# ПЕРЕНЕСЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ МАЗУРА—ОРЛИЧА ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ МАТРИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА РЕГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

*Н. А. Давыдов*

Известна ([1], см. также [2] и [3], стр. 375) теорема Мазура — Орлича о том, что если регулярное линейное матричное преобразование

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k \tag{1}$$

суммирует какую-либо расходящуюся ограниченную последовательность $S_k$, то оно суммирует и некоторую неограниченную последовательность. Матричному преобразованию вида (1) соответствует интегральное преобразование вида

$$t(x) = \int_0^{\infty} c(x, t)\, S(t)\, dt. \tag{2}$$

Предположим, что преобразование (2) удовлетворяет следуюшим трем условиям:

$$\int_0^{\infty} c(x, t)\, dt \to 1 \quad (x \to \infty), \tag{3}$$

$$\int_0^{x_0} |c(x, t)|\, dt \to 0 \quad (x \to \infty) \tag{4}$$

для каждого фиксированного $x_0 > 0$,

$$\int_0^{\infty} |c(x, t)|\, dt < H < \infty \; (x \geqslant x_0^*), \tag{5}$$

где $H$ не зависит от $x$.

При условиях (3—5) преобразование (2) регулярно в классе ограниченных функций, т. е. из равенства

$$\lim_{x \to \infty} S(x) = S \tag{6}$$

следует равенство

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^\infty c(x, t) S(t)\, dt = S \tag{7}$$

для каждой функции $S(t)$, ограниченной в промежутке $[0, \infty)$ ([4], стр. 71).

Возникает вопрос, переносится ли теорема Мазура—Орлича для регулярных линейных матричных преобразований вида (1) на регулярные линейные интегральные преобразования вида (2). Ответ дает

**Теорема**. *Если интегральное преобразование* (2), *удовлетворяющее условиям* (3—5), *удовлетворяет еще и условию: для любого* $X > x_0^*$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $Y(X, \varepsilon) > 0$ *такое, что для всех* $y \geqslant Y$ *и всех* $x \in [x_0^*, X]$ *справедливо неравенство*

$$\int_y^\infty |c(x, t)|\, dt < \varepsilon, \tag{8}$$

*то из равенства* (7), *имеющего место для какой-нибудь функции* $S_0(t)$, *ограниченной в промежутке* $[0, \infty)$ *и не стремящейся к* $S$ *при* $x \to \infty$ *по множеству полной меры, следует существование функции* $S_1(t)$, *неограниченной на каждом промежутке* $(t_0, \infty)$ *и не эквивалентной никакой ограниченной функции на этом промежутке и такой, что*

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^\infty c(x, t) S_1(t)\, dt = 0. \tag{9}$$

Заметим, что в силу (5) для любого $X > x_0^*$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $Y(X, \varepsilon) > 0$ такой, что для $y \geqslant Y(X, \varepsilon)$

$$\int_y^\infty |c(X, t)|\, dt < \varepsilon.$$

Смысл условия (8) состоит в том, что оно требует существование такого $Y(X, \varepsilon)$, что неравенство (8) справедливо для всех $x \in [x_0^*, X]$. В случае регулярных матричных преобразований условие, соответствующее условию (8), всегда выполняется. В самом деле, если преобразование (1) регулярно, то ([3], стр. 79)

$$\sum_{k=0}^\infty |a_{nk}| < H < \infty \; (n \geqslant n_0^*), \tag{10}$$

где $H$ не зависит от $n$. Поэтому для каждого $n$, $n_0^* \leqslant n \leqslant n_0$, и каждого $\varepsilon > 0$ существует $K(n, \varepsilon) > 0$ такое, что для $k \geqslant K(n, \varepsilon)$ $\sum_{i=k}^\infty |a_{ni}| < \varepsilon$. Так как чисел $n$, содержащихся в промежутке $[n_0^*, n_0]$, конечное число, то, взяв в качестве $K_1(n_0, \varepsilon) = \max_{n_0^* \leqslant n \leqslant n_0} K(n, \varepsilon)$, получим

$$\sum_{i=k}^\infty |a_{ni}| < \varepsilon \tag{8'}$$

для всех $k \geqslant K_1(n_0, \varepsilon)$ и всех $n \in [n_0^*, n_0]$. Неравенству (8′) для матричных преобразований соответствует неравенство (8) для интегральных преобразований. Если (8′) следует из (10), то (8) из (5), вообще говоря, не следует. Поэтому выполнения условия (8) приходится требовать особо.

Доказательство теоремы. Наше доказательство будет проведено методом В. М. Даревского ([3], стр. 375). Если для некоторой ограниченной функции $S_0(t)$, не имеющей предела при $x \to \infty$ по множеству полной меры, справедливо (7), то для функции $\varepsilon(t) = S_0(t) - S$ справедливо равенство

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^\infty c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt = 0, \quad \text{где} \quad \sup_{t \geqslant 0} |\varepsilon(t)| = N < \infty. \tag{11}$$

Построим две последовательности действительных чисел $x_k$ и $y_k$. Числа $x_1$ и $y_1$ возьмем такими, чтобы

$$\left| \int_0^\infty c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt \right| < 1$$

для $x \geqslant x_1$, $x_1 > x_0^*$, и

$$\int_{y_1}^\infty \left| c(x, t) \right| dt < 1$$

для

$$x \in [x_0^*, x_1], \quad y_1 > x_0^*.$$

Пусть $x_{k-1}$ и $y_{k-1}$ уже выбраны. Возьмем $x_k > x_{k-1} + 1$ таким, чтобы для $x \geqslant x_k$

$$\left| \int_0^\infty c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt \right| < \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \int_0^{y_{k-1}} \left| c(x, t) \right| dt < \frac{1}{k}. \tag{12}$$

Число $y_k > y_{k-1} + 1$ возьмем таким, чтобы

$$\int_{y_k}^\infty \left| c(x, t) \right| dt < \frac{1}{2^{k-1}k} \quad \text{для} \quad x \in [x_0^*, x_k]. \tag{13}$$

Промежуток $[0, \infty)$ разобьем на промежутки $y_k \leqslant t < y_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $y_0 = 0$. Рассмотрим функцию

$$S_1(t) = \varepsilon(t)\, \lambda(t),$$

где

$$\lambda(t) = \sqrt{k+1} \quad \text{для} \quad y_k \leqslant t < y_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что функция $S_1(t)$ не ограничена на каждом промежутке $[t_0, \infty)$ и не эквивалентна никакой ограниченной функции на этом промежутке. Покажем, что для функции $S_1(t)$ справедливо равенство (9).

Пусть $x_k \leqslant x < x_{k+1}$ $(k > 1)$, тогда

$$\int_0^\infty c(x, t)\, S_1(t)\, dt = \int_0^{y_{k-1}} c(x, t)\, S_1(t)\, dt +$$

$$+ \sqrt{k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt - \sqrt{k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt +$$

$$+ \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x, t)\, S_1(t)\, dt + \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_{y_i}^{y_{i+1}} c(x, t)\, S_1(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{y_{k-1}} c(x, t) S_1(t)\, dt + \sqrt{k} \int_{y_{k-1}}^{y_{k+1}} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt +$$

$$+ (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{\infty} \sqrt{i+1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt.$$

Поэтому в силу (5), (11 — 13) имеем

$$\left| \int_0^{\infty} c(x, t) S_1(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^{y_{k-1}} |c(x, t)|\, |S_1(t)|\, dt + \sqrt{k} \left| \int_{y_{k-1}}^{y_{k-1}} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt \right| +$$

$$+ (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \int_{y_k}^{y_{k+1}} |c(x, t)|\, |\varepsilon(t)|\, dt +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{\infty} \sqrt{i+1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} |c(x, t)|\, |\varepsilon(t)|\, dt < N \frac{\sqrt{k}}{k} + \sqrt{k} \left| \int_{y_{k-1}}^{y_{k+1}} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt \right| +$$

$$+ (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) NH + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\sqrt{i+1}\, N}{2^{i-1} \cdot i}. \tag{14}$$

Так как для $x_k \leqslant x < x_{k+1}$ в силу (12) и (13)

$$\left| \int_{y_{k-1}}^{y_{k+1}} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt \right| \leqslant \left| \int_0^{\infty} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt \right| + \left| \int_0^{y_{k-1}} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt \right| +$$

$$+ \left| \int_{y_{k+1}}^{\infty} c(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{k} + \frac{N}{k} + \frac{N}{2^k (k+1)} \to 0 \ (k \to \infty),$$

а

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\sqrt{i+1}\, N}{2^{i-1} \cdot i} < \frac{N}{2^{k-1}} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

то из (14) имеем (9). Теорема доказана. Заметим, что существование интеграла $\int_0^{\infty} c(x, t) S_1(t)\, dt$ для каждого $x > x_0^*$ следует из доказательства.

Частным случаем преобразования (2) является преобразование вида

$$t(x) = \int_0^{x} c(x, t) S(t)\, dt. \tag{15}$$

Условия (3 — 5) для этого преобразования запишутся так:

$$\int_0^{x} c(x, t)\, dt \to 1 \quad (x \to \infty), \tag{3'}$$

$$\int_0^{x_0} |c(x, t)|\, dt \to 0 \quad (x \to \infty), \tag{4'}$$

для каждого фиксированного $x_0$,

$$\int_0^x |c(x, t)|\,dt < H < \infty \quad (x \geqslant x_0^*), \tag{5'}$$

где $H$ не зависит от $x$.

Условие (8) для преобразования (15), как легко видеть, выполнено. Отсюда на основании теоремы получается

Следствие. Если преобразование (15), удовлетворяющее условиям (3′ — 5′), обладает тем свойством, что существует конечный предел

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x c(x, t)\, S_0(t)\, dt = S$$

для какой-нибудь функции $S_0(t)$, ограниченной в промежутке $[0, \infty)$ и не стремящейся к $S$ при $x \to \infty$ по множеству полной меры, то существует функция $S_1(t)$, неограниченная на каждом промежутке $[t_0, \infty)$ и не эквивалентная никакой ограниченной функции на этом промежутке и такая, что

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x c(x, t)\, S_1(t)\, dt = 0.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. S. Mazur, W. Orlicz. Sur les methodes lineares de sommation. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris), 196 (1933), 32—34.
2. В. М. Даревский. Внутренне совершенные методы суммирования. «Изв. АН СССР, серия матем.», 10 (1946), 97—103.
3. Р. Кук. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Физматгиз, М., 1960.
4. Г. Харди. Расходящиеся ряды. Изд-во иностр. лит., М. 1951.