ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ В. РУДИНА

Н. С. Ландкоф и Н. Т. Там Бак

В. Рудину принадлежит следующая теорема (см., например, [1], стр. 117):

Пусть K замкнутое множество на единичной окружности $|z|=1$, имеющее меру 0, а $f(z)$ — любая (комплекснозначная) функция, непрерывная на K. Тогда существует функция $F(z)$, регулярная при $|z|<1$ и непрерывная при $|z|\leqslant 1$, являющаяся продолжением $f(z)$.

В настоящей заметке аналогичная теорема устанавливается для ограниченных односвязных областей G, удовлетворяющих следующим условиям:

(T_1) *каждая точка z_0 границы ∂G области G принадлежит только одному простому концу;*

(T_2) *в любой окрестности каждой точки $z_0 \in \partial G$ содержатся точки, внешние для области G.*

Точная формулировка теоремы будет дана ниже (§ 3).

Заметим, что условие (T_1) представляется вполне естественным, поскольку без него теорема, аналогичная теореме В. Рудина, будет неверна. Это видно из следующего простого примера.

Пусть G есть круг $|z|<1$ с разрезом по отрезку $0 \leqslant x \leqslant 1$. В качестве K возьмем счетное множество, состоящее из точек $x_k = k^{-1}$, $k = 2, 3, \ldots$, и точки 0, и положим $f(0)=0$, $f(x_k) = k^{-1} \ln k$. Эта функция непрерывна на K, и, тем не менее, не существует функции $F(z)$, регулярной в G и непрерывной в $\overline{G}$, являющейся продолжением $f(z)$. Действительно, такая функция была бы регулярной во всем круге $|z|<1$, что невозможно, так как при $k \to \infty$ $x_k \to 0$, а

$$\frac{f(x_k)-f(0)}{x_k} \to \infty .$$

Что же касается условия (T_2), то заметим лишь, что оно не вытекает из (T_1). Это можно усмотреть из примера одной области, построенной (для других целей) Каратеодори (см. [2], стр. 370).

В дальнейшем односвязные области, удовлетворяющие условиям (T_1) и (T_2), будем для краткости называть областями типа T.

§ 1. Топологические понятия

Замыкание $\overline{G}$ области G мы будем рассматривать как топологическое пространство, в котором топология индуцирована топологией плоскости.

Пусть ζ^* — простой конец G. Для области типа T ζ^* можно рассматривать как замкнутое подмножество ∂G, которое либо сводится к одной точке (регулярный случай), либо представляет собой континуум (сингулярный случай).

Напомним, что $\zeta^* = \bigcap\limits_1^\infty \overline{B}_n$, где B_n — часть G, не содержащая фиксированной точки $O \in G$ и определяемая сечением γ_n; при этом $\operatorname{diam}\gamma_n \to 0$, $\gamma_n \bigcap \zeta^* = \varnothing$ и $B_{n+1} \subset B_n$.

Обозначим $\partial^* G$ множество простых концов G. Если в ∂G ввести отношение эквивалентности R, полагая $\zeta_1 R \zeta_2$, если ζ_1 и ζ_2 принадлежат одному простому концу, то $\partial^* G = \partial G / R$. Через $\zeta^* = \varphi(\zeta)$ будем обозначать каноническое отображение ∂G на $\partial^* G$.

Множество $G^* = G \bigcup \partial^* G$ можно, согласно Каратеодори (см. напр. [5], стр. 717), превратить в компактное отделимое топологическое пространство, задавая для любой точки $\zeta^* \in G^*$ фундаментальную систему окрестностей $\mathfrak{W}(\zeta^*)$ следующим образом:

(*i*) если $\zeta^* \in G$, то $\mathfrak{W}(\zeta^*)$ состоит из кружков с центром в ζ^*, содержащихся в G;

(*ii*) если $\zeta^* \in \partial^* G$, то $\mathfrak{W}(\zeta^*)$ состоит из множеств $\overline{B}_n$, фигурирующих в представлении ζ^* (точнее, из $\overline{B}_n/R$).

Это топологическое пространство будем обозначать тем же символом G^*.

Лемма 1. *Топология G^* совпадает с фактор-топологией $\overline{G}/R$.*

Доказательство. Напомним, что открытыми множествами $\overline{G}/R$ называются те множества ω, для которых $\varphi^{-1}(\omega)$ открыто в $\overline{G}$. Здесь φ обозначает каноническое отображение $\overline{G}$ на $\overline{G}/R$. Покажем, что такое множество ω открыто в G^*. Прежде всего,

$$\varphi^{-1}(\omega) = \Omega \bigcap \overline{G},$$

где Ω — открытое множество плоскости. Пусть $\zeta^* \in \omega$; можно, очевидно, считать, что $\zeta^* \in \partial^* G$. Покажем, что ζ^* является внутренней (в топологии G^*) точкой ω. Действительно, ζ^*, как точечное множество в $\overline{G}$, яляется замкнутым и входит в Ω. Поэтому и все B_n, начиная с некоторого, будут принадлежать Ω, т. е. $\overline{B}_n \subset \varphi^{-1}(\omega)$, а $\overline{B}_n/R \subset \omega$.

Убедимся, что множество, открытое в G^*, будет открытым в $\overline{G}/R$. Для этого достаточно установить, что всякая окрестность $V(\zeta^*)$ содержит окрестность ζ^* в топологии $\overline{G}/R$ или, что то же самое,

$$\overline{B}_n \supset \Omega \bigcap \overline{G}, \quad \zeta^* \subset \Omega.$$

Пусть ζ любая точка ζ^*, и $K_r(\zeta)$ — открытый круг радиуса r с центром в ζ. Покажем, что при достаточно малом r

$$K_r(\zeta) \bigcap G \subset \overline{B}_n.$$

В самом деле, иначе мы имели бы последовательность точек $\{z_m\} \subset G$, $z_m \overline{\in} \overline{B}_n$, причем $z_m \to \zeta$ в $\overline{G}$. В силу компактности G^* мы можем считать, что в G^* $z_m \to \zeta_1^* \in \partial^* G$. При этом $\zeta_1^* \neq \zeta^*$, ибо $z_m \overline{\in} \overline{B}_n$, и $\zeta \in \zeta_1^*$. Но это противоречит условию (T_1).

Заметим, что для найденного значения $r = r(\zeta)$

$$K_r(\zeta) \bigcap \overline{G} \subset \overline{B}_n,$$

и поэтому, положив $\Omega = \bigcup\limits_{\zeta \in \zeta^*} K_r(\zeta)$, получим требуемое.

Следствия. 1) *Каноническое отображение* φ *пространства* $\overline{G}$ *на* G^* *является непрерывным.*

2) *Если* $f(\zeta^*)$ — *непрерывная комплекснозначная функция на* G^*, *то* $f[\varphi(\zeta)]$ *будет непрерывной функцией на* G.

3) *Отношение эквивалентности* R *является замкнутым, т. е. если* F — *замкнутое множество в* G, *то* $\varphi(F)$ *будет замкнуто в* G^*.

Для проверки этого нужно показать (см. [6], стр. 101), что всякий простой конец ζ^*, как множество в G, обладает фундаментальной системой окрестностей, насыщенных по R. Из леммы 1 следует, что система $\mathfrak{B}(\zeta^*)$, введенная выше, удовлетворяет этому условию.

4) Если F замкнуто в $\overline{G}$, то $\varphi^{-1}[\varphi(F)]$, т. е. насыщение F будет также замкнуто в $\overline{G}$. Следовательно, F замкнуто в $\varphi^{-1}[\varphi(F)]$, и всякая функция $f(\zeta)$, непрерывная на F, может быть непрерывно продолжена на $\varphi^{-1}[\varphi(F)]$.

§ 2. Теорема Каратеодори и следствия из нее

Известная теорема Каратеодори [2] может быть сформулирована следующим образом.

Пусть функция $w = f(z)$ *конформно отображает односвязную область* G *на круг* $C\colon |w| < 1$. *Тогда эта функция может быть продолжена до гомеоморфизма* G^* *на* $|w| \leqslant 1$.

Это позволяет, естественно, определить гармоническую меру множества $E^* \subset \partial^* G$. Будем называть E^* измеримым, если измеримо множество $f(E^*)$. Это определение не зависит, очевидно, от выбора отображающей функции $f(z)$.

Гармонической мерой измеримого множества $E^* \subset \partial^* G$ будем называть функцию

$$\omega(z, E^*; G) = \omega[w, f(E^*); C].$$

Нетрудно видеть, что множество E^* будет иметь нулевую гармоническую меру (и это определение не зависит от положения точки $z \in G$) в том и только в том случае, если для всякой ограниченной гармонической в G функции $h(z)$ условия $\lim\limits_{z \to \zeta^*} h(z) = 0$, $\zeta^* \in \partial^* G \setminus E^*$ влекут за собой тождество $h(z) \equiv 0$.

Если G область типа T, то мы будем говорить также о гармонической мере множества $E \subset \partial G$, понимая под этим гармоническую меру $\varphi(E) \subset \partial^* G$.

Заметим, что при таком определении гармоническая мера E совпадает с гармонической мерой $\varphi^{-1}[\varphi(E)]$, т. е. насыщения E.

В силу следствия 3), § 1, всякое замкнутое подмножество ∂G будет измеримым.

Лемма 2. *Пусть* $F \subset \partial G$ — *насыщенное замкнутое множество гармонической меры нуль. Тогда существует функция* $g(z)$, *непрерывная в* $\overline{G}$, *голоморфная в* G *и удовлетворяющая условиям*

$$|g(z)| = 1, \quad z \in F,$$
$$|g(z)| < 1, \quad z \in \overline{G} \setminus F.$$

Доказательство. Согласно следствию 3), § 1, $\varphi(F)$ будет замкнутым множеством в $\partial^* G$, а $f[\varphi(F)]$ будет замкнутым множеством на окружности $|w| = 1$, имеющим нулевую гармоническую меру.

Как известно, (см. [1], стр. 117) существует функция $h(w)$, непрерывная при $|w| \leqslant 1$, голоморфная при $|w| < 1$ и такая, что $|h(w)| = 1$ при $w \in F_1$, и $|h(w)| < 1$ в остальных точках замкнутого круга $|w| \leqslant 1$.

В таком случае функция

$$g^*(z) = h[f(z)]$$

будет непрерывной в G^*, голоморфной в G, причем $|g^*(z)| \leqslant 1$ и $|g^*(z)| = 1$ в точности на $\varphi(F) \subset \partial^* G$. Теперь достаточно положить

$$g(z) = g^*[\varphi(z)], \quad z \in \overline{G},$$

и в силу следствия 1), § 1, получим требуемую функцию.

§ 3. Обобщение теоремы В. Рудина

Следуя, в основном, схеме доказательства теоремы Рудина, предположенной К. Гофманом (см. [1], стр. 117—119), докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть G — односвязная область типа T, $F \subset \partial G$ — произвольное замкнутое множество нулевой гармонической меры $\psi(z)$ — непрерывная на F функция. Тогда существует функция $\Psi(z)$, непрерывная* в $\overline{G}$, *голоморфная в G и совпадающая на F с $\psi(z)$.*

Доказательство. Пусть $K = \varphi^{-1}[\varphi(F)]$ есть насыщение множества F. Согласно следствию 4), § 1, K — также замкнутое подмножество ∂G, и $\psi(z)$ можно непрерывно продолжить на K. Продолженную функцию будем снова обозначать $\psi(z)$, и заметим, что согласно § 2, множество K также имеет нулевую гармоническую меру.

Обозначим $A_{\overline{G}}$ множество всех функций, непрерывных в $\overline{G}$ и голоморфных в G, а A_K — множество всех непрерывных на K функций, которые могут быть продолжены до функции из $A_{\overline{G}}$. С помощью функции $g(z)$, построенной в лемме 2, можно доказать, что A_K есть замкнутое линейное многообразие в пространстве C_K всех непрерывных на K функций с равномерной метрикой. Это делается точно так же, как в случае круга (см. [1], стр. 118). Напомним это рассуждение.

Обозначим A_K° подпространство $A_{\overline{G}}$, состоящее из функций, равных нулю на K. Покажем, что A_K изоморфно $A_{\overline{G}} / A_K^\circ$ и отсюда будет следовать полнота, а значит и замкнутость A_K.

Для произвольной $h(z) \in A_{\overline{G}}$ имеем

$$\sup_K |h(z)| = \lim_{n \to \infty} \sup_{\overline{G}} |g^n(z) h(z)|.$$

Но $g^n(z) h(z) = h(z) + \alpha_n(z)$, где $\alpha_n(z) \in A_K^\circ$.

Поэтому

$$\sup_K |h(z)| = \inf_{\alpha \in A_K^\circ} \sup_K |h(z) + \alpha(z)|.$$

Но выражение в правой части есть норма элемента $h(z) + A_K^\circ$ фактор-пространства $A_{\overline{G}} / A_K^\circ$, и мы получили требуемый изоморфизм.

Утверждение теоремы может быть записано в виде $A_K \equiv C_K$. Согласно предыдущему достаточно установить, что A_K плотно в C_K.

Пусть $\psi(z) \in C^K$; покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ существует рациональная функция $r(z)$, удовлетворяющая условию

$$|\psi(z) - r(z)| < \varepsilon, \ z \in K.$$

Так как K не имеет внутренних точек, то согласно теореме Мергеляна (см. [3], стр. 116), достаточно установить существование такой константы $\lambda > 0$, что для любой точки $z \in K$ и любого δ, $0 < \delta < \delta_0$,

$$\gamma_z^\delta(CK) > \lambda\delta.$$

Здесь $\gamma_z^\delta(CK)$ обозначает аналитическую емкость части CK, принадлежащей кругу $\{\zeta : |\zeta - z| < \delta\}$.

Обозначим Ω (очевидно, единственную) компоненту CK, которая содержит область G. Заметим, что $\partial\Omega = K$. В самом деле, если $z \in K$, то любой круг с центром в z содержит точки G, а значит и точки Ω.

Пусть число δ меньше диаметра области Ω. Тогда

$$CK \cap \{\zeta : |\zeta - z| < \delta\} \supset \Omega \cap \{\zeta : |\zeta - z| < \delta\},$$

а последнее множество содержит простую дугу l диаметра $> \frac{1}{2}\delta$. Действительно, достаточно произвольную точку ζ_0 непустого пересечения $\Omega \cap \{\zeta : |\zeta - z| < \frac{l}{2}\delta\}$ соединить внутри Ω простой дугой с какой-либо точкой $\Omega \cap \{\zeta : |\zeta - z| > \delta\}$ и обозначить l часть этой дуги от ζ_0 до первой точки пересечения с окружностью $|\zeta - z| = \delta$. Но аналитическая емкость простой дуги l, как известно (см. [3], стр. 106), не меньше $\frac{1}{4}$ ее диаметра, и поэтому

$$\gamma_z^\delta(CK) > \frac{l}{8}\delta.$$

Обозначим $a_i \overline{\in} K$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ полюсы дроби $r(z)$. Если $a_i \overline{\in} G$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то $r(z) \in A_{\overline{G}}$. Если же какие-либо полюсы $a_i \in \overline{G}$, то очевидно, эти $a_i \in \Omega$. Так как K имеет нулевую гармоническую меру, то Ω содержит точки ∂G, и в силу (T_2) точки $C\overline{G}$. Пусть a_0 — такая точка. Тогда, как известно (см. [4], стр. 28), можно найти новую рациональную функцию $r_1(z)$, удовлетворяющую неравенству

$$|r(z) - r_1(z)| < \varepsilon, \ z \in K,$$

у которой все рассматриваемые полюсы будут перенесены в точку a_0. Таким образом, $r_1(z) \in A_{\overline{G}}$, и

$$|\psi(z) - r_1(z)| < 2\varepsilon, \ z \in K.$$

Это показывает, что A_K плотно в C_K, и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. Изд-во иностр. лит., М., 1963.

2. C. Carathéodory. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann., 73 (1912).

3. В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев. Конструктивная теория функций комплексного переменного. Изд-во «Наука», М. — Л., 1964.

4. Дж. Л. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Изд-во иностр. лит., М., 1961.

5. П. С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики, т. II. ГТТИ, М. — Л., 1951.

6. Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. Физматгиз, М., 1958.