еще не развита; ряд конкретных результатов в одномерном случае см. в [4]. гл. V, где имеются дальнейшие указания. Как отметил С. Г. Крейн, в этой теории могут оказаться полезными методы, развитые им и Б. Я. Левиным в работах [5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Мышкис, Э. И. Вигант, А. Я. Лепин. Несобственные интегралы в n-мерном пространстве. Труды III Всесоюзного матем. съезда, 1 (1956), 91—92.

2. Э. И. Лепина. Несобственные интегралы в n-мерном пространстве. Уч. зап. Латв. ун-та, 20 (1958), 105—124.

3. Р. Кук. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Физматгиз, 1960.

4. Г. Харди. Расходящиеся ряды. Изд-во иностр. лит., М., 1951.

5. С. Г. Крейн, Б. Я. Левин. О сходимости сингулярных интегралов. ДАН СССР, 60 : 1 (1948), 13—16.

6. С. Г. Крейн, Б. Я Левин. О сильной представимости функций сингулярными интегралами. ДАН СССР, 60 : 2 (1948), 195—198.