О ПРОБЛЕМЕ МНОЖИТЕЛЕЙ Г. СЕГЕ

В. А. Фильштинский

1, Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_n$ тригонометрических многочленов $T_n(\theta)$ порядка не выше n, удовлетворяющих неравенству

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |T_n(\theta)| \equiv \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \left|\sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\theta}\right| \leqslant 1.$$

Пусть, кроме того, даны произвольные числа $\{\lambda_k\}_{-n}^{n}$ (вообще говоря, комплексные). Требуется найти величину

$$m_\lambda = \sup_{\mathfrak{M}_n} \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \left|\sum_{-n}^{n} \lambda_k c_k e^{ik\theta}\right|.$$

Эта задача была поставлена Г. Сеге в работе [1]. Там же была доказана следующая теорема.

Если для каждого вещественного значения θ

$$\varphi(\theta) = \lambda_0 + 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \cos \nu\theta \geqslant 0$$

и

$$|f(\theta)| \leqslant A \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

где

$$f(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + \cdots + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

то для каждого вещественного значения θ будет также

$$\left[\sum_{1}^{n} \lambda_{n-\nu} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)\right]^2 +$$
$$+ \left[\sum_{1}^{n} \lambda_{n-\nu} (b_\nu \cos \nu\theta - a_\nu \sin \nu\theta)\right]^2 \leqslant \lambda_0^2 A^2.$$

Эта теорема была обобщена С. Н. Бернштейном в [2]. В дальнейшем мы приведем эквивалентную формулировку теоремы Г. Сеге и выведем ее из более общих результатов.

Задача отыскания величины m_λ связана с обобщением неравенства С. Н. Бернштейна для тригонометрических многочленов. Действительно, если в выражении для величины m_λ подставить $\lambda_k = ik$, то теорема С. Н. Бернштейна состоит в том, что $m_\lambda = n$.

2. В этом n° задача определения величины m_λ сводится к некоторой двойственной задаче, решение которой приводит ко многим интересным следствиям.

В дальнейшем θ пробегает интервал $[0, 2\pi]$.

Лемма.

$$m_\lambda = \sup_{\mathfrak{M}_n} \max_\theta \Big| \sum_{-n}^{n} c_k \lambda_k e^{ik\theta} \Big| = \sup_\theta \sup_{\mathfrak{M}_n} \Big| \sum_{-n}^{n} c_k \lambda_k e^{ik\theta} \Big| .$$

Лемма вытекает из непрерывности функций

$$\varphi(c_{-n}, \ldots, c_0, c_1, \ldots, c_n) = \max_\theta \Big| \sum_{-n}^{n} c_k \lambda_k e^{ik\theta} \Big| ,$$

$$\psi(\theta) = \sup_{\mathfrak{M}_n} \Big| \sum_{-n}^{n} c_k \lambda_k e^{ik\theta} \Big|$$

и ограниченности областей изменения аргументов у функций $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$: θ находится в интервале $[0, 2\pi]$, а $|c_k| \leqslant 1$, так как, если

$$T_n(\theta) = \sum_{-n}^{n} c_k \lambda_k e^{ik\theta} \in \mathfrak{M}_n, \text{ то } \sum_{-n}^{n} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\theta} \Big|^2 d\theta \leqslant 1.$$

Будем рассматривать функционалы $f_\xi(T_n)$, определенные на тригонометрических многочленах порядка не выше n равенством:

$$f_\xi(T_n) = \sum_{-n}^{n} c_k \lambda_k e^{ik\xi}, \quad T_n(\theta) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\theta}, \quad \xi \in [0, 2\pi].$$

Функционал f_ξ линейный и непрерывный. Пространство многочленов порядка не выше n вложено в пространство $C_{[0, 2\pi]}$. Поэтому функционал f_ξ продолжается как линейный и непрерывный на пространство $C_{[0, 2\pi]}$ с сохранением нормы (теорема Хана — Банаха). По теореме Рисса полученный функционал F_ξ представим в виде интеграла Стилтьеса

$$F_\xi(\varphi) = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\sigma_\xi(\theta),$$

где $\sigma_\xi(\theta)$ — функция ограниченной вариации и

$$\| f_\xi \| = \| F_\xi \| = \operatorname{Var} \sigma_\xi(\theta). \tag{1}$$

В частности,

$$f_\xi(T_n) = F_\xi(T_n) = \int_0^{2\pi} \sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\theta} d\sigma_\xi(\theta) = \sum_{-n}^{n} c_k \lambda_k e^{ik\xi}.$$

Полагая в этом равенстве $c_\nu = 1$, $c_k = 0$ для $k \neq \nu$, получим

$$\lambda_\nu e^{i\nu\xi} = \int_0^{2\pi} e^{i\nu\theta} d\sigma_\xi(\theta), \qquad (\nu = 0 \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \ \pm n). \tag{2}$$

Ясно, что любое продолжение функционала f_ξ в пространстве $C_{[0, 2\pi]}$ должно удовлетворять условию (2). Таким образом, если ввести обозначение

$$R_n(\xi) = \Big\{ \sigma(\theta) : \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\sigma(\theta) = \lambda_k e^{ik\xi} \quad k = 0, \ \pm 1, \ \ldots, \ \pm n \Big\},$$

то равенство (1) можно переписать так:

$$\| f_\xi \| = \sup_{\mathfrak{M}_n} \Big| \sum_{-n}^{n} c_k \lambda_k e^{ik\xi} \Big| = \inf_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta) = \operatorname{Var} \sigma_\xi(\theta).$$

Но по лемме величина m_λ равна $\sup\limits_{\theta} \sup\limits_{\mathfrak{M}_n} \Big| \sum\limits_{-n}^{n} c_k \lambda_k e^{ik\theta} \Big|$, поэтому

$$m_\lambda = \sup_\xi \| f_\xi \| = \sup_\xi \inf_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta). \tag{3}$$

Полученный вывод сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.

$$m_\lambda = \sup_{0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi} \inf_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta).$$

3. Если потребовать, чтобы $\lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k$, то выражение для величины m_λ можно упростить, а именно, верна

Теорема 2. *Если* $\lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k$, *то* $\inf\limits_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta)$ *от* $\xi \in [0, 2\pi]$ *не зависит и, следовательно, равен*

$$\inf_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta) = m_\lambda.$$

Доказательство. Если $\lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k$, то функция $\sigma_\xi(\theta) \in R_n(\xi)$, для которой

$$\inf_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta) = \operatorname{Var} \sigma_\xi(\theta),$$

может быть выбрана вещественной. Действительно, пусть $\sigma_\xi(\theta)$ есть одна из функций класса $R_n(\xi)$, на которых рассматриваемый infimum достигается и пусть

$$\sigma_\xi(\theta) = \sigma^{(1)}(\theta) + i\sigma^{(2)}(\theta),$$

где $\sigma^{(1)}(\theta)$ и $\sigma^{(2)}(\theta)$ вещественны. Тогда

$$\lambda_k e^{ik\xi} = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\sigma_\xi(\theta) = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\sigma^{(1)}(\theta) + i \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\sigma^{(2)}(\theta)$$

и

$$\lambda_{-k} e^{-ik\xi} = \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\sigma^{(1)}(\theta) + i \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\sigma^{(2)}(\theta).$$

С другой стороны,

$$e^{-ik\xi} \lambda_{-k} = \overline{\lambda_k e^{ik\xi}} = \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\sigma^{(1)}(\theta) - i \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\sigma^{(2)}(\theta).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\sigma^{(1)}(\theta) = \lambda_k e^{ik\xi}, \quad \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\sigma^{(2)}(\theta) = 0, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n).$$

В таком случае

$$\sigma^{(1)}(\theta) = \operatorname{Re} \sigma_\xi(\theta) \in R_n(\xi),$$

а так как

$$\operatorname{Var} \sigma_\xi(\theta) \geqslant \operatorname{Var} \sigma^{(1)}(\theta), \text{ то } \inf_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta) = \operatorname{Var} \sigma^{(1)}(\theta).$$

Будем считать теперь функцию $\sigma_\xi(\theta)$ вещественной. Разложим ее на разность двух неубывающих функций

$$\sigma_\xi(\theta) = \tau_\xi(\theta) - \nu_\xi(\theta),$$

причем так, что

$$\operatorname{Var} \sigma_\xi(\theta) = \operatorname{Var} \tau_\xi(\theta) + \operatorname{Var} \nu_\xi(\theta).$$

Построим моменты

$$a_k e^{ik\xi} = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\tau_\xi(\theta), \quad b_k e^{ik\xi} = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\nu_\xi(\theta),$$
$$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \ \pm n).$$

Очевидно, что

$$a_k e^{ik\xi} - b_k e^{ik\xi} = \lambda_k e^{ik\xi}.$$

Так как

$$d\tau_\xi(\theta) \geqslant 0, \ d\nu_\xi(\theta) \geqslant 0,$$

то определители

$$D_k(\xi) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 e^{i\xi} & \ldots & a_k e^{ik\xi} \\ a_{-1} e^{-i\xi} & a_0 & \ldots & a_{k-1} e^{i(k-1)\xi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{-k} e^{-ik\xi} & a_{-k+1} e^{-i(k-1)\xi} & \ldots & a_0 \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta_k(\xi) = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 e^{i\xi} & \ldots & b_k e^{ik\xi} \\ b_{-1} e^{-i\xi} & b_0 & \ldots & b_{k-1} e^{-i(k-1)\xi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{-k} e^{-ik\xi} & b_{-k+1} e^{-i(k-1)\xi} & \ldots & b_0 \end{vmatrix}$$

неотрицательны.

А так как

$$D_k(\xi) = D_k(\xi_1), \ \ \Delta_k(\xi) = \Delta_k(\xi_1),$$

где $\xi_1 \in [0, 2\pi]$ любое число, неотрицательны также определители $D_k(\xi_1)$, $\Delta_k(\xi_1)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, найдутся неубывающие функции $\tau_{\xi_1}(\theta)$ и $\nu_{\xi_1}(\theta)$ такие, что

$$a_k e^{ik\xi_1} = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\tau_{\xi_1}(\theta), \ \ b_k e^{ik\xi_1} = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\nu_{\xi_1}(\theta),$$
$$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \ \pm n).$$

Функция $\sigma_{\xi_1}(\theta) = \tau_{\xi_1}(\theta) - \nu_{\xi_1}(\theta)$ принадлежит классу $R_n(\xi_1)$ и при этом

$$\operatorname{Var} \sigma_{\xi_1}(\theta) \leqslant \operatorname{Var} \tau_{\xi_1}(\theta) + \operatorname{Var} \nu_{\xi_1}(\theta) = a_0 + b_0.$$

Далее

$$\inf_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta) = \operatorname{Var} \sigma_\xi(\theta) = \operatorname{Var} \tau_\xi(\theta) + \operatorname{Var} \nu_\xi(\theta) = a_0 + b_0 = \operatorname{Var} \tau_{\xi_1}(\theta) +$$
$$+ \operatorname{Var} \nu_{\xi_1}(\theta) \geqslant \operatorname{Var} \sigma_{\xi_1}(\theta) \geqslant \inf_{R_n(\xi_1)} \operatorname{Var} \sigma(\theta).$$

А так как ξ и ξ_1 любые числа из интервала $[0, 2\pi]$, то

$$\sup_\xi \inf_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta) = \inf_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta),$$

где за ξ можно взять любое число из $[0, 2\pi]$. Теорема доказана. Из теоремы 2 можно получить некоторые следствия.

Следствие 1. *Пусть* $\lambda_k = \bar{\lambda}_{-k}$ *и* $\lambda_0 > 0$. *Для того, чтобы* $m_\lambda = \lambda_0$, *необходима и достаточна неотрицательность определителей* D_k,

$$D_k = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_{-1} & \lambda_0 & \dots & \lambda_{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{-k} & \lambda_{-k+1} & \dots & \lambda_0 \end{vmatrix} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Доказательство. Пусть $D_k \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \dots, n)$. Тогда найдется неубывающая функция $\sigma(\theta)$ такая, что

$$\lambda_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\sigma(\theta), \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

и $\operatorname{Var} \sigma(\theta) = \lambda_0$, откуда

$$m_\lambda = \inf_{R_n(0)} \operatorname{Var} \sigma(\theta) \leqslant \lambda_0,$$

а так как $m_\lambda \geqslant |\lambda_0|$, то $m_\lambda = \lambda_0$.

Пусть теперь дано, что $m_\lambda = \lambda_0$, т. е.

$$\inf_{R_n(0)} \operatorname{Var} \sigma(\theta) = \lambda_0.$$

Этот infimum достигается на некоторой функции $\sigma_0(\theta)$. Это значит, что $\operatorname{Var} \sigma_0(\theta) = \lambda_0$, или иначе

$$\int_0^{2\pi} |d\sigma_0(\theta)| = \int_0^{2\pi} d\sigma_0(\theta).$$

Но тогда функция $\sigma_0(\theta)$ неубывающая, и, следовательно, определители $D_k \geqslant 0$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$.

Легко видеть, что, если $\lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k$ и $\lambda_0 < 0$, то для справедливости равенства $m_\lambda = -\lambda_0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$(-1)^{k+1} D_k \geqslant 0.$$

Следствие 2. *Пусть* $\lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k$, $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$. *Если*

$$\varphi(\theta) = \lambda_0 + 2 \sum_1^n (\mu_k \cos k\theta - \nu_k \sin k\theta) \geqslant 0$$

для всех $\theta \in [0, 2\pi]$, *то* $m_\lambda = \lambda_0$.

Функция $F(z) = \lambda_0 + 2 \sum_1^n \lambda_k z^k$ имеет при $r = |z| < 1$ положительную вещественную часть:

$$\operatorname{Re} F(z) = \lambda_0 + 2 \sum_1^n r^k (\mu_k \cos k\theta - \nu_k \sin k\theta) > 0$$

по принципу максимума для гармонических функций, так как на границе единичного круга $\operatorname{Re} F(z) = \varphi(\theta) \geqslant 0$. Поэтому функция $F(z)$ принадлежит классу Каратеодори [3, стр. 116), а отсюда следует неотрицательность определителей D_k [3, стр. 221]. По следствию 1 $m_\lambda = \lambda_0$.

4. Найдем необходимые и достаточные условия равенства $m_\lambda = |\lambda_n|$.

Теорема 3. *Для того, чтобы* $m_\lambda = \lambda_n$, *необходима и достаточна неотрицательность определителей*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \lambda_n & \bar{\lambda}_{n-1} & \dots & \bar{\lambda}_{n-k} \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n & \dots & \bar{\lambda}_{n-k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n-k} & \lambda_{n-k+1} & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots 2n). \tag{4}$$

Доказательство. Достаточность:

Положим $\lambda_\nu = \mu_{-n+\nu}$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$, т. е.

$$\lambda_{-n} = \mu_{-2n},\ \lambda_{-n+1} = \mu_{-2n+1},\ \ldots,\ \lambda_0 = \mu_{-n},\ \ldots\ \lambda_n = \mu_0,$$

а $\mu_\nu = \bar{\mu}_{-\nu}$ для $\nu > 0$. Тогда определители (4) перепишутся так:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_k \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{-k} & \mu_{-k+1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n).$$

Следовательно, найдется неубывающая функция $\sigma(\theta)$ такая, что

$$\mu_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\sigma(\theta) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2n),$$

или, иначе,

$$\lambda_\nu = \int_0^{2\pi} e^{i\nu\theta} \cdot e^{-in\theta} d\sigma(\theta) \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n).$$

В частности,

$$\lambda_n = \int_0^{2\pi} d\sigma(\theta) = \operatorname{Var} \sigma(\theta).$$

Так как $\mathfrak{M}_{2n} \supset \mathfrak{M}_n$, то

$$\lambda_n = \mu_0 = \sup_{\mathfrak{M}_{2n}} \max_\theta \Big| \sum_{-2n}^{2n} c_k \mu_k e^{ik\theta} \Big| = \sup_{\mathfrak{M}_{2n}} \max_\theta \Big| \sum_{-2n}^{2n} c_k \mu_k e^{i(k+n)\theta} \Big| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\mathfrak{M}'_{2n}} \max_\theta \Big| \sum_{-2n}^{0} c_k \lambda_{k+n} e^{i(k+n)\theta} \Big| = \sup_{\mathfrak{M}_n} \max_\theta \Big| \sum_{-n}^{n} c'_k \lambda_k e^{ik\theta} \Big| = m_\lambda,$$

где

$$\mathfrak{M}'_{2n} = \{T_{2n}(\theta) = \sum_{-2n}^{0} c_k e^{ik\theta} : \max_\theta |T_{2n}(\theta)| \leqslant 1\},$$

а $c'_k = c_{k-n}$. А так как $m_\lambda \geqslant |\lambda_n|$, то $m_\lambda = \lambda_n$.

Необходимость. Пусть теперь $m_\lambda = \lambda_n$. Среди функций $\sigma(\theta) \in R_n(0)$ выберем ту, которая имеет наименьшую вариацию. Пусть это $\sigma_0(\theta)$. Тогда

$$m_\lambda = \lambda_n = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\sigma_0(\theta) \geqslant \int_0^{2\pi} |d\sigma_0(\theta)|, \tag{5}$$

так как по теореме 1 $m_\lambda = \sup_\xi \inf_{R_n(\xi)} \operatorname{Var} \sigma(\theta)$. Отсюда получаем, что

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\sigma_0(\theta) = \int_0^{2\pi} |d\sigma_0(\theta)|. \tag{6}$$

Из равенства (6) следует, что для любых $0 \leqslant \theta' < \theta'' \leqslant 2\pi$

$$\int_{\theta'}^{\theta''} e^{in\theta} d\sigma_0(\theta) = \int_{\theta'}^{\theta''} |d\sigma_0(\theta)|.$$

Следовательно,

$$e^{in\theta}d\sigma_0(\theta) = |d\sigma_0(\theta)|,$$

откуда

$$d\sigma_0(\theta) = e^{-in\theta}\,|\,d\sigma_0(\theta)\,|$$

и, значит,

$$\lambda_\nu = \int_0^{2\pi} e^{i\nu\theta}\cdot e^{-in\theta}\,|\,d\sigma_0(\theta)\,| = \int_0^{2\pi} e^{i\nu\theta}\cdot e^{-in\theta}d\tau(\theta),$$

где

$$\tau(\theta) = \int_0^{\theta} |\,d\sigma_0(\theta)\,|$$

неубывающая функция. Поэтому определители (4) неотрицательны. Теорема доказана.

Эту теорему можно несколько обобщить: *если* $\lambda_n = |\lambda_n|\,e^{i\varphi}$, *то в выражении для определителя* Δ_k *нужно заменить* λ_k *на* $\lambda_k e^{-i\varphi}$ *и тогда* $m_\lambda = |\lambda_n|$.

Следствие 1. *Если функция*

$$\varphi(\theta) = \lambda_n + 2\sum_1^{2n}(\mu_{n-k}\cos k\theta - \nu_{n-k}\sin k\theta),$$

где $\bar{\lambda}_{n-k} = \mu_{n-k} + i\nu_{n-k}$ *неотрицательна для* $\theta \in [0,\ 2\pi]$, *то* $m_\lambda = \lambda_n$.

Доказательство аналогично приведенному для следствия 2 теоремы 2.

Следствие 2. (Теорема С. Н. Бернштейна).

Если $T_n(\theta) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\theta}$ *и* $\max_\theta |T_n(\theta)| \leqslant 1$, *то*

$$\max_\theta |T_n'(\theta)| \leqslant n.$$

Так как

$$T_n'(\theta) = \left|\sum_{-n}^{n} c_k\cdot ike^{ik\theta}\right| = \left|\sum_{-n}^{n} c_k k e^{ik\theta}\right|,$$

то примем $\lambda_k = k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$. *Для таких* λ_k

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} n & n-1 & \ldots & n-k \\ n-1 & n & \ldots & n-k+1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-k & n-k+1 & \ldots & n \end{vmatrix} = 2^{k-1}(2n-k) \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$$

Условия теоремы 3 выполнены, следовательно, $m_\lambda = \lambda_n = n$.

Аналогично можно доказать, что

$$\max_\theta |\tilde{T}_n'(\theta)| \leqslant n\cdot\max_\theta |T_n(\theta)|,$$

где $\tilde{T}_n(\theta)$ — сопряженный многочлен. В этом случае $\lambda_k = |k|$, а $\Delta_k = 2^{k-1}(2n-k)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $\Delta_k = 0$ для $k = n+1,\ n+2, \ldots, 2n$.

Следствие 3. (Теорема Г. Сеге).

Если

$$\varphi(\theta) = \lambda_n + 2\sum_1^{n-1}\lambda_{n-\nu}\cos\nu\theta \geqslant 0$$

для всех вещественных θ, *то*

$$|\sum_{1}^{n}\lambda_\nu[a_\nu\cos(\nu\theta+\alpha)+b_\nu\sin(\nu\theta+\alpha)]|\leqslant\lambda_n\max|a_0+$$
$$+\sum_{1}^{n}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)|.$$

Эта формулировка эквивалентна приведенной в n^0 1.

Доказательство. Функция

$$\sigma(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lambda_n+2\sum_{1}^{n-1}\lambda_{n-\nu}\cos\nu\theta)\,d\theta$$

неубывающая и ее моменты равны

$$\int_0^{2\pi}e^{i\nu\theta}d\sigma(\theta)=\begin{cases}\lambda_{n-\nu}, & 0\leqslant\nu\leqslant n-1\\ 0, & \nu\geqslant n,\end{cases}\quad \int_0^{2\pi}e^{-i\nu\theta}d\sigma(\theta)=\begin{cases}\lambda_{n-\nu}, & 0\leqslant\nu\leqslant n-1\\ 0, & \nu\geqslant n.\end{cases}$$

Функция $\sigma(\theta)$ имеет бесчисленное множество точек роста и поэтому [3, стр. 223] все определители

$$D_k=\begin{vmatrix}\lambda_n & \lambda_{n-1} & \dots & \lambda_{n-k}\\ \lambda_{n-1} & \lambda_n & \dots & \lambda_{n-k+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_{n-k} & \lambda_{n-k+1} & \dots & \lambda_n\end{vmatrix}\quad(k=0,1,2,\dots,n-1),$$

$$D_{n+k}=\begin{vmatrix}\lambda_n & \lambda_{n-1} & \dots & \lambda_1 0 & \dots & 0\\ \lambda_{n-1} & \lambda_n & \dots & \lambda_2\lambda_1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n\end{vmatrix}$$

строго больше нуля.

Далее,

$$|\sum_{1}^{n}\lambda_\nu[a_\nu\cos(\nu\theta+\alpha)+b_\nu\sin(\nu\theta+\alpha)]|=|\sum_{1}^{n}\lambda_\nu\bar{c}_\nu e^{-i\alpha}\cdot e^{-i\nu\theta}+$$
$$+\sum_{1}^{n}\lambda_\nu c_\nu e^{i\alpha}\cdot e^{i\nu\theta}|,$$
$$c_\nu=\frac{1}{2}(a_\nu-ib_\nu),$$
$$|a_0+\sum_{1}^{n}a_\nu\cos\nu\theta+b_\nu\sin\nu\theta|=|a_0+\sum_{1}^{n}\bar{c}_\nu e^{-i\nu\theta}+\sum_{1}^{n}c_\nu e^{i\nu\theta}|.$$

В этом случае множителями будут числа

$$\lambda_n e^{-i\alpha},\ \lambda_{n-1}e^{-i\alpha}\ \dots,\ \lambda_1 e^{-i\alpha},\ 0,\ \lambda_1 e^{i\alpha},\ \dots\ \lambda_n e^{i\alpha}$$

или, что то же,

$$\lambda_n,\ \lambda_{n-1},\ \dots,\ \lambda_1,\ 0,\ \lambda_1 e^{2i\alpha},\ \dots,\ \lambda_n e^{2i\alpha}.$$

Написанные выше определители D_k $(k=0,1,2,\dots,n-1)$ совпадают с определителями (4) для $k=0,1,2,\dots,n-1$. Поэтому остается доказать неотрицательность определителей (4) для $k=n, n+1, \ldots, 2n$, которые здесь имеют вид:

$$\Delta_{n+k}=\begin{vmatrix} \lambda_n & \lambda_{n-1} & \ldots & 0 & \lambda_1 e^{-2i\alpha} & \ldots & \lambda_k e^{-2i\alpha} \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n & \ldots & \lambda_1 & 0 & \ldots & \lambda_{k-1} e^{-2i\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_k e^{2i\alpha} & \lambda_{k-1} e^{2i\alpha} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся следующей теоремой ([4], отд. VII, № 35).

Если определители

$$A_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad B_k=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

неотрицательны, то также неотрицательны определители

$$C_k=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \ldots & a_{1k}b_{1k} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \ldots & a_{2k}b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1}b_{k1} & a_{k2}b_{k2} & \ldots & a_{kk}b_{kk} \end{vmatrix}.$$

В качестве определителей A_k возьмем

$$D_{n+k}(\varepsilon)=\begin{vmatrix} \lambda_n & \lambda_{n-1} & \ldots & \lambda_1 & \varepsilon & \ldots & \varepsilon \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n & \ldots & \lambda_2 & \lambda_1 & \ldots & \varepsilon \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Определители $D_{n+k}(\varepsilon)$ получились из определителей D_{n+k} заменой нулей на ε. Так как $D_{n+k}>0$, то для достаточно малых ε и $D_{n+k}(\varepsilon) \geqslant 0$. В качестве определителей B_k возьмем определители

$$B_k=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \frac{\lambda_1 e^{-2i\alpha}}{\varepsilon} & \ldots & \frac{\lambda_k e^{-2i\alpha}}{\varepsilon} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & \cdot & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & \cdot & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\lambda_k e^{2i\alpha}}{\varepsilon} & \frac{\lambda_{k-1} e^{2i\alpha}}{\varepsilon} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель получается из Δ_{n+k} заменой всех λ_i и числа 0 на единицы, а чисел $\lambda_i e^{-2i\alpha}$ и $\lambda_i e^{2i\alpha}$ на $\frac{\lambda_i e^{-2i\alpha}}{\varepsilon}$ и $\frac{\lambda_i e^{2i\alpha}}{\varepsilon}$ соответственно.

Если $k \leqslant n-1$, то в этом определителе обязательно есть две строки, состоящие из одних единиц. Это строки с номерами $k+1$, $k+2$. Поэтому определители B_k равны нулю для $k \leqslant n-1$. Из теоремы для определителей получаем, что $\Delta_{n+k} \geqslant 0$ для $k \leqslant n-1$. Определитель $\Delta_{2n}=0$ равен нулю, так как у него пропорциональны первая и последняя строки. Итак, условия теоремы 3 выполнены и теорема Г. Сеге доказана.

Из теоремы 3 вытекает также известное неравенство

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |T'_n(\theta)| \leqslant \frac{n}{2\sin nh} \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |T_n(\theta+h)-T_n(\theta-h)| \tag{7}$$

при всех положительных $h<\frac{\pi}{n}$, а также

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |T_n^{(r)}\theta| \leqslant \left(\frac{n}{2\sin nh}\right)^r \cdot \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |\Delta_h^{(r)} T_n(\theta)|. \tag{8}$$

Для доказательства (7) запишем $T'_n(\theta)$ иначе:

$$\max_\theta |T'_n(\theta)| = \max_\theta \left|\sum_{-n}^{n} c_k ike^{ik\theta}\right| = \frac{1}{h}\max_\theta \left|\sum_{-n}^{n} c_k 2i\sin kh\left(\frac{kh}{2\sin kh}\right)e^{ik\theta}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h} m_\lambda \max_\theta \left|\sum_{-n}^{n} c_k 2i\sin kh\cdot e^{ik\theta}\right| = \frac{1}{h} m_\lambda \max_\theta |T_n(\theta+h)-T_n(\theta-h)|,$$

где m_λ находим для $\lambda_k=\frac{kh}{2\sin kh}$; $\left(\lambda_0=\frac{1}{2}\right)$.

Покажем, что определители (4) неотрицательны при $\lambda_k=\frac{kh}{2\sin kh}$, для этого достаточно доказать, что квадратичные формы

$$\sum_{\alpha,\,\beta=0}^{k} \frac{(n-|\alpha-\beta|)h}{2\sin(n-|\alpha-\beta|)h}\xi_\alpha\xi_\beta$$

неотрицательны при $k\leqslant 2n$ и $h<\frac{\pi}{n}$. Чтобы доказать этот факт, используем разложение [5, стр. 115]:

$$\frac{\pi\mu}{2\operatorname{sh}\pi\mu}e^{\mu t} = \frac{1}{2}+\mu\varphi_1(t)+\mu^2\varphi_2(t)+\mu^3\varphi_3(t)+\ \ldots,$$

где

$$\varphi_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos\left(kt-\frac{\pi r}{2}\right)}{k^r},\quad |\mu|<1,\ |t|<\pi.$$

При $t=0$, $\mu=\frac{ix}{\pi}$ имеем

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\nu}x^{2\nu},$$

где

$$a_{2\nu} = \frac{1}{\pi^{2\nu}}(-1)^\nu\varphi_{2\nu}(0) = \frac{1}{\pi^{2\nu}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{2\nu}} > 0.$$

Так как $nh<\pi$, то и $(n-|\alpha-\beta|)h<\pi$, и поэтому

$$\sum_{\alpha,\,\beta=0}^{k}\frac{(n-|\alpha-\beta|)h}{2\sin(n-|\alpha-\beta|)h}\xi_\alpha\xi_\beta = \sum_{\nu=0}^{\infty}a_{2\nu}\sum_{\alpha,\,\beta=0}^{k}[(n-|\alpha-\beta|)h]^{2\nu}\xi_\alpha\xi_\beta.$$

Но квадратичные формы

$$\sum_{\alpha,\,\beta=0}^{k}[(n-|\alpha-\beta|)h]^{2\nu}\xi_\alpha\xi_\beta$$

неотрицательны при $k \leqslant 2n$. Для $\nu=0$ это очевидно, а для $\nu>0$ неотрицательность следует из последовательного применения сначала следствия 2 теоремы 3, а потом теоремы об определителях. Следовательно, формы

$$\sum_{\alpha,\,\beta=0}^{k}\frac{(n-|\alpha-\beta|)h}{2\sin(n-|\alpha-\beta|)h}\xi_\alpha\xi_\beta$$

неотрицательны.

Так как

$$m_{\lambda^r} \leqslant (m_\lambda)^r = \left(\frac{n}{2\sin nh}\right)^r; \quad m_{\lambda^r} \geqslant \left(\frac{n}{2\sin nh}\right)^r,$$

то

$$m_{\lambda^r} = \left(\frac{n}{2\sin nh}\right)^r,$$

откуда следует (8). Под m_{λ^r} подразумевается величина m_λ для $\lambda_k = \left(\frac{k}{2\sin kh}\right)^r$.

Из этой же теоремы 3 вытекает и другое известное неравенство

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|T_n(\theta+h)-T_n(\theta-h)| \leqslant 2\sin nh\cdot\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|T_n(\theta)|,$$

где $0 \leqslant h \leqslant \frac{\pi}{2n}$.

Заметим, что $\max\limits_\theta|T_n(\theta+h)-T_n(\theta-h)|$ равен

$$\max_\theta\Big|\sum_{-n}^{n}c_k e^{ik(\theta+h)}-\sum_{-n}^{n}c_k e^{ik(\theta-h)}\Big| = 2\max_\theta\Big|\sum_{-n}^{n}c_k\sin kh\cdot e^{ik\theta}\Big|.$$

Примем $\lambda_k=\sin kh$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm n)$. Тогда определители Δ_k, составленные из этих λ_k, неотрицательны:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \sin nh & \sin(n-1)h & \ldots & \sin(n-k)h \\ \sin(n-1)h & \sin nh & \ldots & \sin(n-k+1)h \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sin(n-k)h & \sin(n-k+1)h & \ldots & \sin nh \end{vmatrix}.$$

Действительно, с помощью прямого счета можно показать, что

$$\Delta_k = 2^{k-1}(\cos nh)^{k-1}(\sin h)^k\cdot\sin(2n-k)h.$$

Для $0\leqslant k\leqslant 2n$, $h\leqslant\frac{\pi}{2n}$ определители Δ_k неотрицательны. Следовательно, $m_\lambda=\sin nh$ и поэтому

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|T_n(\theta+h)-T_n(\theta-h)| \leqslant 2\sin nh\cdot\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|T_n(\theta)|.$$

Так же, как и неравенство (8), можно доказать неравенство для $\Delta_h^r T_n(\theta)$.

5. В общем случае, когда не выполняются условия позитивности (аналогичные условиям следствия 1 теоремы 2 или условиям теоремы 3), точное значение величины m_λ найти не удается, но можно указать некоторые оценки.

Пусть B_k, $k \geqslant 2n$ означает множество нормированных функций ограниченной вариации с моментами $s_0 = 1$, $s_\nu = 0$ для $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k$. Функция

$$\tau(\theta) = \frac{1}{2\pi}\theta$$

входит в этот класс. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{-n}^{n}\lambda_k e^{ik\xi}\cdot e^{-ik\theta}\right)e^{i\nu\theta}\,d\theta = \lambda_\nu e^{i\nu\xi}, \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n).$$

Из теоремы 1 отсюда следует, что

$$m_\lambda \leqslant \frac{1}{2\pi}\max_{0\leqslant\xi\leqslant 2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{-n}^{n}\lambda_k e^{ik(\xi-\theta)}\right|d\theta.$$

В случае же, когда $\lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k$, из теоремы 2 следует, что

$$m_\lambda \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{-n}^{n}\lambda_k e^{-ik\theta}\right|d\theta.$$

Классу B_k принадлежат также функции, имеющие скачки $\frac{1}{k+1}$ в точках $\theta_j = \varphi + \frac{2j\pi}{k+1}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, k)$, а $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{2\pi}{k+1}$. После небольших вычислений, применяя теорему 2, получим

$$m_\lambda \leqslant \inf_{k\geqslant 2n}\ \inf_{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{2\pi}{k+1}}\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\left|\sum_{\nu=-n}^{n}\lambda_\nu e^{-i\nu\left(\varphi+\frac{2j\pi}{k+1}\right)}\right|$$

в случае, если $\lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Szegö. „Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein". Schriften des Königsberger Gelehrten Geselschaft, 1928.
2. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений, т. 2. Изд-во «Наука», 1961.
3. Н. И. Ахиезер. Классическая проблема моментов. Физматгиз, М., 1961.
4. Г. Полиа и Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, т. 2, Гостехиздат, М., 1956.
5. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Изд-во «Наука», М., 1965.