ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ С ПРЕДПИСАННОЙ НОРМОЙ

Ю. И. Любич

Задача, которую мы намерены рассмотреть, состоит в следующем. Пусть $\{a_n\}_0^\infty$ — какая-нибудь последовательность чисел, удовлетворяющая условиям:

$$a_0 = 1; \quad 0 \leqslant a_{m+n} \leqslant a_m a_n \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots), \tag{1}$$

и $\mathfrak{B}$ — какое-нибудь банахово пространство. Спрашивается, существует ли в пространстве $\mathfrak{B}$ такой всюду определенный ограниченный оператор A, что

$$\| A^n \| = a_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots), \tag{2}$$

т. е. можно ли в $\mathfrak{B}$ построить циклическую полугруппу $\{A^n\}_0^\infty$ с предписанными нормами элементов. Очевидно, условия (1) необходимы для утвердительного ответа.

Теорема 1. *Если пространство $\mathfrak{B}$ гильбертово, то для любой последовательности $\{a_n\}_0^\infty$, удовлетворяющей условиям* (1), *задача* (2) *имеет решение.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать пространство сепарабельным, ибо в гильбертовом пространстве всегда осуществимо продолжение оператора с любого подпространства без изменения норм степеней[1]. Далее, так как все сепарабельные гильбертовы пространства линейно изометричны, то достаточно провести построение в одном из них.

Пусть вначале $a_n \neq 0\,(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$; это основной случай. Возьмем в качестве «эталона» пространство $l^2_{\{a_n^2\}}$ числовых последовательностей $x = \{\xi_m\}_0^\infty$, для которых

$$\| x \|^2 \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi_m|^2}{a_m^2} < \infty.$$

Зададим оператор A, полагая

$$Ax = \{\xi_{m+1}\}_{m=0}^{\infty}.$$

---

[1] Достаточно положить оператор равным нулю на ортогональном дополнении.

Очевидно,

$$A^n x = \{\xi_{m+n}\}_{m=0}^{\infty} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \dots).$$

Следовательно,

$$\| A^n x \|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi_{m+n}|^2}{a_m^2} \leqslant a_n^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi_{m+n}|^2}{a_{m+n}^2} \leqslant a_n^2 \| x \|^2,$$

т. е.

$$\| A^n \| \leqslant a_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Кроме того, если

$$e_n = \{\delta_{m,\,n} a_n\}_{m=0}^{\infty},$$

где, как обычно,

$$\delta_{m,\,n} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n), \end{cases}$$

то

$$\| e_n \| = 1, \quad \| A^n e_n \|^2 = \frac{a_n^2}{a_0^2} = a_n^2.$$

Следовательно,

$$\| A^n \| = a_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots),$$

что и требовалось.

Если теперь при некотором n_0 будет $a_{n_0} = 0$, то в силу (1) $a_n = 0\,(n \geqslant n_0)$. Пусть n_0 — наименьшее из тех n, для которых $a_n = 0$. Рассмотрим n_0-мерное пространство конечных числовых последовательностей $x = \{\xi_m\}_0^{n_0-1}$ с нормой

$$\| x \|^2 \equiv \sum_{m=0}^{n_0-1} \frac{|\xi_m|^2}{a_m^2}$$

и в нем такой оператор A:

$$Ax = \{\xi_{m+1}\}_0^{n_0-1}, \ \xi_{n_0} = 0.$$

Тогда, так же, как в основном случае, устанавливается, что

$$\| A^n \| = a_n \quad (n = 0,\ 1,\ \dots,\ n_0 - 1),$$

и, кроме того, очевидно,

$$A^n = 0 \qquad (n \geqslant n_0).$$

Теорема доказана полностью.

Аналогичная конструкция приводит к решению задачи (2) при $a_n \neq 0$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ в любом из пространств $l^p_{\{a_n^p\}}$ $(p \geqslant 1)$ с нормой

$$\| x \|^p \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi_m|^p}{a_m^p},$$

а также в пространстве $m_{\{a_n\}}$ с нормой

$$\| x \| \equiv \sup_{m \geqslant 0} \frac{|\xi_m|}{a_m}.$$

Для общих банаховых пространств вопрос остается открытым и, по-видимому, связан с существенными геометрическими трудностями. Заметим здесь, что в конечномерном пространстве B^l (l — размерность) условия (1) заведомо не достаточны[1], так как в этом случае

$$\| A^n \| \asymp n^{k-1} r^n,$$

где $r = r_A$ — спектральный радиус оператора A, $k = k_A$ — наибольший порядок жордановых клеток, символ $\asymp$ означает слабую эквивалентность[2]. Вместе с тем справедлива следующая

Лемма. Пусть $\{\mu_n\}_0^\infty$, $\{\nu_n\}_0^\infty$ *— две числовые последовательности, удовлетворяющие неравенствам*

$$0 \leqslant \mu_0 \leqslant 1 \leqslant \nu_0, \quad 0 \leqslant \mu_n \leqslant \nu_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad \mu_{\Sigma n_i} \leqslant \Pi \nu_{n_i}. \tag{3}$$

Тогда существует такая последовательность $\{a_n\}_0^\infty$, *удовлетворяющая условиям* (1), *что*

$$\mu_n \leqslant a_n \leqslant \nu_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Положим

$$a_0 = 1, \quad a_n = \min \nu_{n_1} \nu_{n_2} \ldots \nu_{n_s},$$

где минимум берется по всем системам $\{n_1, n_2, \ldots, n_s\}$ положительных номеров с условием связи

$$\sum_{i=1}^{s} n_i = n.$$

Так как среди таких систем содержится $\{n\}$, то

$$a_n \leqslant \nu_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Далее, очевидно, для всех систем

$$\mu_n = \mu_{n_1 + n_2 + \ldots + n_s} \leqslant \nu_{n_1} \nu_{n_2} \ldots \nu_{n_s},$$

поэтому

$$a_n \geqslant \mu_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Неравенство $\mu_0 \leqslant a_0 \leqslant \nu_0$ очевидно. Наконец, если $n, m > 0$ и

$$a_n = \prod_{k=1}^{p} \nu_{i_k}, \quad a_m = \prod_{k=1}^{g} \nu_{j_k}, \quad \sum_{k=1}^{p} \nu_{i_k} = n, \quad \sum_{k=1}^{q} \nu_{j_k} = m,$$

то

$$a_{n+m} \leqslant \nu_{i_1} \ldots \nu_{i_p} \nu_{j_1} \ldots \nu_{j_q} = a_n a_m.$$

Лемма доказана и в сочетании с теоремой 1 приводит к следующему предложению.

Теорема 2. *Для любых двух последовательностей* $\{\mu_n\}_0^\infty$ $\{\nu_n\}_0^\infty$, *удовлетворяющих неравенствам* (3), *существует такой оператор* A *в гильбертовом пространстве, что*

$$\mu_n \leqslant \| A^n \| \leqslant \nu_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

При этом неравенства (3), очевидно, необходимы (за исключением, разумеется, $\mu_n \geqslant 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$).

[1] Однако, как видно из доказательства теоремы 1, в евклидовом пространстве E^l всегда разрешима «усеченная» задача $\| A^n \| = a_n \quad (n = 0, 1, \ldots, l-1)$.

[2] Две последовательности $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ неотрицательных чисел называются слабо эквивалентными, если одновременно $\alpha_n = O(\beta_n)$ и $\beta_n = O(\alpha_n)$ $(n \to \infty)$.

Континуальный аналог рассмотренной задачи состоит в построении сильно непрерывной однопараметрической полугруппы $\{U_t\}_{t\geqslant 0}$ ограниченных операторов,

$$U_{t+s}=U_tU_s\,(t,\ s\geqslant 0),\ U_0=I, \tag{5}$$

в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, удовлетворяющей соотношению

$$\|U_t\|=\alpha(t)\ \ (t\geqslant 0), \tag{6}$$

где $\alpha(t)$ — заданная функция, такая, что, в соответствии с (5), (6),

$$0\leqslant\alpha(t+s)\leqslant\alpha(t)\,\alpha(s)\ \ (t,\ s\geqslant 0),\ \alpha(0)=1. \tag{7}$$

Аналогично теореме 1 справедлива

Теорема 3. *Если пространство $\mathfrak{B}$ гильбертово, то для любой непрерывной функции $\alpha(t)$, удовлетворяющей условиям* (7), *существует в $\mathfrak{B}$ сильно непрерывная полугруппа $\{U_t\}_{t\geqslant 0}$, удовлетворяющая* (6).

Для доказательства в основном случае $\alpha(t)\neq 0$ $(t\geqslant 0)$ достаточно взять «эталонное» пространство $L^2_{\alpha^2}(0,\ \infty)$ измеримых функций $\xi(s)$ $(s>0)$, для которых

$$\|\xi\|^2\equiv\int_0^\infty\frac{|\xi(s)|^2}{\alpha^2(s)}\,ds<\infty,$$

и положить

$$U_t\xi(s)=\xi(s+t)\ \ (t,\ s\geqslant 0).$$

Так же как при доказательстве теоремы 1 проверяется, что

$$\|U_t\|\leqslant\alpha(t)\quad(t\geqslant 0).$$

Пусть теперь t_0 — любая точка полуоси $[0,\ \infty)$, $\varepsilon>0$. Положим

$$\xi_{t_0,\,\varepsilon}(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\alpha(t_0)\ \ (t_0<t<t_0+\varepsilon)\\ 0\quad(t\leqslant t_0,\ t\geqslant t_0+\varepsilon).\end{cases}$$

Тогда

$$\|\xi_{t_0,\,\varepsilon}\|^2=\frac{\alpha^2(t_0)}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\frac{ds}{\alpha^2(s)}\to 1\ \ (\varepsilon\to 0)$$

и

$$\|U_{t_0}\xi_{t_0,\,\varepsilon}\|^2=\frac{\alpha^2(t_0)}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\frac{ds}{\alpha^2(s)}\to\alpha^2(t_0)\ \ (\varepsilon\to 0).$$

Следовательно,

$$\|U_{t_0}\|=\alpha(t_0).$$

Основной случай исчерпан.

Если $\alpha(t)$ где-то обращается в нуль, то она обращается в нуль и всюду правее. Поэтому существует такое $\tau>0$, что

$$\alpha(t)>0\ \ (0\leqslant t<\tau),\ \alpha(t)=0\ \ (t\geqslant\tau).$$

Рассмотрим пространство $L^2{}_{\alpha^2}(0,\ \tau)$ измеримых функций $\xi(s)$ $(0<s<\tau)$, для которых

$$\|\xi\|^2\equiv\int_0^\tau\frac{|\xi(s)|^2}{\alpha^2(s)}\,ds<\infty,$$

а полугруппу определим, полагая

$$U_t\xi(s) = \begin{cases} \xi(s+t) & (s+t<\tau) \\ 0 & (s+t>\tau). \end{cases}$$

Эта полугруппа удовлетворяет всем поставленным требованиям. Теорема доказана.

Та же конструкция приводит и к более общему результату.

Теорема 3′. *Если измеримая функция* $\alpha(t)$ $(t \geqslant 0)$ *удовлетворяет условиям* (7) *и, кроме того,*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{ds}{\alpha^2(s)} = 1,$$

то в гильбертовом пространстве существует сильно непрерывная полугруппа $\{U_t\}_{t \geqslant 0}$, для которой

$$\|U_t\| \leqslant \alpha(t) \quad (t \geqslant 0),$$

причем во всех точках, в которых

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \frac{ds}{\alpha^2(s)} = \frac{1}{\alpha^2(t)},$$

(т. е. заведомо почти всюду) имеет место равенство

$$\|U_t\| = \alpha(t).$$

Теперь совершенно аналогично теореме 2 устанавливается

Теорема 4. *Пусть функции* $\mu(t)$, $\nu(t) \geqslant 0$ *удовлетворяют неравенствам* $0 \leqslant \mu(0) \leqslant \nu(0) = 1$, $\mu(t) \leqslant \nu(t)$ $(t \geqslant 0)$, $\mu(\Sigma t_i) \leqslant \Pi\nu(ti)$, *причем функция* $\nu(t)$ *измерима и в точке* $t = 0$ *непрерывна. Тогда в гильбертовом пространстве существует такая сильно непрерывная полугруппа* $\{U_t\}_{t \geqslant 0}$, *что всюду при* $t \geqslant 0$

$$\|U_t\| \leqslant \nu(t)$$

и почти всюду

$$\|U_t\| \geqslant \mu(t).$$

Аналогичные построения могут быть осуществлены в пространствах L^p и M с соответствующим весом.

Изложенные результаты без труда распространяются на двусторонние последовательности $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ и соответственно функции $\alpha(t)$ $(-\infty < t < \infty)$. При этом будут получаться уже не полугруппы, а группы операторов.