ОБОБЩЕНИЕ МЕРСЕРОВОЙ ТЕОРЕМЫ КНОППА — БЕЛИНФАНТЕ

Н. А. Давыдов

1. В 1929 году М. Белинфанте [1], обобщая мерсерову теорему К. Кноппа, доказал следующее предложение: если $p_n > 0$, $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и при $n \to \infty$ $P_n \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty$, $\alpha_n \to \alpha \neq 0$, $\beta_n \to \beta$, то из равенства

$$\lim_{n \to \infty} \left[\alpha_n S_n + \beta_n \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k S_k}{P_n}\right] = (\alpha + \beta) \cdot S$$

следует

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \quad (S \neq \infty).$$

(Теорема К. Кноппа получается при $\alpha_n = \alpha > 0$, $\beta_n = 1 - \alpha$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$).

В настоящей заметке покажем, что условия в теореме М. Белинфанте можно несколько ослабить при сохранении ее утверждения. Справедлива

Теорема. *Пусть* α_n *и* β_n — *последовательности действительных чисел,* $\alpha_n + \beta_n \to \gamma > 0$.

Если $\alpha_n \geqslant \alpha > 0$, *то из равенства*

$$t_n \equiv \alpha_n S_n + \beta_n \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k S_k}{P_n} = O(1) \quad (n \to \infty),$$

где

$$P_n \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k, \ p_0 > 0, \ p_n \geqslant 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

следует равенство

$$S_n = O(1) \quad (n \to \infty).$$

Если $0 < \alpha \leqslant \alpha_n \leqslant \beta < \infty$, *то из равенства*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\alpha_n S_n + \beta_n \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k S_k}{P_n}\right) = \gamma S,$$

где

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty \ (n \to \infty),\ p_0 > 0,\ p_n \geqslant 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ (S \neq \infty).$$

2. Для доказательства теоремы нам понадобится одно вспомогательное предложение, имеющее самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть $\alpha_n \geqslant 0$ и β_n — две последовательности действительных чисел, $\alpha_n + \beta_n \to \gamma > 0$, $P_n \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k$, $p_0 > 0$, $p_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Если

$$t_n \equiv \alpha_n S_n + \beta_n \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k S_k}{P_n} = O(1) \quad (n \to \infty), \tag{1}$$

то

$$m_n \equiv \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k S_k}{P_n} = O(1) \quad (n \to \infty).$$

Если последовательность t_n сходится, то сходится и последовательность m_n.

Доказательство леммы. Сначала докажем частный случай леммы, когда $\alpha_n + \beta_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Без ограничения общности последовательность S_n можем считать действительной. Доказательство будем вести методом К. Кноппа [2, стр. 137].

Для каждого n имеет место одно из двух неравенств

а) $S_n < m_n$ или б) $S_n \geqslant m_n$.

Так как

$$P_{n-1}(m_n - m_{n-1}) = p_n(S_n - m_n),$$

то из неравенства а) для $n \geqslant 1$ следует неравенство

$$а')\ m_{n-1} \geqslant m_n,$$

а из неравенства б) — неравенство

$$б')\ m_{n-1} \leqslant m_n.$$

Пусть $t_n = O(1)$. Покажем, что $m_n = O(1)$. Действительно, если бы $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, m_n = +\infty$, то для любого числа $M > 0$ найдется номер $\nu > 1$ такой, что $m_\nu > M$. Если при $n = \nu$ имеет место неравенство а), то в силу а')

$$m_{\nu-1} \geqslant m_\nu > M.$$

Если при $n = \nu, \nu - 1, \ldots, 2$ имеет место неравенство а), то $m_1 > M$, что для больших M невозможно. Поэтому для одного из чисел ν, $\nu -$ $- 1, \ldots 2$ имеет место неравенство б). Пусть $n = q$ есть наибольшее из чисел ν, $\nu - 1, \ldots, 2$, для которых имеет место неравенство б). Тогда $m_q > M$ и, следовательно, $S_q \geqslant m_q > M$. Отсюда

$$t_q = \alpha_q S_q + (1 - \alpha_q) m_q = m_q + \alpha_q (S_q - m_q) > M,$$

что для больших M невозможно, так как t_n — ограниченная последовательность. Таким образом, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} m_n < \infty$. Покажем, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} m_n > -\infty$. Допустив противное, для числа $M > 0$ найдется номер $\nu > 1$ такой, что $m_\nu < -M$. Если при $n = \nu$ имеет место неравенство б), то в силу б')

$$m_{\nu-1} \leqslant m_\nu < -M.$$

Если при $n = \nu, \ \nu - 1, \ \ldots, \ 2$ имеет место неравенство б), то $m_1 < < -M$, что для больших M невозможно. Поэтому для одного из чисел $\nu, \ \nu - 1, \ \ldots, \ 2$ справедливо неравенство а). Пусть $n = q$ есть наибольшее из чисел $\nu, \ \nu - 1, \ \ldots, \ 2$, для которых справедливо а). Тогда $m_q < -M$ и, следовательно, $S_q \leqslant m_q < -M$. Отсюда

$$t_q = \alpha_q S_q + (1 - \alpha_q) m_q = m_q + \alpha_q (S_q - m_q) < -M,$$

что для больших M невозможно, так как t_n — ограниченная последовательность. Первая часть леммы доказана. Пусть t_n сходится. Покажем, что m_n сходится. Допустим, что m_n расходится, т. е.

$$\underline{m} \equiv \underline{\lim_{n\to\infty}}\, m_n < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, m_n \equiv \overline{m},$$

возьмем числа h и H, удовлетворяющие неравенствам

$$\underline{m} < h < H < \overline{m}.$$

Тогда существует бесконечное множество чисел ν и μ таких, что

$$m_\nu < h \text{ и } m_\mu > H, \quad \mu > \nu > 1. \tag{2}$$

Если для $n = \mu$ справедливо неравенство а), то

$$m_{\mu-1} \geqslant m_\mu > H.$$

Если для всех чисел $n = \mu, \ \mu - 1, \ \ldots, \ \nu + 1$ имеет место неравенство а), то $m_\nu > H > h$, что противоречит первому из неравенств (2). Поэтому для одного из чисел $n = \mu, \ \mu - 1, \ \ldots, \ \nu + 1$ имеет место неравенство б). Пусть $n = r$ есть наибольшее из чисел $\mu, \ \mu - 1, \ \ldots, \ \nu + 1$, для которых справедливо неравенство б). Тогда $m_r > H$ и, следовательно

$$S_r \geqslant m_r > H.$$

Отсюда

$$t_r \equiv \alpha_r S_r + (1 - \alpha_r) m_r = m_r + \alpha_r (S_r - m_r) > H. \tag{3}$$

Так как ν может быть сколь угодно большим, то неравенство (3) выполняется для бесконечного множества значений r. Таким же образом можно показать, что и неравенство $t_i < h$ выполняется для бесконечного множества значений i. Это вместе с предыдущим противоречит условию, что t_n сходится. Лемма для случая $\alpha_n + \beta_n = 1 \ (n = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots)$ доказана.

Нетрудно видеть, что частный случай леммы справедлив и тогда, когда $\alpha_n + \beta_n = 1$ для $n \geqslant n_0$. Рассмотрим теперь общий случай. Если справедливо (1), то

$$\frac{t_n}{\gamma_n} = \frac{\alpha_n}{\gamma_n} S_n + \frac{\beta_n}{\gamma_n} m_n = O(1) \quad (n \to \infty),$$

где

$$\gamma_n = \alpha_n + \beta_n.$$

Так как

$$\frac{\alpha_n}{\gamma_n} + \frac{\beta_n}{\gamma_n} = 1, \tag{4}$$

то по доказанному имеем $m_n = O(1)\ (n \to \infty)$. Если же последовательность $t_n = \alpha_n S_n + \beta_n m_n$ сходится, то сходится и последовательность

$$\frac{t_n}{\gamma_n} = \frac{\alpha_n}{\gamma_n} S_n + \frac{\beta_n}{\gamma_n} m_n.$$

Так как справедливо (4), то по доказанному сходится последовательность m_n. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Пусть выполнены условия первой части теоремы. Тогда по лемме $m_n = O(1)\ (n \to \infty)$, и так как $\alpha_n \geqslant \alpha > 0$, то $S_n = O(1)\ (n \to \infty)$. Если выполнены условия второй части теоремы, то по лемме

$$\lim_{n \to \infty} m_n = S^*.$$

Из равенств

$$t_n \equiv \alpha_n S_n + \beta_n m_n \to \gamma S \quad (n \to \infty),$$
$$\alpha_n + \beta_n \equiv \gamma_n \to \gamma \quad (n \to \infty)$$

имеем

$$\alpha_n (S_n - m_n) = t_n - \gamma m_n + \tilde{o}(1) \to \gamma S - \gamma S^* \quad (n \to \infty), \tag{5}$$

поэтому

$$S_n - m_n = \frac{\gamma S - \gamma S^* + \varepsilon_n}{\alpha_n},$$

где $\varepsilon_n \to 0\ (n \to \infty)$. Отсюда

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k S_k}{P_n} - \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k m_k}{P_n} = \frac{(\gamma S - \gamma S^*) \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\alpha_k}}{P_n} + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k}}{P_n} \tag{6}$$

В силу регулярности (R, p_n) — метода [2, стр. 79] левая часть равенства (6) стремится к нулю при $n \to \infty$. Так как

$$\frac{1}{\beta} \leqslant \frac{1}{\alpha_k} \leqslant \frac{1}{\alpha},$$

то

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\alpha_k}}{P_n} \geqslant \frac{1}{\beta}, \qquad \frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n} p_k \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k}\right|}{P_n} \leqslant \frac{1}{\alpha P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot \varepsilon_k = o(1).$$

и из (6) получаем $S = S^*$. Так как $\alpha_n \geqslant \alpha > 0$, то из (5) имеем: $S_n - m_n \to 0\ (n \to \infty)$ и, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. J. Belinfante. Über einen Grenzwertsatz aus der Theorie der unendlichen Folgen. Math. Ann., 1929, 101, 312—315.

2. Г. Харди. Расходящиеся ряды. Изд-во иностр. лит., М., 1951.