О МИНИМИЗАЦИИ КВАЗИКВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. М. Глазман, Ю. Ф. Сенчук

1. Настоящая статья[1] посвящена обобщению предложенного в [1] метода минимизации неквадратичных функционалов в евклидовом пространстве на случай абстрактного гильбертова пространства H. При этом мы ограничиваемся функционалами вида

$$\Phi[y] = (Ay,\ y) + \varphi[y], \tag{1}$$

где A — самосопряженный положительно определенный оператор с плотной в H областью определения D_A, а $\varphi[y]$ — функционал, определенный во всем H и удовлетворяющий некоторым условиям подчиненности по отношению к $(Ay,\ y)$, которые будут описаны в n° 2. При выполнении этих условий мы будем называть функционал (1) квазиквадратичным. Простым примером квазиквадратичного функционала в $L_2(a,\ b)$ является интеграл вида

$$\Phi[y] = \int_a^b [(y^{(n)})^2 + f(x,\ y)]\,dx$$

при краевых условиях

$$y^{(s)}(a) = y^{(s)}(b) = 0 \quad (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

для которого обобщение результатов заметки [1] дано в нашей статье [2].

В настоящей работе получены результаты, позволяющие применить описанный в [1] метод градиентной релаксации также к минимизации некоторых кратных интегралов вариационного исчисления и к решению нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Соответствующие примеры рассматриваются ниже в n°n° 8—10.

2. Об операторе А, кроме указанного в n° 1, предположим еще, что он имеет вполне непрерывный обратный оператор A^{-1}. Далее, вводя в рассмотрение пространство H_A (см., напр., [3]) со скалярным произве-

---

[1] Краткое сообщение о результатах этой статьи (за исключением n° n° 9 и 10) приводится без доказательств в [10].

…ением $[y, z] = (A^{\frac{1}{2}}y, A^{\frac{1}{2}}z)$, получим определенный всюду в H_A «расширенный» функционал[1]

$$\Phi[y] = \|y\|^2 + \varphi[y], \tag{2}$$

где $\|y\| = \sqrt{[y, y]}$.

Функционал $\varphi[y]$ подчиним следующим требованиям:

а) *существует не зависящая от $y \in H_A$ константа $\mu > -\infty$, такая, что всюду в H_A $\varphi[y] \geqslant \mu$;*

б) *функционал $\varphi[y]$ непрерывен в метрике H;*

в) *всюду в H_A функционал $\varphi[y]$ имеет линейный дифференциал Гато $d_1(\varphi, \eta) = [\nabla\varphi[y], \eta]$, и в каждой ограниченной области $\Omega \subset H_A$ градиент $\nabla\varphi[y]$ функционала $\varphi[y]$ есть ограниченный оператор относительно y;*

г) *если ограниченная в H_A последовательность $\{y_n\}$ сходится в метрике H к некоторой точке $y^* \in H_A$, то при этом $\nabla\varphi[y_n] \underset{H_A}{\to} \nabla\varphi[y^*]$;*

д) *оператор $\nabla\varphi[y]$ в любой ограниченной области $\Omega \subset H_A$ имеет производную Гато $(\nabla\varphi[y])'$, которая является ограниченным в H_A оператором относительно y.*

Очевидно, что функционал $\varphi[y]$ ограничен в любой ограниченной области $\Omega \subset H_A$. Кроме того, если $\Phi[y] \leqslant N < \infty$, то $\|y\|^2 \leqslant N - \varphi[y]$, т. е.

$$\|y\|^2 \leqslant N - \mu.$$

Итак, справедливо следующее предложение:

1°. *Функционал (2) ограничен в любой ограниченной области пространства H_A. Обратно, часть пространства H_A, в которой $\Phi[y] \leqslant N < \infty$, ограничена.*

3. Предположим, что некоторая последовательность элементов $y_n \in H_A$ сходится слабо в метрике H_A к некоторому элементу $y^* \in H_A$:

$$y_n \overset{\text{сл.}}{\underset{H_A}{\to}} y^*.$$

Это значит, что при любом $\psi \in H_A$ будет $[y_n, \psi] \to [y^*, \psi]$, т. е. $(A^{\frac{1}{2}}y_n, A^{\frac{1}{2}}\psi) \to (A^{\frac{1}{2}}y^*, A^{\frac{1}{2}}\psi)$, откуда следует, что $A^{\frac{1}{2}}y_n \overset{\text{сл.}}{\underset{H}{\to}} A^{\frac{1}{2}}\psi$. Но тогда в силу вполне непрерывности оператора $A^{-\frac{1}{2}}$ будет $y_n \underset{H}{\to} \psi$.

Итак, если оператор A^{-1} вполне непрерывен в метрике H, то из слабой сходимости последовательности $\{y_n\}$ в метрике H_A вытекает ее сильная сходимость в метрике H. Привлекая еще условие б) n°2, приходим к следующему предложению.

2°. *Функционал $\varphi[y]$ слабо непрерывен в метрике H_A.*

Далее, из соотношения (2), в силу условия а) n°2 следует, что

$$\lim_{\|y\|\to\infty} \Phi[y] = +\infty. \tag{3}$$

Но тогда (см. [4], стр. 303) имеет место следующая

Теорема 1. *Существует минимизирующая последовательность $\{y_n\}$, сходящаяся в метрике H_A к точке $\bar{y} \in H_A$, в которой функционал (2) достигает своего абсолютного минимума.*

---

[1] В дальнейшем рассматривается только этот функционал, для которого мы не вводим нового обозначения.

4. Как известно, градиент $\nabla\Phi[y]$ функционала $\Phi[y]$ в пространстве H_A при каждом $y \in H_A$ определяется соотношением

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi[y+t\eta]-\Phi[y]}{t}=[\nabla\Phi[y],\ \eta],$$

где η — произвольный элемент из H_A.

В силу условия в) n°2, функционал (2) всюду в H_A имеет линейный дифференциал Гато $d_1(\Phi,\ \eta)=[\nabla\Phi[y],\ \eta]$ и, очевидно,

$$\nabla\Phi[y]=2y+\nabla\varphi[y].$$

Поэтому (см. [4], [9]) точка абсолютного минимума функционала (2) в H_A является его стационарной точкой, т. е. $\nabla\Phi[\breve{y}]=0$.

Будем считать, что других стационарных точек функционал (2) не имеет. Это, в частности, будет выполняться в том случае, когда функционал $\Phi[y]$ выпуклый. Однако в настоящей работе, за исключением n°7, выпуклость функционала (2) не требуется.

На основании условия в) n°2 заключаем, что

1°. *В каждой ограниченной области* $\Omega\subset H_A$ $\nabla\Phi[y]$ *есть ограниченный оператор относительно* y.

Справедливо также следующее предложение:

2°. *В области пространства* H_A, *определяемой соотношением* $\Phi[\breve{y}]+\delta\leqslant\Phi[y]\leqslant N$, *где* $\delta>0$, $N<\infty$, *величина* $\|\nabla\Phi[y]\|$ *ограничена снизу положительной константой.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует последовательность $y_n\in H_A$, на которой $\|\nabla\Phi[y_n]\|\to 0$. Из соотношения $\Phi[y_n]\leqslant N$, в силу свойства 1° n°2, следует, что последовательность $\{y_n\}$ ограничена в H_A. На основании слабой компактности сферы в гильбертовом пространстве H_A из последовательности $\{y_n\}$ можно выделить такую подпоследовательность (обозначаем ее снова через $\{y_n\}$), что будет $y_n \underset{H_A}{\overset{\text{сл.}}{\to}} y^*$, где $y^*\in H_A$ (в силу слабой замкнутости пространства H_A). Но тогда, как уже отмечалось в n°3, будет $y_n \underset{H}{\to} y^*$.

Запишем соотношение

$$\nabla\Phi[y_n]=2y_n+\nabla\varphi[y_n] \tag{4}$$

и перейдем в нем к пределу при $n\to\infty$ в метрике H. Поскольку $\|\nabla\Phi[y_n]\|\to 0$ (по предположению от противного), то тем более будет $\nabla\Phi[y_n]\to 0$ в метрике H. Далее, в силу условия г) n°2, будет $\nabla\varphi[y_n]\to\nabla\varphi[y^*]$ в метрике H_A и тем более в метрике H. Поэтому в пределе из (4) получим

$$0=2y^*+\nabla\varphi[y^*], \tag{5}$$

т. е.

$$\nabla\Phi[y^*]=0,$$

откуда на основании предположенной единственности стационарной точки, $y^*=\breve{y}$.

Итак, существует последовательность $\{y_n\}$, сходящаяся в метрике H и слабо сходящаяся в метрике H_A к точке $\breve{y}$ и такая, что на ней $\|\nabla\Phi[y_n]\|\to 0$.

Совершим теперь предельный переход от (4) к (5) в метрике H_A. Поскольку из соотношения $y_n \underset{H_A}{\overset{\text{сл.}}{\to}} \breve{y}$ следует, что $y_n \underset{H}{\to} \breve{y}$, то, в силу условия

2) n°2, $\nabla\varphi[y_n] \underset{H_A}{\rightarrow} \nabla\varphi[\check{y}]$. Кроме того, по предположению от противного $\nabla\Phi[y_n] \underset{H_A}{\rightarrow} 0 = \nabla\Phi[\check{y}]$. Но тогда и y_n стремятся к $\check{y}$ в метрике H_A не только слабо, но и сильно, откуда, в силу очевидной непрерывности функционала (2) в H_A, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \Phi[y_n] = \Phi[\check{y}],$$

что противоречит положительности числа δ.

В силу условия д) $n°2$, имеет место формула Тэйлора 2-го порядка (см. [5], [6])

$$\Phi[y+u] - \Phi[y] = [\nabla\Phi[y], u] + \frac{1}{2}[(\nabla\Phi[\hat{y}])' u, u], \tag{6}$$

где y и u — произвольные элементы из H_A, а $(\nabla\Phi[\hat{y}])'$ — производная Гато оператора $\nabla\Phi[y]$ в точке $\hat{y} = y + \theta u$ $(0 < \theta < 1)$.

На основании ограниченности величины $\|(\nabla\Phi[\hat{y}])'\|$ из (6) следует, что

$$\Phi[y+u] - \Phi[y] = [\nabla\Phi[y], u] + O(\|u\|^2). \tag{7}$$

5. *Перейдем теперь к исследованию процесса градиентной релаксации*

$$y_{n+1} = y_n - \gamma_n \nabla\Phi[y_n], \tag{8}$$

где множители γ_n находим при помощи описанного в [1] и [2] алгоритма $\mathfrak{R}$.

Для доказательства сходимости процесса (8) к $\check{y}$ в метрике H_A достаточно предварительно установить два вспомогательных утверждения (см. [1] и [2]). Напомним в связи с первым из этих предложений, что множителем полной релаксации функционала $\Phi[y]$ в точке y называется наименьший положительный корень уравнения $\chi'(t) = 0$, где $\chi(t) = \Phi[y - t\nabla\Phi[y]]$.

Лемма 1. *В области $\Omega \subset H_A$, определяемой соотношением $\Phi[y] \leqslant N < \infty$, множитель $\alpha[y]$ полной релаксации функционала* (2) *ограничен снизу положительной константой.*

Доказательство. Поскольку $\chi'(0) = -\|\nabla\Phi[y]\|^2$ и

$$\int_0^\alpha \chi''(t)\,dt = \|\nabla\Phi[y]\|^2,$$

то (см. [2]) достаточно доказать, что при любом $y \in \Omega$ и любом релаксационном t

$$|\chi''(t)| \leqslant \nu\|\nabla\Phi[y]\|^2, \tag{9}$$

где ν — некоторая константа. Но

$$\chi(t) = [y - t\nabla\Phi[y], y - t\nabla\Phi[y]] + \varphi[y - t\nabla\Phi[y]],$$

а значит

$$\chi'(t) = -2[\nabla\Phi[y], y - t\nabla\Phi[y]] - [\nabla\varphi[y - t\nabla\Phi[y]], \nabla\Phi[y]],$$
$$\chi''(t) = 2\|\nabla\Phi[y]\|^2 + [(\nabla\varphi[y - t\nabla\Phi[y]])' \nabla\Phi[y], \nabla\Phi[y]]. \tag{10}$$

В силу условия д) n°2, существует константа M, не зависящая ни от $y \in \Omega$, ни от значения релаксационного множителя t и такая, что

$$|[(\nabla\varphi(y - t\nabla\Phi[y]])' \nabla\Phi[y], \nabla\Phi[y]]| \leqslant M\|\nabla\Phi[y]\|^2.$$

Но тогда, на основании соотношения (10), при $\nu = 2 + M$ выполняется и условие (9).

Лемма 2. *Если в процессе* (8) $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0$, *но* $\lim_{n\to\infty}\Phi[y_n] > \Phi[\breve{y}]$, *то длина релаксационного пути конечна, т. е.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| y_{n+1} - y_n \| < \infty.$$

Доказательство этой леммы совпадает с доказательством аналогичной леммы из [2], если воспользоваться соотношением (7) и свойствами 1° и 2° n° 4.

На основании лемм 1 и 2 точно так же, как в [1] и [2], устанавливается

Теорема 2. *При любом начальном приближении* $y_0 \in H_A$ *алгоритм* $\mathfrak{R}$ *обеспечивает сходимость в метрике* H_A *последовательности* $\{y_n\}$, *построенной по формуле* (8), *к точке* $\breve{y} \in H_A$, *в которой функционал* $\Phi[y]$ *достигает абсолютного минимума.*

6. Для исследования скорости сходимости рассматриваемого процесса потребуются некоторые дополнительные предположения относительно функционала $\varphi[y]$, которые мы будем формулировать постепенно, по мере их использования. Прежде всего предположим, что

е) *градиент* $\nabla\varphi[y]$ *функционала* $\varphi[y]$ *допускает в окрестности точки* $\breve{y}$ *разложение*

$$\nabla\varphi[y] = \nabla\varphi[\breve{y}] + (\nabla\varphi[\breve{y}])'(y-\breve{y}) + O(\|y-\breve{y}\|^2).$$

В этом случае имеет место соотношение

$$\nabla\Phi[y] = 2y + \nabla\varphi[\breve{y}] + (\nabla\varphi[\breve{y}])'(y-\breve{y}) + O(\|y-\breve{y}\|^2),$$

а значит и соотношение

$$\Phi[y] = \|y\|^2 + \varphi[\breve{y}] + [\nabla\varphi[\breve{y}],\ y-\breve{y}] + \\ + \frac{1}{2}[(\nabla\varphi[\breve{y}])'(y-\breve{y}),\ y-\breve{y}] + O(\|y-\breve{y}\|^3).$$

Полагая $y-\breve{y}=z$, будем иметь

$$\Phi[\breve{y}+z] = [z+\breve{y},\ z+\breve{y}] + \varphi[\breve{y}] + [\nabla\varphi[\breve{y}],\ z] + \\ + \frac{1}{2}[(\nabla\varphi[\breve{y}])'z, z] + O(\|z\|^3) = [z, z] + [2\breve{y} + \nabla\varphi[\breve{y}], z] + \\ + [\breve{y}, \breve{y}] + \varphi[\breve{y}] + \frac{1}{2}[(\nabla\varphi[\breve{y}])'z, z] + O(\|z\|^3).$$

Учитываем, что $2\breve{y} + \nabla\varphi[\breve{y}] = \nabla\Phi[\breve{y}] = 0$. Тогда $\Phi[y]$ лишь на константу отличается от функционала

$$\psi[z] = [z, z] + \frac{1}{2}[(\nabla\varphi[\breve{y}])'z,\ z] + O(\|z\|^3).$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно с самого начала считать, что $\Phi[y]$ имеет вид

$$\Phi[y] = [y, y] + \frac{1}{2}([\nabla\varphi[0])'y, y] + O(\|y\|^3) \tag{11}$$

и достигает своего абсолютного минимума $m=0$ в точке $\breve{y}=0$.

Из (11) следует, что в достаточно малой окрестности точки $\breve{y}=0$ выполняется неравенство

$$\left[\left(I + \frac{1}{2}(\nabla\varphi[0])'\right)y, y\right] \geqslant 0.$$

Однако для дальнейшего мы предположим, что ж) *оператор* $I + \frac{1}{2}(\nabla\varphi[0])'$ *является самосопряженным положительно определенным оператором в* H_A.

Полагая $T = I + \frac{1}{2}(\nabla\varphi[0])'$ и $[Ty, y] = F[y]$, перепишем соотношение (11) в виде

$$\Phi[y] = F[y] + O(\|y\|^3). \tag{12}$$

Формула (12) представляет квазиквадратичный функционал $\Phi[y]$ в виде суммы его квадратичной части $F[y]$ и остаточного члена. Аналогично для градиента функционала $\Phi[y]$

$$\nabla\Phi[y] = \nabla F[y] + O(\|y\|^2). \tag{13}$$

Покажем, что функционал $\varphi[y]$ не вырождается в точке минимума, т. е. при некотором $r > 0$ выполняется неравенство

$$\|\nabla F[y]\| \geqslant r\|y\|. \tag{14}$$

Действительно,

$$F[y] = \|y\|^2 + \frac{1}{2}[(\nabla\varphi[0])'y, y],$$

и, в силу условия ж),

$$[Ty, y] \geqslant \rho\|y\|^2. \tag{15}$$

С другой стороны

$$[\nabla F[y], y] = [2Ty, y] = 2F[y],$$

а поэтому на основании (15)

$$[\nabla F[y], y] \geqslant 2\rho\|y\|^2$$

и тем более

$$\|\nabla F[y]\| \cdot \|y\| \geqslant 2\rho\|y\|^2,$$

откуда следует (14) при $r = 2\rho$.

Из соотношений (13), (14) и (6) легко вытекают следующие две леммы (см. [2]):

Лемма 1. *Если релаксационный процесс* (8) (*построенный не обязательно при помощи алгоритма* $\mathfrak{R}$) *сходится в метрике* H_A *к точке минимума функционала* $\Phi[y]$, *то этот процесс является «асимптотически градиентным» для функционала* $F[y]$, *т. е. угол между* $\nabla\Phi[y_n]$ *и* $\nabla F[y_n]$ *в* H_A *стремится к нулю при* $n \to \infty$.

Лемма 2. *Если некоторый релаксационный процесс вида* (8) *сходится в метрике* H_A *к точке минимума функционала* $\Phi[y]$ *и при этом* $\gamma_n \not\to 0$, *то, начиная с некоторого* n, *этот процесс будет релаксационным и для функционала* $F[y]$.

Примечание. При доказательстве леммы 2 используются соотношения $\|\nabla\Phi[y]\| = O(\|y\|)$ и $\|\nabla F[y]\| = O(\|y\|)$. Второе вытекает из равенства $\nabla F[y] = 2Ty$ и ограниченности в H_A оператора T, а первое — из равенства (14).

Предположим, наконец, что

з) *оператор* $T - I = \frac{1}{2}(\nabla\varphi[0])'$ *вполне непрерывен в* H_A.

Тогда (см. [2], [7]) справедлива следующая

Теорема 3. *Скорость сходимости последовательности* $\{y_n\}$, *построенной при помощи алгоритма* $\mathfrak{R}$, *к точке минимума функционала* $\Phi[y]$ *не меньше скорости сходимости некоторой геометрической прогрессии.*

7. Если условие $I+\frac{1}{2}(\nabla\varphi[y])'>0$ выполняется не только в точке $\breve{y}$ (ниже мы уже не предполагаем, что $\breve{y}=0$), а всюду в H_A, то функционал $\Phi[y]$ выпуклый, и в этом случае можно оценить погрешность n-го приближения процесса (8).

Пусть y_n есть n-ое приближение (полученное не обязательно при помощи алгоритма $\mathfrak{R}$). Очевидно, что $\Phi[\breve{y}]\leqslant\Phi[y_n]$, т. е. $\|\breve{y}\|^2+\varphi[y]\leqslant\leqslant\Phi[y_n]$, откуда

$$\|\breve{y}\|^2\leqslant\Phi[y_n]-\varphi[\breve{y}]\leqslant\Phi[y_n]-\mu.$$

Следовательно, искомая точка $\breve{y}$ принадлежит сфере $\|y\|\leqslant N_n$, где $N_n=\sqrt{\Phi[y_n]-\mu}$.

С другой стороны,

$$\Phi[y]=\Phi[y_n]+[\nabla\Phi[y_n],\ y-y_n]+\frac{1}{2}[(\nabla\Phi[\hat{y}])'(y-y_n),\ y-y_n].$$

Учитывая положительность оператора $I+\frac{1}{2}(\nabla\varphi[y])'$, получим отсюда

$$\Phi[y]\geqslant\Phi[y_n]+[\nabla\Phi[y_n],\ y-y_n].$$

Таким образом (см. [2]), приходим к следующим оценкам:

$$\Phi[y_n]-N_n\|\nabla\Phi[y_n]\|-[\nabla\Phi[y_n],\ y_n]\leqslant\Phi[\breve{y}]\leqslant\Phi[y_n], \tag{16}$$
$$\|y_n-\breve{y}\|\leqslant\sqrt{N_n\|\nabla\Phi[y_n]\|+[\nabla\Phi[y_n],\ y_n]}.$$

Если $y_n \underset{H_A}{\rightarrow} \breve{y}$, то левая и правая части двойного неравенства (16) стремятся к средней его части $\Phi[\breve{y}]$.

8. В качестве первой иллюстрации возьмем функционал

$$\Phi[u]=\iint_S[u''^2_{xx}+2u''^2_{xy}+u''^2_{yy}+f(x,y,u)]\,dS \tag{17}$$

при краевых условиях

$$u\Big|_\Gamma=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_\Gamma=0, \tag{18}$$

где Γ — граница области S, а ν — нормаль к Γ.

К минимизации такого функционала приводит, в частности, задача об определении прогиба произвольно нагруженной пластинки, лежащей на основании с нелинейной характеристикой упругости и заделанной вдоль всего контура Γ.

Функцию $f(x, y, u)$ в (17) будем считать непрерывной по x и y, трижды непрерывно дифференцируемой по u и всюду в цилиндре $(x, y)\in S$, $-\infty<u<\infty$ удовлетворяющей условию

$$f(x,y,u)\geqslant\beta>-\infty. \tag{19}$$

Рассмотрим действующий в пространстве $H=L_2(S)$ положительно определенный оператор $A=\Delta^2$, порождаемый операцией $\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$. Как известно, обратный оператор вполне непрерывен в H.

Поскольку

$$(Au,u)=\iint_S u\Delta^2 u\,dS,$$

то (см. [3]),

$$(Au,u)=\iint_S(u''^2_{xx}+2u''^2_{xy}+u''^2_{yy})\,dS.$$

Итак,

$$\Phi[y] = (Au, u) + \varphi[u],$$

где

$$\varphi[u] = \iint_S f(x, y, u)\, dS.$$

В пространстве H_A метрика определяется равенством

$$[u, v] = \iint_S (u''_{xx} v''_{xx} + 2u''_{xy} v''_{xy} + u''_{yy} v''_{yy})\, dS.$$

В дальнейшем вместо функционала (17) будем рассматривать функционал

$$\Phi[u] = \|u\|^2 + \varphi[u], \tag{20}$$

где $\|u\| = \sqrt{[u, u]}$.

В силу теоремы вложения для пространств H_A и $C(S)$ (см., напр., [8]), для каждой ограниченной области $\Omega \subset H_A$ существует константа σ, такая, что для всех $u \in \Omega$

$$|u| \leqslant \sigma \|u\|, \tag{21}$$

где $|u|$ есть C — норма функции $u \in H_A$.

Выполнение условия а) n°2 для функционала $\varphi[u]$ следует из (19).

Покажем, что для функционала $\varphi[u]$ имеет место условие б) n°2. Действительно,

$$\varphi[u + z] - \varphi[u] = \iint_S f'_u(x, y, \hat{u})\, z dS,$$

где $\hat{u}(x, y) = u(x, y) + \theta(x, y) z(x, y)$, а $0 < \theta(x, y) < 1$.

Отсюда

$$|\varphi[u + z] - \varphi[u]| \leqslant \sqrt{\iint_S f'^2_u(x, y, \hat{u})\, dS}\, \|z\|_H,$$

где $\|z\|_H = \sqrt{(z, z)}$, а значит, в силу (21),

$$|\varphi[u + z] - \varphi[u]| \leqslant D \|z\|_H$$

(D — некоторая константа). Отсюда и вытекает непрерывность функционала $\varphi[u]$ в метрике H.

Для нахождения $\nabla\varphi[u]$ вводим функцию $g(t) = \varphi[u + t\eta]$, где $\eta(x, y)$ — произвольная функция из H_A. Тогда

$$g'(0) = \iint_S f'_u(x, y, u)\, \eta\, dS.$$

Пусть $\zeta(x, y)$ — решение уравнения $\Delta^2\zeta = f'_u(x, y, u(x, y))$ с краевыми условиями $\zeta\Big|_\Gamma = 0$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\nu}\Big|_\Gamma = 0$. В этом случае

$$g'(0) = \iint_S \eta \Delta^2\zeta dS = (\Delta^2\zeta, \eta) = [\zeta, \eta],$$

а значит

$$\nabla\varphi[u] = \zeta(x, y).$$

Из соотношения

$$[\nabla\varphi[u], \eta] = \iint_S f'_u(x, y, u(x, y))\, \eta dS$$

имеем в силу (21)

$$|[\nabla\varphi(u), \eta]| \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_S |f'_u(x, y, u(x, y))| \cdot |\eta| \, dS \leqslant D \iint\limits_S |\eta| \, dS \leqslant DS \|\eta\|_C \leqslant D_1 \|\eta\|,$$

откуда при $\eta = \nabla\varphi[u]$

$$\|\nabla\varphi[u]\|^2 \leqslant D_1 \|\nabla\varphi[u]\|,$$

т. е.

$$\|\nabla\varphi[u]\| \leqslant D_1.$$

Итак, мы проверили выполнение условия в) n° 2.

Проверим, выполняется ли условие г) n° 2. Положим для краткости $u_n - u^* = z_n$, $\nabla\varphi[u_n] - \nabla\varphi[u^*] = \omega_n$. Очевидно, $\omega_n(x, y)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \Delta^2\omega_n = \tau_n(x, y) \\ \omega_n \Big|_\Gamma = 0, \ \dfrac{\partial\omega_n}{\partial\nu}\Big|_\Gamma = 0, \end{cases}$$

где $\tau_n = f''_{uu}(x, y, \hat{u}_n(x, y)) z_n$, $\hat{u}_n = u_n - \theta_n(x, y) z_n$, $0 < \theta_n(x, y) < 1$.

Поскольку последовательность $\{u_n\}$ ограничена в H_A, то, в силу (21), существует такая константа K, что для всех n будет $|f''_{uu}(x, y, \hat{u}_n(x, y))| \leqslant K$. Поэтому из соотношения $z_n \underset{H}{\rightarrow} 0$ следует, что и $\tau_n \underset{H}{\rightarrow} 0$.

Далее, из равенства $\Delta^2\omega_n = \tau_n$ имеем

$$(\Delta^2\omega_n, \omega_n) = (\tau_n, \omega_n).$$

Поскольку ω_n ограничены в H_A и тем более в H, а $\tau_n \underset{H}{\rightarrow} 0$ при $u_n \underset{H}{\rightarrow} u^*$, то из соотношения $u_n \underset{H}{\rightarrow} u^*$ следует соотношение $(\tau_n, \omega_n) \to 0$. Поэтому и $(\Delta^2\omega_n, \omega_n) \to 0$, т. е. $\|\omega_n\|^2 \to 0$, что и требовалось доказать.

Для проверки выполнения условия д) n° 2 запишем равенство

$$[(\nabla\varphi[u])' z, v] = \iint\limits_S f''_{uu}(x, y, u) zv \, dS,$$

где $z(x, y)$ и $v(x, y)$ — произвольные функции из H_A, для которых $\|z\| = \|v\| = 1$. В силу неравенства (21),

$$\left| \iint\limits_S f''_{uu}(x, y, u) zv \, dS \right| \leqslant Q,$$

где Q — некоторая константа, а так как

$$\|(\nabla\varphi[u])'\| = \sup_{\substack{\|z\|=1 \\ \|v\|=1}} |[(\nabla\varphi[u])' z, v]|,$$

то $\|(\nabla\varphi[u])'\| \leqslant Q$, что и требовалось доказать.

Далее, из равенства $\nabla\varphi[u] = \Delta^{-2}[f'_u(x, y, u(x, y))]$ имеем

$$\nabla\varphi[u] = \Delta^{-2}[f'_u(x, y, \breve{u}) + f''_{uu}(x, y, \breve{u})(u - \breve{u}) + \frac{1}{2} f'''_{u^3}(x, y, \tilde{u})(u - \breve{u})^2],$$

и для проверки выполнения условия е) n° 6 поставочно показать, что в окрестности точки $\breve{u}$ будет

$$\|\Delta^{-2}[f'''_{u^3}(x, y, \tilde{u}(x, y))(u - \breve{u})^2]\| = O(\|u - \breve{u}\|^2).$$

Полагая

$$\Delta^{-2}[f'''_{u^3}(x, y, \tilde{u})(u - \breve{u})^2] = \delta(x, y); \ f'''_{u^3}(x, y, \tilde{u})(u - \breve{u})^2 = \varepsilon(x, y),$$

имеем

$$\Delta^2\delta = \varepsilon,$$

откуда

$$(\Delta^2\delta, \delta) = (\varepsilon, \delta),$$

т. е.

$$\| \delta \|^2 = (\varepsilon, \delta) \leqslant \| \varepsilon \|_H \| \delta \|_H \leqslant h \| \varepsilon \|_H \| \delta \|,$$

или

$$\| \delta \| \leqslant h \| \varepsilon \|_H.$$

Но в любой окрестности точки $\breve{u}$, в силу (21), будет

$$| f'''_{u^3}(x, y, u) | \leqslant K_1,$$

а, значит,

$$\| \varepsilon \|_H \leqslant h_1 \| u - \breve{u} \|^2_H \leqslant h_2 \| u - \breve{u} \|^2,$$

т. е.

$$\| \delta \| \leqslant h_3 \| u - \breve{u} \|^2,$$

что и требовалось установить.

Не ограничивая общности, можно рассматривать функционал

$$\Phi [u] = \| u \|^2 + \iint\limits_S q(x, y) u^2 dS + O(\| u \|^3),$$

для которого $\breve{u} = 0$. Здесь

$$q(x, y) = \frac{1}{2} f''_{uu}(x, y, \breve{u}).$$

Поэтому

$$[Tu, u] = [u, u] + \iint\limits_S q(x, y) u^2 dS$$

и

$$Tu = u + \Delta^{-2}[q(x, y)].$$

Легко видеть, что оператор T — самосопряженный в H_A.

Будем считать далее, что при всех $(x, y) \in S$ имеет место неравенство

$$f''_{uu}(x, y, \breve{u}) \geqslant 0. \tag{22}$$

Тогда оператор T — положительно определенный в H_A, т. е. выполнено условие ж) n°6.

Докажем теперь, что оператор $T - I$ вполне непрерывен в H_A.

Имеем

$$(T - I) u = \Delta^{-2}[q(x, y) u],$$

т. е.

$$A^{\frac{1}{2}} (T - I) u = A^{-\frac{1}{2}}(qu),$$

где $A = \Delta^2$.

Обозначим для краткости $A^{\frac{1}{2}}(T - I) = L$. Тогда

$$\| Lu \|^2 = [Lu, Lu] = (qu, qu) = \iint\limits_S q^2 u^2 dS.$$

Поскольку сфера $\| u \| \leqslant N$ пространства H_A, как мы видели в n°3, компактна в H, то из последнего равенства вытекает компактность в H_A множества элементов Lu при $\| u \| \leqslant N$. Следовательно, оператор L вполне непрерывен в H_A. Из равенства $T - I = A^{-\frac{1}{2}} L$ заключаем, что для доказательства вполне непрерывности оператора $T - I$ в H_A достаточно убедиться в ограниченности оператора $A^{-\frac{1}{2}}$ в H_A. Но действительно

$$[A^{-\frac{1}{2}}u,\ A^{-\frac{1}{2}}u] = [\Delta^{-2}u,\ u] = (u,\ u),$$

а с другой стороны,

$$[u,\ u] = (\Delta^2 u,\ u) \geqslant \nu\,(u,\ u) = \nu\,\| A^{-\frac{1}{2}} u\|^2,$$

так что

$$\| A^{-\frac{1}{2}} u\|^2 \leqslant \frac{1}{\nu}\,\| u\|^2.$$

Это и доказывает ограниченность оператора $A^{-\frac{1}{2}}$ в H_A, а вместе с тем и выполнение условия з) n° 6.

Принимая во внимание результаты n°n° 5 и 6, можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть в* (17) *функция* $f(x, y, u)$ *непрерывна по* x *и* y, *дважды непрерывно дифференцируема по* u *и всюду в цилиндре* $(x, y) \in S$, $-\infty < u < \infty$ *удовлетворяет условию* (19). *Тогда если функционал* $\Phi\,[u]$ *с краевыми условиями* (18) *имеет единственную стационарную точку*[1], *то при любом начальном приближении* $u_0(x, y) \in H_A$ *алгоритм* $\mathfrak{R}$ *обеспечивает сходимость в метрике* H_A *последовательности* $u_{n+1} = u_n - \gamma_n \nabla\Phi\,[u_n]$ *к точке* $\breve{u} \in H_A$, *в которой функционал* $\Phi\,[u]$ *достигает абсолютного минимума. Если к тому же всюду в* S *выполняется неравенство* (22), *а производная* $f'''_{u^3}(x, y, u)$ *существует и непрерывна, то* $u_n(x, y)$ *сходятся к* $\breve{u}(x, y)$ *со скоростью геометрической прогресии.*

9. Возьмем теперь функционал

$$\Phi\,[u] = \iint\limits_S [u_x'^2 + u_y'^2 + f(x, y, u)]\,dS \tag{23}$$

при краевом условии

$$u\,|_\Gamma = 0. \tag{24}$$

К минимизации такого функционала приводит, в частности, задача для мембраны, аналогичная сформулированной в n°8 задаче для пластинки.

Функцию $f(x, y, u)$, как и в предыдущем n°, будем считать непрерывной по x и y, трижды непрерывно дифференцируемой по u и всюду в цилиндре $(x, y) \in S$, $-\infty < u < \infty$ удовлетворяющей неравенству (19). Снова имеем

$$\Phi\,[u] = (Au,\ u) + \varphi\,[u],$$

где $A = -\Delta$ (при краевом условии $u\,|_\Gamma = 0$), а $\varphi\,[u] = \iint\limits_S f\,(x, y, u)\,dS$.

В пространстве H_A скалярное произведение равно

$$[u,\ v] = \iint\limits_S (u_x' v_x' + u_y' v_y')\,dS,$$

а поэтому снова приходим к функционалу $\Phi\,[u] = \|u\|^2 + \varphi\,[u]$.

Однако ввиду отсутствия соответствующей теоремы вложения, аналогичной неравенству (21), для получения тех же результатов, что и в n° 8, приходится дополнительно наложить на функцию $f(x, y, u)$ весьма

[1] Это имеет место, в частности, в том случае, если всюду в цилиндре $(x, y) \in S$, $-\infty < u < \infty$ выполняется неравенство $f''_{uu}(x, y, u) \geqslant 0$, из которого вытекает выпуклость функционала.

жесткое требование, а именно, предполагать, что всюду в цилиндре $(x, y) \in S$, $-\infty < u < \infty$ выполняется неравенство

$$|f''_{uu}(x, y, u)| \leqslant a < \infty. \tag{25}$$

Докажем, например, что в этом случае выполняется условие б) n° 2, т. е. функционал $\varphi[u]$ непрерывен в метрике H.

Действительно, для любых u, $z \in H_A$ имеем

$$\varphi[u+z] - \varphi[u] = \iint_S [f'_u(x, y, u)z + \frac{1}{2} f''_{uu}(x, y, \hat{u})z^2] dS,$$

где снова $\hat{u} = u + \theta(x, y) z$, $0 < \theta(x, y) < 1$. Но, в силу условия (25),

$$\left| \iint_S f''_{uu}(x, y, \hat{u}) z^2 dS \right| \leqslant a \|z\|^2_H,$$

и соотношение

$$\lim_{\|z\|_H \to 0} (\varphi[u+z] - \varphi[u]) = 0$$

становится очевидным.

Нетрудно проверить и выполнение условий в), г) и д) n° 2, что позволяет сформулировать теорему о сходимости $u_n(x, y)$ к $\breve{u}(x, y)$ в метрике H_A. Для получения же сходимости u_n к $\breve{u}$ со скоростью геометрической прогрессии, надо, кроме (25), потребовать выполнения всюду в цилиндре $(x, y) \in S$, $-\infty < u < \infty$ неравенства

$$|f'''_{u^3}(x, y, u)| \leqslant a_1 < \infty. \tag{26}$$

Итак, может считаться доказанной

Теорема 5. *Пусть в (23) функция $f(x, y, u)$ всюду в цилиндре $(x, y) \in S$, $-\infty < u < \infty$ непрерывна по x и y, дважды непрерывно дифференцируема по u и удовлетворяет условиям (19) и (25). Тогда, если функционал (23) с краевым условием (24) имеет единственную стационарную точку $\breve{u}$, то при любом начальном приближении $u_0(x, y) \in H_A$ алгоритм $\mathfrak{R}$ обеспечивает сходимость в матерNew H_A последовательности $u_{n+1} = u_n - \gamma_n \nabla \Phi[u_n]$ к точке $\breve{u} \in H_A$, в которой $\Phi[u]$ достигает своего абсолютного минимума. Если к тому же всюду в S выполняется неравенство (22), а производная $f'''_{u^3}(x, y, u)$ существует и всюду в цилиндре $(x, y) \in S$, $-\infty < u < \infty$ удовлетворяет условию (26), то $u_n(x, y)$ сходятся к $\breve{u}(x, y)$ со скоростью геометрической прогрессии.*

10. Обратимся к уравнению

$$u(x) = \Gamma u, \tag{27}$$

где Γ — оператор Гаммерштейна, определяемый равенством

$$\Gamma u = \int_a^b K(x, s) g(s, u(s)) ds,$$

причем $K(x, s) = K(s, x)$, а $g(x, u)$ удовлетворяет условию

$$|g(x, u)| \leqslant p(x) + q|u|, \tag{28}$$

где $q > 0$, $p(x) \in L_2(a, b)$.

Будем считать, что линейный интегральный оператор

$$Bu = \int_a^b K(x, s) u(s) ds$$

действующий в $L_2(a, b)$, вполне непрерывен и все его собственные значения положительны.

Введем в рассмотрение также оператор Немыцкого

$$hu = g(x, u),$$

действующий в $L_2(a, b)$. В силу условия (28), оператор h непрерывен и ограничен.

Помимо предположенного выше, потребуем выполнения следующего условия Гаммерштейна:

$$\int_a^b \left[\int_0^u g(x, u)\, du\right] dx \leqslant lu^2 + s(x)\,|u|^\alpha + c(x), \tag{29}$$

где $0 \leqslant l \leqslant \lambda_1$, ($\lambda_1$ — наименьшее характеристическое число ядра $K(x, s)$), $0 < \alpha < 2$, $0 \leqslant s(x) \in L_\gamma$, $\gamma = \frac{2}{2-\alpha}$, $0 \leqslant c(x) \in L$.

При этих предположениях (совокупность которых мы для краткости обозначим через $\mathfrak{W}$), функционал

$$S[u] = (u, u) - 2f[B^{\frac{1}{2}}u], \tag{30}$$

где

$$f[u] = \int_a^b \left[\int_0^u g(x, u)\, du\right] dx,$$

ограничен снизу и достигает своего наименьшего значения на некоторой функции $\breve{u}(x)$, которая является решением уравнения (27) (см. [4], [9]).

Преобразуем функционал (30), положив $B^{\frac{1}{2}}u = y$. Получим новый функционал

$$\Phi[y] = (B^{-\frac{1}{2}}y,\ B^{-\frac{1}{2}}y) - 2f[y],$$

т. е.

$$\Phi[y] = (Ay, y) + \varphi[y],$$

где $\varphi[y] = -2f[y]$, а $A = B^{-1}$, причем оператор A^{-1}, по предположению, вполне непрерывен в пространстве $H = L_2(a, b)$. Сам же оператор A очевидно, является положительно определенным; поэтому можно ввести пространство H_A, в котором функционал $\Phi[y]$ имеет вид (2).

Очевидно, что минимизация функционала $S[u]$ эквивалентна минимизации функционала $\Phi[y]$. В силу условия (29), для функционала $\Phi[y]$ выполняется (см. [9]) соотношение (3). Из рассмотрений n°n° 2 и 3 следует, что этим соотношением может быть заменено условие а) n° 6.

Предположим дополнительно, что функция $g(x, y)$ в интервале $[a, b]$ непрерывна по x и имеет производную $g'_y(x, y)$, непрерывную по y, причем во всей полосе $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$ выполняется неравенство

$$|g_y(x, y)| \leqslant M, \tag{31}$$

где M — некоторая константа.

Покажем, что тогда выполняются и остальные условия n° 2, а значит функционал $\Phi[y]$ можно минимизировать при помощи алгоритма $\mathfrak{R}$.

Выполнение условия б) легко получается из очевидного равенства

$$\varphi[y + z] - \varphi[y] = -2\int_a^b g(x, \hat{y})\, z(x, y)\, dx,$$

где $\hat{y} = y + \theta(x) z$, $0 < \theta(x) < 1$, и условия (28).

Найдем градиент функционала $\varphi[y]$ в H_A. Имеем при любом $\eta \in H_A$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f[y+t\eta]-f[y]}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_a^b [G(x, y+t\eta)-G(x, y)]\,dx,$$

где

$$G(x, y)=\int_0^y g(x, u)\,du.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f[y+t\eta]-f[y]}{t}=\int_a^b g(x, y(x))\,\eta(x)\,dx=(hy, \eta).$$

Положим

$$(hy, \eta)=[\nabla f[y], \eta].$$

Это значит, что $[A^{-1}(hy), \eta]=[\nabla f[y], \eta]$. Отсюда, в силу произвольности $\eta \in H_A$,

$$\nabla f[y]=A^{-1}(hy)=Bhy=\Gamma y.$$

Итак,

$$\nabla\varphi[y]=-2\int_a^b K(x, s)\,g(s, y(s))\,ds.$$

Для проверки условия в) n° 2 снова запишем

$$[\nabla f[y], \eta]=\int_a^b g(x, y(x))\,\eta(x)\,dx.$$

Отсюда для любой ограниченной области $\Omega\subset H_A$ имеем

$$|[\nabla f[y], \eta]|\leqslant D\|\eta\|,$$

и при $\eta=\nabla f[y]$ получим

$$\|\nabla f[y]\|\leqslant D,$$

что и требовалось доказать.

Проверим выполнение условия г) n° 2, т. е. покажем, что из соотношения $y_n \xrightarrow[H]{} y^*$ следует соотношение $\nabla\varphi[y_n]\xrightarrow[H_A]{}\nabla\varphi[y^*]$. Перепишем подлежащее доказательству соотношение так:

$$[Bhy_n-Bhy^*, Bhy_n-Bhy^*]\to 0,$$

или

$$(B(hy_n-hy^*), hy_n-hy^*)\to 0,$$

а это соотношение при $y_n \xrightarrow[H]{} y^*$ вытекает из непрерывности оператора h и ограниченности оператора B в H.

Для проверки выполнения условия д) n° 2 воспользуемся формулой для дифференциала Гато оператора Гаммерштейна (см. [9])

$$d_1(\Gamma, v)=\int_a^b K(x, s)\,g'_y(s, y(s))\,v(s)\,ds.$$

Тогда

$$[(\nabla f[y])'v, w] = (B^{-1}[(\nabla f[y])'v], w) = \int\limits_a^b g'_y(s, y(s))\, v(s)\, w(s)\, ds, \quad (32)$$

а значит, в силу условия (31),

$$|[(\nabla f[y])'v, w]| \leqslant C\,\|v\|\cdot\|w\|,$$

т. е.

$$\|(\nabla f[y])'\| \leqslant C.$$

Выполнение условия е) n° 6 легко следует из равенства

$$\Gamma u = \int\limits_a^b K(x, s)\,[g(s, \breve{u}) + g'_u(s, \breve{u})(u - \breve{u}) + \frac{1}{2} g''_{uu}(s, \tilde{u})(u - \breve{u})^2]\, ds,$$

если только предположить, что всюду в полосе $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$ производная $g''_{yy}(x, y)$ существует и удовлетворяет неравенству

$$|g''_{yy}(x, y)| \leqslant M_1. \quad (33)$$

Из (32) следует, что оператор $(\nabla\varphi[\breve{y}])'$ — самосопряженный в H_A и

$$\left|\left(I + \frac{1}{2}(\nabla\varphi[\breve{y}])'\right) z, z\right] = \|z\|^2 - \int\limits_a^b g'_y(s, \breve{y}(s))\, z^2\, dS.$$

Легко видеть, что если при всех $x \in [a, b]$ будет

$$g'_y(x, \breve{y}(x)) < \frac{1}{\lambda_1}, \quad (34)$$

то оператор $T = I + \frac{1}{2}(\nabla\varphi[\breve{y}])'$ — положительно определенный в H_A, т. е. выполняется условие ж) n° 6.

Проверим, наконец, выполнение условия з) n° 6. Имеем

$$(\nabla\varphi[\breve{y}])' z = \int\limits_a^b K(x, s)\, g'_y(s, \breve{y}(s))\, z(s)\, ds.$$

Положим для краткости $B^{-\frac{1}{2}}(\nabla\varphi[\breve{y}])' = L$. Тогда

$$\|Lz\|^2 = (B^{-\frac{1}{2}}Lz, B^{-\frac{1}{2}}Lz) = \int\limits_a^b [g'_y(x, \breve{y}(x))]^2 z^2(x)\, dx.$$

Дальнейшее доказательство (в силу условия (31)) проводится точно так же, как и в n° 8.

Итак, имеет место

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* $\mathfrak{W}$ *и* (31). *Тогда если уравнение Гаммерштейна* (27) *имеет единственное решение* $\breve{u}(x)$[1], *то при любом начальном приближении* $y_0 \in H_A$ *алгоритм* $\mathfrak{R}$ *обеспечивает сходимость в метрике* H_A *последовательности* (8) *к функции* $\breve{y}(x) = B^{\frac{1}{2}}\breve{u}(x)$, *на которой функционал* $\Phi[y]$ *достигает абсолютного минимума. Если, кроме того, выполняются условия* (33) *и* (34), *то* $y_n(x)$ *сходятся к* $\breve{y}(x)$ *со скоростью геометрической прогрессии.*

---

[1] Это будет, в частности, в том случае, когда $M < \frac{1}{\lambda_1}$, где M — константа из неравенства (31).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Глазман. О градиентной релаксации для неквадратичных функционалов. ДАН СССР, 154, № 5, (1964), 1011—1014.

2. И. М. Глазман и Ю. Ф. Сенчук. Об одном прямом методе минимизации некоторых функционалов вариационного исчисления. «Теория функций, функциональный анализ и их применения», № 2. Изд-во ХГУ, Харьков, (1966), 7—20.

3. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. Гостехиздат, М., 1957.

4. М. А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, М., 1956.

5. Л. В. Канторович. О методе Ньютона. «Труды Матем. ин-та АН СССР», 28 (1949), 104—144.

6. М. М. Вайнберг. О сходимости процесса наискорейшего спуска для нелинейных уравнений. «Сиб. матем. журнал», т. II, № 2 (1961), 201—220.

7. Ю. И. Любич. О скорости сходимости стационарной градиентной релаксации. «Журнал вычислит. матем. и матем. физ.» 6, № 2 (1966), 356—359.

8. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, Л., 1950.

9. М. М. Вайнберг. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Гостехиздат, М., 1956.

10. І. М. Глазман і Ю. Ф. Сенчук. Про мінімізацію квазі-квадратичних функціоналів у гільбертовому просторі. ДАН УРСР, № 8, 1966.