К ТЕОРИИ КОНТИНУАЛЬНЫХ АНАЛОГОВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

А. М. Рыбалко

§ 1. В одной из работ, посвященных восстановлению дифференциального оператора по спектральной функции, М. Г. Крейн [4] указал, как может быть построен континуальный аналог общей теории ортогональных многочленов на окружности. Отправным пунктом является неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty;$$

2) если положить

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{i\lambda t}{1+\lambda^2} - e^{i\lambda t}\right) \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2},$$

то функция

$$\omega(t) = g(t) - \frac{|t|}{2} \quad (-\infty < t < \infty)$$

имеет первую производную, абсолютно непрерывную в каждом конечном интервале, так что

$$\omega'(t) = \int_0^t H(s)\,ds + \omega'(0),$$

где $H(s)$ — локально суммируемая функция;

3) уравнение

$$\varphi(t) + \int_0^r H(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant r) \tag{1.1}$$

однозначно разрешимо при любом $r > 0$ и любой правой части $f(t)$.

Функции $\omega(t)$, $H(t)$, очевидно, эрмитовы, т. е.

$$\omega(-t) = \overline{\omega(t)}, \quad H(-t) = \overline{H(t)}.$$

Основную роль в построениях М. Г. Крейна играет решение уравнения (1.1) при $f(t)=H(t-\tau)$ $(0\leqslant t\leqslant r, -\infty<\tau<\infty)$. Это решение обозначается $\Gamma_r(t,\tau)$. Таким образом,

$$\Gamma_r(t,\tau)+\int_0^r H(t-s)\Gamma_r(s,\tau)\,ds=H(t-\tau)\quad(0\leqslant t\leqslant r, -\infty<\tau<\infty).$$

В частности, $\Gamma_r(t,s)$ $(0\leqslant t,\ s\leqslant r)$ есть резольвента ядра $H(t-s)$, т. е. решение уравнения (1.1) дается формулой

$$\varphi(t)=f(t)-\int_0^r \Gamma_r(t,s)f(s)\,ds.$$

Функция $\Gamma_r(t,\tau)$ обладает следующими свойствами:

$$\overline{\Gamma_r(t,s)}=\Gamma_r(s,t),\quad(0\leqslant t\leqslant r);$$

$$\overline{\Gamma_r(r-t,r-\tau)}=\Gamma_r(t,\tau),\quad(0\leqslant t\leqslant r, -\infty<\tau<\infty);$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Gamma_r(t,\tau)=-\Gamma_r(t,r)\,\Gamma_r(r,\tau),\quad(0\leqslant t\leqslant r, -\infty<\tau<\infty).$$

Затем вводятся функции

$$P(r;\lambda)=e^{i\lambda r}-\int_0^r\Gamma_r(r,s)e^{i\lambda s}\,ds=e^{i\lambda r}\left\{1-\int_0^r\Gamma_r(s,0)\,e^{-i\lambda s}\,ds\right\}$$

и

$$P_*(r;\lambda)=e^{i\lambda r}\overline{P}(r;\lambda)=1-\int_0^r\Gamma_r(0,s)\,e^{i\lambda s}\,ds^*.$$

Семейство функций $P(r;\lambda)$ $(r>0)$ является континуальным аналогом последовательности ортогональных многочленов на окружности, а именно, доказывается следующая

Теорема. *Для двух произвольных финитных функций* $f(t)$, $g(t)\in L^2(0,\infty)$ *имеет место равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\overline{G(\lambda)}\,d\sigma(\lambda)=\int_0^{\infty}f(t)\overline{g(t)}\,dt,$$

где

$$F(\lambda)=\int_0^{\infty}f(t)P(t;\lambda)\,dt,\quad G(\lambda)=\int_0^{\infty}g(t)P(t;\lambda)\,dt.$$

Это равенство эквивалентно своему частному случаю

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}P(t;\lambda)\,dt\right\}\left\{\int_{\gamma}^{\delta}\overline{P(t;\lambda)}\,dt\right\}d\sigma(\lambda)=l,$$

где $[\alpha,\beta]$, $[\gamma,\delta]$ — *произвольные конечные интервалы полуоси* $t\geqslant 0$, *а* l — *длина их общей части.*

Последнее соотношение является континуальным аналогом ортогональности.

---

* Черта означает переход к комплексно сопряженным коэффициентам в тейлоровом разложении по степеням λ.

Благодаря указанным свойствам функции $\Gamma_r(t, s)$, получаются следующие уравнения для $y = P(r; \lambda)$ и $z = P_*(r; \lambda)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dr} &= i\lambda y - a(r) z \\ \frac{dz}{dr} &= -\overline{a(r)}\, y \end{aligned} \qquad y(0; \lambda) = z(0; \lambda) = 1, \tag{1.2}$$

где $a(r) = \Gamma_r(r, 0)$ $(r \geqslant 0)$.

В последнем параграфе своей статьи [4] М. Г. Крейн переходит от уравнений (1.2) к вещественным уравнениям, полагая

$$\begin{aligned} E(r; \lambda) &= e^{-i\lambda r} P(2r; \lambda) = \Phi(r; \lambda) + i\Psi(r; \lambda), \\ E(-r; \lambda) &= \overline{E}(r, \lambda) = \Phi(r; \lambda) - i\Psi(r; \lambda). \end{aligned} \qquad (r > 0)$$

Новые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\Phi + \alpha(r)\Phi + \beta(r)\Psi &= -\lambda\Psi, \quad \Phi(0; \lambda) = 1 \\ \frac{d}{dr}\Psi + \beta(r)\Phi - \alpha(r)\Psi &= \lambda\Phi, \quad \Psi(0; \lambda) = 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\alpha(r) + i\beta(r) = 2a(2r).$$

Система уравнений (1.3) дает решение рассмотренной в [4] обратной задачи спектрального анализа. В статье [4] указано, что можно было бы решить и прямую задачу, а именно задаться произвольными измеримыми локально суммируемыми функциями $\alpha(r)$, $\beta(r)$ и непосредственно доказать существование спектральной функции $\sigma(\lambda)$.

Предметом настоящей статьи является построение спектральной функции прямо для системы (1.2) без предварительного перехода к вещественной системе (1.3). Это возможно сделать с помощью приспособления методов тригонометрической проблемы моментов к континуальному случаю что, как нам кажется, представляет некоторый интерес.

§ 2. Задавшись системой

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dr} &= i\lambda y - a(r) z, \\ \frac{dz}{dr} &= -\overline{a(r)}\, y, \end{aligned}$$

найдем решения $y = P(r; \lambda)$, $z = P_*(r; \lambda)$, удовлетворяющие условию

$$P(0; \lambda) = P_*(0; \lambda) = 1.$$

Из уравнений следует, что

$$P(r; \lambda) = e^{i\lambda r}\, \overline{P}_*(r; \lambda).$$

Таким образом, имеем тождества

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} P(r; \lambda) &= i\lambda P(r; \lambda) - a(r) P_*(r; \lambda), \\ \frac{d}{dr} P_*(r; \lambda) &= -\overline{a(r)}\, P(r; \lambda). \end{aligned} \qquad P(0; \lambda) = P_*(0; \lambda) = 1 \tag{2,1}$$

Определим еще функции $\Omega(r; \lambda)$, $\Omega_*(r; \lambda)$, которые являются континуальным аналогом многочленов второго рода, ортогональных на окружности, уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\Omega(r; \lambda) &= i\lambda\Omega(r; \lambda) + a(r)\Omega_*(r; \lambda), \\ \frac{d}{dr}\Omega_*(r; \lambda) &= \overline{a(r)}\,\Omega(r; \lambda). \end{aligned} \qquad \Omega(0; \lambda) = \Omega_*(0; \lambda) = \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Из двух пар соотношений (2.1) и (2.2) следует, что

$$\frac{d}{dr}\{P(r;\lambda)\Omega_*(r;\lambda)+P_*(r;\lambda)\Omega(r;\lambda)\}=$$
$$=\Omega_*(r;\lambda)\{i\lambda P(r;\lambda)-a(r)P_*(r;\lambda)\}+\overline{a(r)}P(r;\lambda)\Omega(r;\lambda)-$$
$$-\overline{a(r)}P(r;\lambda)\Omega(r;\lambda)+P_*(r;\lambda)\{i\lambda\Omega(r;\lambda)+a(r)\Omega_*(r;\lambda)\}=$$
$$=i\lambda\{P(r;\lambda)\Omega_*(r;\lambda)+P_*(r;\lambda)\Omega(r;\lambda)\}.$$

Отсюда

$$\ln\{P(r;\lambda)\Omega_*(r;\lambda)+P_*(r;\lambda)\Omega(r;\lambda)\}=\ln A+i\lambda r,$$

где благодаря начальным условиям $A=1$. Итак, справедливо тождество

$$P(r;\lambda)\Omega_*(r;\lambda)+P_*(r;\lambda)\Omega(r;\lambda)=e^{i\lambda r}.$$

Его можно переписать в виде

$$\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}+\frac{\Omega(r;\lambda)}{P(r;\lambda)}=\frac{e^{i\lambda r}}{P_*(r;\lambda)P(r;\lambda)}.$$

При вещественном λ получаем соотношение

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}\right\}=\frac{1}{2|P_*(r;\lambda)|^2}. \tag{2.3}$$

Снова, используя тождества (2.1) и (2.2), найдем, что

$$\frac{d}{dr}\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}=$$
$$=\frac{\overline{a(r)}\{P_*(r;\lambda)\Omega(r;\lambda)+P(r;\lambda)\Omega_*(r;\lambda)\}}{[P_*(r;\lambda)]^2}=\frac{\overline{a(r)}\,e^{i\lambda r}}{[P_*(r;\lambda)]^2}. \tag{2.4}$$

Справедлива формула Грина

$$\frac{d}{dr}\{P(r;\lambda)\overline{P}(r;\mu)-P_*(r;\lambda)\overline{P}_*(r;\mu)\}=i(\lambda-\mu)P(r;\lambda)\overline{P}(r;\mu).$$

Действительно, на основании формул (2.1) и аналогичных формул для $\overline{P}(r;\mu)$ и $\overline{P}_*(r;\mu)$ находим

$$\frac{d}{dr}\{P(r;\lambda)\overline{P}(r;\mu)-P_*(r;\lambda)\overline{P}_*(r;\mu)\}=$$
$$=\{i\lambda P(r;\lambda)-a(r)P_*(r;\lambda)\}\overline{P}(r;\mu)-\{i\mu\overline{P}(r;\mu)+\overline{a(r)}\,\overline{P}_*(r;\mu)\}P(r;\lambda)+$$
$$+\overline{a(r)}\,\overline{P}_*(r;\mu)P(r;\lambda)+a(r)P_*(r;\lambda)\overline{P}(r;\mu)=i(\lambda-\mu)P(r;\lambda)\overline{P}(r;\mu).$$

Проинтегрировав это соотношение по r и использовав условия при $r=0$, получим континуальный аналог формулы Кристоффеля — Дарбу

$$P(r;\lambda)\overline{P}(r;\mu)-P_*(r;\lambda)\overline{P}_*(r;\mu)=i(\lambda-\mu)\int_0^r P(t;\lambda)\overline{P}(t;\mu)\,dt \tag{2.5}$$

Эта формула содержится в работе М. Г. Крейна [4] равно как и вытекающая из нее

Лемма 1. *Функция $P_*(r;\lambda)$ не имеет корней в полуплоскости* $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$.

Доказательство. В силу формулы Кристоффеля — Дарбу при $\mu=\overline{\lambda}$ получим неравенство

$$|P(r;\lambda)|^2=|P_*(r;\lambda)|^2-2\operatorname{Im}\lambda\int_0^r|P(t;\lambda)|^2dt\leqslant|P_*(r;\lambda)|^2,$$

где $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Знак равенства выполняется лишь при $\operatorname{Im}\lambda = 0$. Из этого неравенства следует, что функция $P_*(r;\lambda)$ не имеет корней в верхней полуплоскости. Покажем, что их нет и на вещественной оси. Доказательство ведем от противного. Примем, что λ_0 есть вещественный корень функции $P_*(r;\lambda)$ а, следовательно, и функции $P(r;\lambda)$. Полагая $\lambda = \lambda_0$ в (2.5), получим при любом $\mu \neq \lambda_0$

$$\int_0^r P(t;\lambda_0)\,\overline{P}(t;\mu)\,dt = 0.$$

Делая предельный переход $\mu \to \lambda_0$, находим

$$\int_0^r |P(t;\lambda_0)|^2\,dt = 0,$$

а это явно абсурдно.

§ 3. Из дифференциальных уравнений (2.1) и краевых условий вытекает следующее интегральное уравнение типа Вольтерра для функции $P_*(r;\lambda)$:

$$P_*(r;\lambda) = 1 - \int_0^r \overline{a(s)}\,e^{i\lambda s}\,ds + \int_0^r \overline{a(s)}\,ds \int_0^s a(t)\,e^{i\lambda(s-t)}P_*(t;\lambda)\,dt.$$

Полагая

$$b(r,s) = \int_s^r \overline{a(t)}\,a(t-s)\,dt, \quad (0 \leqslant s \leqslant r)$$

$$P_*(r;\lambda) = 1 - \mathfrak{J}(r;\lambda),$$

заменим это уравнение следующим:

$$\mathfrak{J}(r;\lambda) = \int_0^r \overline{a(s)}\,e^{i\lambda s}\,ds - \int_0^r b(r,s)\,e^{i\lambda s}\,ds +$$

$$+ \int_0^r \mathfrak{J}(t;\lambda)\,dt \int_t^r a(t)\,\overline{a(s)}\,e^{i\lambda(s-t)}\,ds.$$

Будем искать решение методом последовательных подстановок, иначе говоря, в виде ряда

$$\mathfrak{J}(r;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{J}_k(r;\lambda),$$

где

$$\mathfrak{J}_0(r;\lambda) = \int_0^r A_0(r,s)\,e^{i\lambda s}\,ds,$$

$$A_0(r,s) = \overline{a(s)} - b(r,s).$$

Таким образом,

$$\mathfrak{J}_1(r;\lambda) = \int_0^r \mathfrak{J}_0(t;\lambda)\,dt \int_t^r a(t)\,\overline{a(s)}\,e^{i\lambda(s-t)}\,ds$$

и вообще при $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathfrak{J}_{k+1}(r;\lambda) = \int_0^r \mathfrak{J}_k(t;\lambda)\,dt \int_t^r a(t)\,\overline{a(s)}\,e^{i\lambda(s-t)}\,ds. \tag{3.1}$$

С помощью этих формул при любом целом $k \geqslant 0$ найдем представление

$$\mathfrak{F}_k(r;\lambda) = \int_0^r A_k(r,s)\, e^{i\lambda s}\, ds,$$

где каждая из функций $A_k(r,s)$ принадлежит $L(0,r)$ по переменной s. Пользуясь теоремой единственности для преобразования Фурье, уже нетрудно найти соотношения, связывающие функции $A_k(r,s)$. Действительно, подставляя в (3. 1) выражения функций $\mathfrak{F}_j(r;\lambda)$, получаем

$$\int_0^r A_{k+1}(r,s)\, e^{i\lambda s}\, ds = \int_0^r a(t)\, dt \int_0^t A_k(t,x)\, e^{i\lambda x}\, dx \int_t^r \overline{a(s)}\, e^{i\lambda(s-t)}\, ds.$$

Правая часть может быть преобразована к виду

$$\int_0^r e^{i\lambda s}\, ds \int_s^r \overline{a(x)}\, dx \int_{x-s}^{x} a(t)\, A_k(t,\, t-x+s)\, dt,$$

поэтому упомянутое соотношение запишется

$$A_{k+1}(r,s) = \int_s^r \overline{a(x)}\, dx \int_{x-s}^{x} a(t)\, A_k(t,\, t-x+s)\, dt.$$

Вычислим последовательно нормы

$$\| A_k(r,\cdot)\| = \int_0^r |A_k(r;s)|\, ds \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

С этой целью введем функцию

$$g(r) = \int_0^r |a(s)|\, ds.$$

В таком случае на основании формул для $A_0(r,s)$ и $b(r,s)$ найдем

$$\begin{aligned} \|A_0(r,\cdot)\| &\leqslant \int_0^r |a(s)|\, ds + \int_0^r ds \int_s^r |a(t)|\,|a(t-s)|\, dt = \\ &= \int_0^r |a(s)|\, ds + \int_0^r |a(t)|\, dt \int_0^t |a(x)|\, dx = \\ &= g(r) + \int_0^r g(t)\, g'(t)\, dt = \frac{g(r)}{1!} + \frac{[g(r)]^2}{2!}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \|A_{k+1}(r,\cdot)\| &\leqslant \int_0^r ds \int_s^r |a(x)|\, dx \int_{x-s}^{x} |a(t)|\,|A_k(t,\, t-x+s)\, dt = \\ &= \int_0^r |a(t)|\, dt \int_0^t |A_k(t,x)\, dx \int_t^r |a(s)|\, ds = \\ &= \int_0^r \|A_k(t,\cdot)\|\, |a(t)|\, dt \int_t^r |a(s)|\, ds = \\ &= \int_0^r |a(s)|\, ds \int_0^s |a(t)|\, \|A_k(t,\cdot)\|\, dt \end{aligned} \tag{3.2}$$

и допустим, что при некотором k уже доказано неравенство

$$\| A_k(r, \cdot) \| \leqslant \frac{[g(r)]^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{[g(r)]^{2k+2}}{(2k+2)!}. \tag{3.3}$$

На основании (3.2) находим

$$\| A_{k+1}(r, \cdot) \| \leqslant \int_0^r g'(s)\, ds \int_0^s g'(t) \left\{ \frac{[g(t)]^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{[g(t)]^{2k+2}}{(2k+2)!} \right\} dt =$$

$$= \int_0^r g'(s) \left\{ \frac{[g(s)]^{2k+2}}{(2k+2)!} + \frac{[g(s)]^{2k+3}}{(2k+3)!} \right\} ds = \frac{[g(r)]^{2k+3}}{(2k+3)!} + \frac{[g(r)]^{2k+4}}{(2k+4)!},$$

т. е. неравенство (3.3) будет верно и при замене k на $k+1$. Так как при $k=0$ неравенство (3.3) доказано, то оно, следовательно, справедливо для всех k. Отсюда вытекает, что ряд для $\mathfrak{J}(r; \lambda)$ сходится при любом $r \geqslant 0$ равномерно на оси $-\infty < \lambda < \infty$ и функция $\mathfrak{J}(r; \lambda)$ представима в виде

$$\mathfrak{J}(r; \lambda) = \int_0^r A(r, s)\, e^{i\lambda s}\, ds,$$

где

$$\int_0^r | A(r, s) |\, ds < \infty.$$

Таким образом,

$$P_*(r; \lambda) = 1 - \int_0^r A(r, s)\, e^{i\lambda s}\, ds,$$

и поэтому

$$P(r; \lambda) = e^{i\lambda r} - \int_0^r \overline{A(r, s)}\, e^{i\lambda(r-s)}\, ds.$$

Изменив обозначения в соответствии с обозначениями М. Г. Крейна, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *Функция $P(r; \lambda)$, определяемая уравнениями (2.1), где $a(r)$ — локально суммируема, представима в виде*

$$P(r; \lambda) = e^{i\lambda r} - \int_0^r \Gamma_r(r, s)\, e^{i\lambda s}\, ds, \tag{3.4}$$

причем

$$\int_0^r | \Gamma_r(r, s) |\, ds < \infty,$$

так что

$$P_*(r; \lambda) = 1 - \int_0^r \overline{\Gamma_r(r, s)}\, e^{i\lambda(r-s)}\, ds. \tag{3.5}$$

Мы видим, что

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} P_*(r; \lambda) = 1$$

равномерно в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$.

Для функций $\Omega_*(r;\lambda)$ получаем аналогичное представление

$$\Omega_*(r;\lambda)=\frac{1}{2}-\int_0^r B(r,s)\,e^{i\lambda s}\,ds,$$

где

$$\int_0^r |B(r,s)|\,ds<\infty.$$

Поэтому равномерно при $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\Omega_*(r;\lambda)=\frac{1}{2}.$$

Функция

$$\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)},$$

знаменатель которой в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ не имеет корней, в этой полуплоскости регулярна и ограничена. Согласно (2.3) при $\operatorname{Im}\lambda=0$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}\right\}>0.$$

На основании принципа минимума для гармонических функций это неравенство имеет место всюду в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$. Таким образом, функция

$$i\,\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}$$

принадлежит классу N Неванлинна и, следовательно, допускает известное интегральное представление. В данном случае благодаря соотношениям

$$\lim_{\eta\to\infty}\Omega_*(r;i\eta)=\frac{1}{2},\quad \lim_{\eta\to\infty}P_*(r;i\eta)=1$$

справедливо неравенство

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{Im}\left[i\,\dfrac{\Omega_*(r;i\eta)}{P_*(r;i\eta)}\right]}{\eta^\delta}\,d\eta<\infty$$

для любого $\delta>1$. Отсюда на основании одной теоремы И. Каца [3] следует, что упомянутое интегральное представление имеет вид

$$i\,\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}=a_r+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}-\frac{\mu}{1+\mu^2}\right)d\sigma_r(\mu), \tag{3.6}$$

где a_r — вещественное число, а $\sigma_r(\mu)$ — неубывающая функция от μ, зависящая от r, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_r(\mu)}{1+|\mu|^\delta}<\infty.$$

Функция $i\,\dfrac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}$ допускает в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ еще одно представление. Действительно, обозначим через L^* пространство всех функций вида

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\quad(-\infty<\lambda<\infty),$$

где $f(t)$ пробегает $L(-\infty, \infty)$. Таким образом, пространству L^* принадлежат функции

$$\frac{1}{2} - \Omega_*(r; \lambda) = \int_0^r B(r, s) e^{i\lambda s} ds,$$

$$1 - P_*(r; \lambda) = \int_0^r A(r, s) e^{i\lambda s} ds.$$

По известной теореме Винера—Леви[1], если $g(\lambda) \in L^*$, а аналитическая функция $\Phi(z)$ регулярна на кривой $z = g(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ и $\Phi(0) = 0$, то $\Phi(g(\lambda)) \in L^*$. Поэтому принадлежит L^* также функция

$$\frac{1}{2} \frac{1 - P_*(r; \lambda)}{P_*(r; \lambda)}.$$

Далее, по теореме о свертке принадлежит L^* функция

$$\left[\Omega_*(r; \lambda) - \frac{1}{2}\right] \frac{1 - P_*(r; \lambda)}{P_*(r; \lambda)}.$$

Следовательно, принадлежит L^* и функция

$$\left[\Omega_*(r; \lambda) - \frac{1}{2}\right] \frac{1 - P_*(r; \lambda)}{P_*(r; \lambda)} + \left[\Omega_*(r; \lambda) - \frac{1}{2}\right] + \\ + \frac{1}{2} \frac{1 - P_*(r; \lambda)}{P_*(r; \lambda)} = \frac{\Omega_*(r; \lambda)}{P_*(r; \lambda)} - \frac{1}{2},$$

т. е.

$$\frac{\Omega_*(r; \lambda)}{P_*(r; \lambda)} - \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{H_r(t)} e^{i\lambda t} dt,$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_r(t)| dt < \infty.$$

Переписав формулу эту в виде

$$\frac{\Omega_*(r; \lambda)}{P_*(r; \lambda)} - \frac{1}{2} - \int_0^{\infty} \overline{H_r(t)} e^{i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{0} \overline{H_r(t)} e^{i\lambda t} dt$$

и заметив, что левая часть регулярна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$, а правая в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda < 0$, что обе они непрерывны вплоть до оси $\operatorname{Im} \lambda = 0$ и совпадают на ней, приходим к выводу, что они представляют постоянную величину, которая, очевидно, равна нулю. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{0} \overline{H_r(t)} e^{i\lambda t} dt = 0, \quad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Следовательно, полученное нами представление имеет вид

$$\frac{\Omega_*(r; \lambda)}{P_*(r; \lambda)} = \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} \overline{H_r(t)} e^{i\lambda t} dt, \quad \int_0^{\infty} |H_r(t)| dt < \infty. \tag{3.7}$$

---

[1] См., например, [1], стр. 157.

Ясно, что оно годится не только на вещественной оси λ, но и во всей полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$.

Теперь установим связь между функциями $H_r(t)$ $(0 < t < \infty)$ и $\sigma_r(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$. Для этого воспользуемся тождествами

$$i\,\frac{1+\lambda\mu}{(\lambda-\mu)(1+\mu^2)} = -\frac{\lambda^2}{\mu^2}\int\limits_0^\infty e^{i\lambda t}\left(1 - \frac{i\mu t}{1+\mu^2} - e^{-i\mu t}\right)dt \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0) \quad (3.8)$$

$$1 = -\lambda^2\int\limits_0^\infty e^{i\lambda t}\,t\,dt.$$

С помощью второго из этих тождеств перепишем представление (3.7) в виде

$$\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)} = -\frac{\lambda^2}{2}\int\limits_0^\infty te^{i\lambda t}\,dt + \int\limits_0^\infty \overline{H_r(t)}\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

Применяя ко второму члену правой части двукратное интегрирование по частям, находим

$$\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)} = -\lambda^2\int\limits_0^\infty\left\{\frac{t}{2} + \int\limits_0^t (t-s)\,\overline{H_r(s)}\,ds\right\}e^{i\lambda t}\,dt. \quad (3.9)$$

С другой стороны, равенство (3.6) можно представить в виде

$$\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)} = -ia_r + i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda\mu}{(\lambda-\mu)(1+\mu^2)}\,d\sigma_r(\mu).$$

Отсюда благодаря тождествам (3.8) следует

$$\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)} = -\lambda^2\int\limits_0^\infty\left\{-ia_rt + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{i\mu t}{1+\mu^2} - e^{-i\mu t}\right)\frac{d\sigma_r(\mu)}{\mu^2}\right\}e^{i\lambda t}\,dt.$$

Сравнение этого представления с (3.7) приводит к выводу, что на полуоси $t \geqslant 0$

$$\frac{t}{2} + \int\limits_0^t (t-s)\,\overline{H_r(s)}\,ds = -ia_rt + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{i\mu t}{1+\mu^2} - e^{-i\mu t}\right)\frac{d\sigma_r(\mu)}{\mu^2}.$$

Отсюда, переходя к комплексно сопряженным величинам, находим

$$\frac{t}{2} + \int\limits_0^t (t-s)\,H_r(s)\,ds = ia_rt + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{i\mu t}{1+\mu^2} - e^{i\mu t}\right)\frac{d\sigma_r(\mu)}{\mu^2}.$$

Правая часть определена на всей оси $(-\infty < t < \infty)$ как некоторая эрмитова функция. Продолжая $H_r(s)$ $(0 < s < \infty)$ на левую полуось по формуле

$$H_r(-s) = \overline{H_r(s)},$$

можем заменить полученную формулу следующей

$$\frac{|t|}{2}+\int_0^t (t-s)\,H_r(s)\,ds = ia_r t +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{i\mu t}{1+\mu^2}-e^{i\mu t}\right)\frac{d\sigma_r(\mu)}{\mu^2}\quad (-\infty<t<\infty). \tag{3.10}$$

Эта формула и выражает связь между функциями $H_r(t)$ и $\sigma_r(\mu)$.

§ 4. ***Лемма 2.*** *Если* $r_2>r_1>0$, *то почти всюду в интервале* $0\leqslant t\leqslant r_1$

$$H_{r_1}(t)=H_{r_2}(t).$$

Доказательство. Возьмем соотношение (2.4):

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}=\frac{a(r)e^{i\lambda r}}{[P_*(r;\lambda)]^2}. \tag{4.1}$$

Перепишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}=a(r)\,e^{i\lambda r}\cdot\left\{\frac{1}{[P_*(r;\lambda)]^2}-1\right\}+a(r)\,e^{i\lambda r}.$$

Положим

$$F_r(\lambda)=\frac{1}{[P_*(r;\lambda)]^2}-1.$$

Функция

$$\frac{F_r(\lambda)-F_r(0)}{\lambda}$$

в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ регулярна и вплоть до вещественной оси непрерывна. Кроме того, она принадлежит $L^2(-\infty,\infty)$ равномерно на всех прямых верхней полуплоскости, параллельных вещественной оси. Поэтому

$$\frac{F_r(\lambda)-F_r(0)}{\lambda}=\int_0^{\infty}\Psi_r(s)\,e^{i\lambda s}\,ds,$$

где $\Psi_r(s)\in L^2(0,\infty)$.

С помощью этого представления формулу (4.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}=a(r)\,e^{i\lambda r}\left\{F_r(0)+\lambda\int_0^{\infty}\Psi_r(s)\,e^{i\lambda s}\,ds+1\right\},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Omega_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)}=A(r)\,e^{i\lambda r}-i\lambda\int_r^{\infty}B_r(t)\,e^{i\lambda t}\,dt, \tag{4.2}$$

где

$$A(r)=a(r)(1+F_r(0))$$

и

$$B_r(t)=ia(r)\,\Psi_r(t-r),$$

так что

$$\int_r^{\infty}|B_r(t)|^2\,dt<\infty.$$

Интегрируя равенство (4.2) по r от r_1 до r_2 получаем

$$\frac{\Omega_*(r_2;\lambda)}{P_*(r_2;\lambda)}-\frac{\Omega_*(r_1;\lambda)}{P_*(r_1;\lambda)}=\int_{r_1}^{r_2}A(t)\,e^{i\lambda t}\,dt-i\lambda\int_{r_1}^{r_2}ds\int_s^{\infty}B_s(t)\,e^{i\lambda t}\,dt$$

или

$$\int_0^{\infty}[\overline{H_{r_2}(t)}-\overline{H_{r_1}(t)}]\,e^{i\lambda t}\,dt=\int_{r_1}^{r_2}A(t)\,e^{i\lambda t}-i\lambda\int_{r_1}^{r_2}ds\int_s^{\infty}B_s(t)\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

Отсюда утверждение леммы доказывается без всякого труда. Без применения общих теорем о спектре это можно сделать, умножив обе части на

$$-\frac{1}{i\lambda}=\int_0^{\infty}e^{i\lambda x}\,dx\quad(\operatorname{Im}\lambda>0).$$

Вводя для сокращения обозначения

$$h(t)=\overline{H_{r_2}(t)}-\overline{H_{r_1}(t)},$$

получим

$$\int_0^{\infty}e^{i\lambda x}\,dx\int_0^{\infty}h(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=\int_0^{\infty}e^{i\lambda x}dx\int_{r_1}^{r_2}A(t)\,e^{i\lambda t}\,dt+\int_{r_1}^{r_2}ds\int_s^{\infty}B_s(t)\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty}dx\int_x^{\infty}h(u-x)\,e^{i\lambda u}\,du=\int_0^{\infty}dx\int_{x+r_1}^{x+r_2}A(u-x)\,e^{i\lambda u}\,du+\int_{r_1}^{r_2}ds\int_s^{\infty}B_s(u)\,e^{i\lambda u}\,du.$$

Левая часть равна

$$\int_0^{\infty}e^{i\lambda u}\,du\int_0^{u}h(u-x)\,dx,$$

а правая часть после преобразований приводится к виду

$$\int_{r_1}^{\infty}K(u)\,e^{i\lambda u}\,du.$$

Поэтому на основании теоремы единственности

$$\int_0^{r_1}e^{i\lambda u}\,du\int_0^{u}h(u-x)\,dx=0\qquad(-\infty<\lambda<\infty)$$

или

$$\int_0^{r_1}e^{i\lambda u}\,du\int_0^{u}h(v)\,dv=0\qquad(-\infty<\lambda<\infty).$$

Но это значит, что

$$\int_0^{u}h(v)\,dv=0\qquad(0<u<r_1),$$

то-есть

$$h(v)=0$$

почти всюду в интервале $(0, r_1)$. Тем самым лемма доказана.

Следствие. Существует функция $H(t)\,(0\leqslant t<\infty)$, для которой

$$H_r(t)=H(t)\quad(0\leqslant t<r).$$

Лемма 3. В интервале $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$ вариация функции $\sigma_r(\lambda)$ равномерно ограничена при $r > \pi$.

Доказательство. Отщепляя в (3.10) вещественные части, получаем

$$|t| + 2\int_0^t (t-s)\operatorname{Re} H_r(s)\,ds = 2\int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos\lambda t)\frac{d\sigma_r(\lambda)}{\lambda^2}; \tag{4.3}$$

отсюда следует, что при $0 \leqslant t \leqslant \pi$

$$\frac{1}{4}\left\{t + 2\int_0^t (t-s)\operatorname{Re} H_r(s)\,ds\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\frac{\lambda t}{2}\frac{d\sigma_r(\lambda)}{\lambda^2} \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-1}^{1} \sin^2\frac{\lambda t}{2}\frac{d\sigma_r(\lambda)}{\lambda^2} \geqslant \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1} t^2\,d\sigma_r(\lambda).$$

Возьмем фиксированное t_0, $0 < t_0 < \pi$, и $r \geqslant \pi$ и воспользуемся следствием леммы 2, в силу которого

$$H_r(s) = H(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant t_0).$$

Тогда из написанного неравенства будет следовать, что

$$\int_{-1}^{1} d\sigma_r(\lambda) \leqslant \frac{\pi^2}{4t_0^2}\left\{t_0 + 2\int_0^{t_0} (t_0-s)\operatorname{Re} H(s)\,ds\right\},$$

а это доказывает нашу лемму.

Лемма 4. *Существует такое* $N < \infty$, *что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_r(\lambda)}{1+\lambda^2} < N$$

для любого $r \geqslant \pi$.

Доказательство. При $r \geqslant \pi$ и $0 \leqslant t < \pi$ из (4.3) следует неравенство

$$t + 2\int_0^t (t-s)\operatorname{Re} H(s)\,ds \geqslant 2\int_M^{\infty} (1-\cos\lambda t)\frac{d\sigma_r(\lambda)}{\lambda^2}.$$

Усредняя[1] по t от 0 до какого-нибудь $l\,(0 < l < \pi)$ найдем, что при любом $M > \frac{1}{l}$

$$\frac{1}{l}\int_0^l \left\{t + 2\int_0^t (t-s)\operatorname{Re} H(s)\,ds\right\}dt \geqslant 2\int_M^{\infty}\left(1 - \frac{\sin\lambda l}{\lambda l}\right)\frac{d\sigma_r(\lambda)}{\lambda^2} \geqslant 2\int_M^{\infty}\left(1 - \frac{1}{Ml}\right) \times$$

$$\times \frac{d\sigma_r(\lambda)}{\lambda^2} = 2\frac{Ml-1}{Ml}\int_M^{\infty}\frac{d\sigma_r(\lambda)}{\lambda^2}. \tag{4.4}$$

[1] Этот метод принадлежит М. Г. Крейну.

Отсюда, беря $l=\frac{3}{2}$, $M=1$, находим, что

$$\int_1^\infty \frac{d\sigma_r(\lambda)}{\lambda^2} \leqslant \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{t+2\int_0^t (t-s)\,\mathrm{Re}\,H(s)\,ds\right\} dt = C$$

и аналогичным образом

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{d\sigma_r(\lambda)}{\lambda^2} \leqslant C.$$

Из сказанного и леммы 3 вытекает требуемое неравенство.

§ 5. Теперь мы можем для нашей системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dr} &= i\lambda y - a(r)\,z \\ \frac{dz}{dr} &= -\overline{a(r)}\,y \end{aligned} \qquad y(0;\lambda)=z(0;\lambda)=1$$

построить неубывающую функцию $\sigma(\lambda)\,(-\infty<\lambda<\infty)$, удовлетворяющую неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty \tag{5.1}$$

и связанную с уже построенной эрмитовой функцией $H(t)\,(-\infty<\lambda<\infty)$ с помощью соотношения

$$t+2\int_0^t (t-s)\,\mathrm{Re}\,H(s)\,ds = 2\int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos\lambda t)\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2} \quad (t>0). \tag{5.2}$$

Для этого введем функции $\tau_r(\lambda)$ по формуле

$$\tau_r(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\sigma_r(t)}{1+t^2}$$

и будем рассматривать последовательность неубывающих функций $\tau_{r_n}(\lambda)$ $(\pi \leqslant r_0 < r_1 < \ldots)$, которые по доказанному имеют равномерно ограниченную вариацию на всей оси. По теореме Хелли существует подпоследовательность $\tau_{r'_n}(\lambda)$, сходящаяся в основном к некоторой неубывающей функции $\tau(\lambda)$.

Рассмотрим последовательность

$$\sigma_{r'_n}(\lambda) = \int_a^\lambda (1+t^2)\,d\tau_{r'_n}(\lambda),$$

где a — какая-то точка непрерывности предельной функции $\tau(\lambda)$. По второй теореме Хелли мы можем перейти к пределу под знаком интеграла, что приведет к некоторой функции $\sigma(\lambda)$.

Для доказательства неравенства (5.1) воспользуемся соотношением (4.4) при $r=r'_n$, $M=\frac{2}{l}$ и настолько малом $l>0$, чтобы левая часть была меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Получим неравенства

$$\int_M^\infty \frac{d\sigma_{r'_n}(\lambda)}{\lambda^2} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \int_{-\infty}^M \frac{d\sigma_{r'_n}(\lambda)}{\lambda^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Эти оценки позволяют сделать предельный переход в неравенстве

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{r_n}(\lambda)}{1+\lambda^2} < N,$$

и мы получаем требуемое неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < N.$$

Доказательство соотношения (5.2) получается с помощью найденных оценок и второй теоремы Хелли без всякого труда.

§ 6. Будем рассматривать соотношение (3.7). Прибавим к этому выражению комплексно сопряженную величину и, пользуясь (2.3) и тем, что функция $H_r(t)$ эрмитова, напишем

$$\frac{1}{|P_*(r;\lambda)|^2} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} H_r(-t)\,dt \quad (\operatorname{Im}\lambda = 0).$$

Еще ранее мы имели выражение (3.5) для $P_*(r;\lambda)$, которому можно придать вид

$$P_*(r;\lambda) = 1 - \int_0^r e^{i\lambda s}\overline{\Gamma_r(r, r-s)}\,ds.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{P_*(r;\lambda)} = \left(1 - \int_0^r e^{-i\lambda s}\Gamma_r(r, r-s)\,ds\right)\left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} H_r(-t)\,dt\right). \tag{6.1}$$

Левую часть перепишем в виде

$$\frac{1}{P_*(r;\lambda)} = 1 + \frac{1 - P_*(r;\lambda)}{P_*(r;\lambda)},$$

а так как ранее было показано, что второе слагаемое справа, рассматриваемое при $-\infty < \lambda < \infty$ принадлежит L^* и функция $P_*(r;\lambda)$ не имеет корней в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, то

$$\frac{1}{P_*(r;\lambda)} = 1 + \int_0^{\infty} C_r(s)\,e^{i\lambda s}\,ds \quad (C_r(s) \in L) \quad (0, \infty)$$

Таким образом, (6.1) можно переписать в таком виде:

$$\int_0^{\infty} C_r(s)\,e^{i\lambda s}\,ds + \int_0^r e^{-i\lambda t}\Gamma_r(r, r-t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} H_r(-s)\,ds -$$

$$- \int_0^r e^{-i\lambda t}\Gamma_r(r, r-t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} H_r(-s)\,ds = \int_0^r e^{-i\lambda t} H_r(t)\,dt -$$

$$- \int_0^r e^{-i\lambda t}\,dt \int_0^r \Gamma_r(r-u)\,H(t-u)\,du + \int_r^{\infty} e^{-i\lambda t}\left\{H_r(t) - \int_0^r \Gamma_r(r, r-u)\,du\right\} dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda t}\left\{H_r(t) - \int_0^r \Gamma_r(r, r-u)\,H(t-u)\,du\right\} dt.$$

На основании теоремы единственности для преобразования Фурье и следствия леммы 2

$$\Gamma_r(r, r-t) = H(t) - \int_0^r H(t-u)\Gamma_r(r, r-u)\,du \quad (0 \leqslant t \leqslant r)$$

или

$$\Gamma_r(r, \tau) = H(r-\tau) - \int_0^r \Gamma_r(r, s) H(s-\tau)\,ds \quad (0 \leqslant \tau \leqslant r). \qquad (6.2)$$

Теперь мы построим функцию $\Gamma_r(t, \tau)$ $(0 \leqslant t, \tau < r)$ так, чтобы выполнялись соотношения М. Г. Крейна из § 1. Вначале положим

$$\Gamma_r(r, t) = \overline{\Gamma_r(t, r)} \quad (0 \leqslant t < r).$$

Таким образом, кроме $\Gamma_r(r, \tau)$ определена функция $\Gamma_r(\tau, r)$, и мы можем для дальнейшего взять уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r}\Gamma_r(t, \tau) = -\Gamma_r(t, r)\Gamma_r(r, \tau) \quad (0 \leqslant t < r).$$

Отсюда при $t < \tau < r$

$$\Gamma_r(\tau, t) = \Gamma_\tau(\tau, t) - \int_\tau^r \Gamma_s(\tau, s)\Gamma_s(s, t)\,ds$$

и

$$\Gamma_r(t, \tau) = \Gamma_\tau(t, \tau) - \int_\tau^r \Gamma_s(t, s)\Gamma_s(s, \tau)\,ds.$$

Правые части вполне определены и сопряжены между собой. Следовательно, тем же свойством обладают и левые части, то-есть

$$\Gamma_r(t, \tau) = \overline{\Gamma_r(\tau, t)}.$$

Далее, покажем, что

$$\Gamma_r(t, \tau) = H(t-\tau) - \int_0^r \Gamma_r(t, s) H(s-\tau)\,ds \quad (0 \leqslant t, \tau < r). \qquad (6.3)$$

С этой целью положим

$$\varphi(r) = \Gamma_r(t, \tau) + \int_0^r \Gamma_r(t, s) H(s-\tau)\,ds$$

при фиксированных t, τ $(0 \leqslant t, \tau < r)$. Мы можем принять, что $t > \tau$. Дифференцируя по r, находим, что

$$\varphi'(r) = -\Gamma_r(t, r)\left\{\Gamma_r(r, \tau) - H(r-\tau) + \int_0^r \Gamma_r(r, s) H(s-\tau)\,ds\right\}.$$

На основании (6.2) эта величина равна 0. Следовательно, функция $\varphi(r)$ при указанных условиях от r не зависит. Полагая $r \to t$ и учитывая (6.2), находим, что

$$\varphi(r) = \varphi(t) = H(t-\tau).$$

Тем самым равенство (6.3) доказано. Переходя в нем к сопряженным величинам, получим следующее соотношение:

$$\Gamma_r(\tau, t) = H(\tau - t) - \int_0^r H(\tau - s)\Gamma_r(s, t)\,ds \quad (0 \leqslant t, \tau < r) \qquad (6.4)$$

Из соотношений (6.3) и (6.4) следует, что $\Gamma_r(\tau, t)$ есть резольвента ядра $H(\tau - s)$. Теперь уже можно определить $\Gamma_r(t, \tau)$ при $0 \leqslant t < r$, $-\infty < \tau < \infty$, и все соотношения, установленные М. Г. Крейном, будут выполнены. Вместе с тем будет выполнено и равенство Парсеваля, откуда следует, что построенная функция $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ является спектральной функцией или одной из спектральных функций нашей системы дифференциальных уравнений.

§ 7. Для пояснения изложенной теории рассмотрим простой, но, как оказывается, далеко нетривиальный случай, когда $a(r)$ есть константа. Примем, что $|a| = \frac{1}{2}$ и положим:

$$a = \frac{\alpha + i\beta}{2} = \frac{1}{2} e^{i\varphi},$$

где $\alpha \geqslant 0$.

В этом случае решение рассматриваемой нами системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$P(r; \lambda) = e^{\frac{i\lambda r}{2}} \left\{ \cos \frac{r\sqrt{\lambda^2 - 1}}{2} + \frac{i\lambda - 2a}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \sin \frac{r\sqrt{\lambda^2 - 1}}{2} \right\},$$

$$P_*(r; \lambda) = e^{\frac{i\lambda r}{2}} \left\{ \cos \frac{r\sqrt{\lambda^2 - 1}}{2} + \frac{i\lambda - 2\bar{a}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \sin \frac{r\sqrt{\lambda^2 - 1}}{2} \right\}.$$

Сравнивая эти формулы с интегральными представлениями (3.4), (3.5), мы можем получить выражение для $\Gamma_r(r, s)$ $(0 \leqslant s < r)$. С этой целью воспользуемся известными формулами

$$\frac{\sin(r\sqrt{\lambda^2 - 1})}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = \int_0^r \cos(\lambda t)\, I_0\left(\sqrt{r^2 - t^2}\right) dt,$$

$$\cos\left(r\sqrt{\lambda^2 - 1}\right) = \cos(\lambda r) + \int_0^r \cos(\lambda t) \frac{r I_1(\sqrt{r^2 - t^2})}{\sqrt{r^2 - t^2}}\, dt,$$

$$\frac{\lambda \sin(r\sqrt{\lambda^2 - 1})}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = \sin(\lambda r) + \int_0^r \sin(\lambda t) \frac{t I_1(\sqrt{r^2 - t^2})}{\sqrt{r^2 - t^2}}\, dt,$$

где $I_0(x) = J_0(ix)$, $I_1(x) = \frac{1}{i} J_1(ix)$ — так называемые модифицированные функции Бесселя. С помощью этих формул находим, что

$$P(r; \lambda) = e^{i\lambda r} - \int_0^r e^{i\lambda s} \left[a I_0\left(\sqrt{s(r-s)}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{r-s}}\, I_1\left(\sqrt{s(r-s)}\right) \right] ds.$$

Следовательно,

$$\Gamma_r(r, s) = \frac{e^{i\varphi}}{2} I_0\left(\sqrt{s(r-s)}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{r-s}}\, I_1\left(\sqrt{s(r-s)}\right) \quad (0 \leqslant s < r).$$

Теперь надлежит найти $H(t)$. Из уравнения (6.2), заменяя r на t и полагая $\tau = 0$, находим следующее уравнение Вольтерра

$$H(t) = \int_0^t \Gamma_t(t, s) H(s)\, ds + \frac{e^{i\varphi}}{2} \quad (t > 0).$$

Решение этого уравнения, очевидно, имеет вид

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, e^{in\varphi}.$$

Подставляя это выражение в уравнения и сравнивая одинаковые гармоники, получим для функций $f_n(t)$ следующие соотношения:

$$f_1(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{\frac{s}{t-s}}\, I_1(\sqrt{s(t-s)})\, f_1(s)\, ds = \frac{1}{2},$$

$$f_n(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{\frac{s}{t-s}}\, I_1(\sqrt{s(t-s)})\, f_n(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t I_0(\sqrt{s(t-s)})\, f_{n-1}(s)\, ds \quad (n = 2,\ 3\ \ldots).$$

Эта система решается без труда. Ограничимся окончательными формулами:

$$f_n(t) = \frac{n}{t} J_n(t) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом мы находим, что

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{t} J_n(t)\, e^{in\varphi} \quad (t > 0).$$

С помощью формулы Бэйтмена[1]

$$\int_0^t J_\mu(x)\, J_\nu(t-x)\, \frac{dx}{x} = \frac{J_{\mu+\nu}(t)}{\mu} \quad (\mu,\ \nu > 0),$$

полученное разложение для $H(t)$ можно просуммировать и мы найдем, что

$$H(t) = \frac{1}{2} e^{it \sin\varphi} \left\{ e^{i\varphi} + \int_0^t J_1(x)\, e^{-ix \sin\varphi} \frac{dx}{x} \right\}.$$

Теперь можно уже найти $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Для этого служит соотношение

$$\frac{|t|}{2} + \int_0^t (t-s)\, H(s)\, ds = iCt + \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{i\mu t}{1+\mu^2} - e^{i\mu t}\right) \frac{d\sigma(\mu)}{\mu^2} \quad (-\infty < t < \infty),$$

где C — вещественное число, $H(-s) = \overline{H(s)}$. Это уравнение можно решить, разлагая левую часть в ряд по степеням $e^{i\varphi}$ и используя некоторые интегральные представления теории бесселевых функций. В результате получается следующая формула:

$$\frac{t}{2} + \int_0^t (t-s)\, H(s)\, ds = \frac{\alpha}{\beta^2}\left(\frac{i\beta t}{1+\beta^2} - e^{i\beta t}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_E \left(1 + \frac{i\lambda t}{1+\lambda^2} - e^{i\lambda t}\right) \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda - \beta} \frac{d\lambda}{\lambda^2} + iCt,$$

[1] См., например, [2], стр. 415.

где $t > 0$, $\sqrt{\lambda^2 - 1}$ положителен при $\lambda > 1$ и отрицателен при $\lambda < -1$, а E означает точечное множество, образованное интервалами

$$(E) \qquad\qquad (-\infty, -1), (1, \infty)$$

и C — вещественная постоянная.

Таким образом, в этом примере спектральная функция имеет скачок величины α в точке $\lambda = \beta$, а остальные точки интервала $(-1, 1)$ являются точками постоянства для $\sigma(\lambda)$.

С помощью несложных преобразований нетрудно получить, что

$$C = \frac{\beta(\alpha + \sqrt{2})}{2(1 + \beta^2)}.$$

В заключение приношу глубокую благодарность проф. Н. И. Ахиезеру, под руководством которого была выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Изд. 2-е, М., «Наука», 1965.
2. Дж. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. 1. Изд-во иностр. лит., М., 1949.
3. И. Кац. Об интегральных представлениях аналитических функций, отображающих верхнюю полуплоскость в ее часть. «Усп. матем. наук», 69 (1956), 139—144.
4. М. Г. Крейн. ДАН, **105**, № 4 (1955), 637—640.