ОБ ОПЕРАТОРНЫХ МИНОРАНТАХ МАТРИЧНОЙ НОРМЫ

Г. Р. Белицкий

Обозначим через $\mathfrak{N}_p$ множество всех норм в кольце[1] $\mathfrak{M}_p$ вещественных квадратных матриц p-го порядка. Множество $\mathfrak{N}_p$ наделено естественной структурой порядка [1]:

$$\|\cdot\|_1 < \|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \|A\|_1 \leqslant \|A\|_2 \quad (A \in \mathfrak{M}_p).$$

В работе [1] было установлено, что множество всех минимальных элементов в $\mathfrak{N}_p$ совпадает с множеством операторных норм и, следовательно, множество $\mathfrak{N}_p^{(1)} \subset \mathfrak{N}_p$ норм матриц, сохраняющих единицу[2], не совпадает с множеством операторных норм. Именно, если в некотором семействе операторных норм $\{\|\cdot\|_\alpha\}_\alpha$ не все нормы одинаковы и

$$\|A\| \equiv \sup_\alpha \|A\|_\alpha < \infty \quad (A \in \mathfrak{M}_p), \tag{1}$$

то равенством (1) определяется сохраняющая единицу норма матриц, не являющаяся операторной. Теперь возникает вопрос, совпадает ли множество $\mathfrak{N}_p^{(1)}$ с множеством всех норм вида (1). В работе [2] был получен отрицательный ответ.

В настоящей статье устанавливается внутренняя характеристика норм, допускающих представление в виде (1). При этом соответствующее семейство операторных норм строится явным образом. Предварительно мы исследуем некоторые другие вопросы, связанные с операторными минорантами[3] данной нормы, в частности, даем описание множества всех операторных минорант в терминах сопряженных норм.

1. Сопряженные нормы матриц. Введем в $\mathfrak{M}_p$ обычное скалярное произведение

$$(A, B) = \operatorname{sp} A'B,$$

где штрих означает транспонирование.

---

[1] *Норма в кольце — это такая норма, что* $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

[2] То есть таких, что $\|E\| = 1$ (E — единичная матрица).

[3] В смысле структуры порядка $\{\mathfrak{N}_p, <\}$.

Пусть $\|.\|$ — любая норма из $\mathfrak{N}_p$. Сопряженной нормой матриц мы называем функционал [1]

$$\|A\|^* = \max_{U \in \mathfrak{M}_p} \frac{|(A', U)|}{\|U\|} \quad (A \in \mathfrak{M}_p).$$

Этот функционал обладает всеми свойствами нормы в линейном пространстве $\mathfrak{M}_p$ и, кроме того, свойством «взаимности»:

$$\text{a)}\ \|A\| = \max_{U \in \mathfrak{M}_p} \frac{|(A', U)|}{\|U\|^*} \quad (A \in \mathfrak{M}_p),$$

и «сопряженным» кольцевым свойством:

$$\text{b)}\ \|AB\|^* \leqslant \|A\| \cdot \|B\|^* \quad (A, B \in \mathfrak{M}_p).$$

В самом деле,

$$\|AB\|^* = \max_U \frac{|\operatorname{sp} ABU|}{\|U\|} = \|A\| \max_U \frac{|\operatorname{sp} ABU|}{\|A\| \cdot \|U\|}.$$

Так как

$$\|A\| \cdot \|U\| \geqslant \|UA\| \quad (A, U \in \mathfrak{M}_p),$$

то

$$\|AB\|^* \leqslant \|A\| \max_U \frac{|\operatorname{sp} ABU|}{\|UA\|} = \|A\| \max_U \frac{|\operatorname{sp} UAB|}{\|UA\|} \leqslant \|A\| \cdot \|B\|^*.$$

Легко видеть, что норма $\|.\|_1$ в линейном пространстве $\mathfrak{M}_p$ будет сопряженной к некоторой норме матриц в том и только в том случае, когда

$$\max_{B \in \mathfrak{M}_p} \frac{\|AB\|}{\|B\|} \leqslant \|A\|_1^* \quad (A \in \mathfrak{M}_p).$$

Множество всех сопряженных норм обозначим через $\mathfrak{N}_p^*$.

2. Операторные миноранты. В [1] показано, что всякая норма матриц $\|.\|$ имеет операторную миноранту. Например, если [2]

$$\|A\|_y \equiv \max_x \frac{\|Ax \otimes y\|}{\|x \otimes y\|} \quad (y \neq 0),$$

то

$$\|.\|_y < \|.\|.$$

Ближайшая задача, которую мы рассмотрим, заключается в описании множества всех операторных минорант данной нормы.

Теорема 1. *Всякая норма матриц $\|.\|$ имеет либо одну, либо континуум различных операторных минорант.*

Доказательство. Пусть $\|.\|_0$ и $\|.\|_1$ — различные операторные миноранты данной нормы $\|.\|$, подчиненные соответственно нормам векторов $\|x\|_0$ и $\|x\|_1$. Так как нормы $\|x\|_0$ и $\|x\|_1$ непропорциональны, то и нормы

$$\|x\|_\alpha \equiv (1-\alpha)\|x\|_1 + \alpha\|x\|_2 \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant 2)$$

---

[1] Этот функционал, вообще говоря, не принадлежлт $\mathfrak{N}_p$. Приведенное определение сопряженных норм распространяется, разумеется, на все нормы в линейном пространстве $\mathfrak{M}_p$.

[2] Здесь и в дальнейшем символ $\otimes$ означает тензорное произведение, так что $x \otimes y$ есть матрица $(\xi_i \eta_j)_{i,j=1}^p$, где $\{\xi_i\}_{i=1}^p$, $\{\eta_i\}_{i=1}^p$ — компоненты векторов x и y соответственно.

попарно непропорциональны. Поэтому, согласно [1], подчиненные им нормы $\|\cdot\|_\alpha$ попарно различны. Далее, из неравенств $\|\cdot\|_0 < \|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1 < < \|\cdot\|$ получаем

$$\|Ax\|_\alpha = (1-\alpha)\|Ax\|_1 + \alpha\|Ax\|_2 \leqslant (1-\alpha)\|A\|_1 + \\ + \alpha\|A\|_2\|x\|_2 \leqslant \|A\|((1-\alpha)\|x\|_1 + \alpha\|x\|_2) = \|A\|\cdot\|x\|_\alpha$$

при всех A, x. Следовательно, $\|\cdot\|_\alpha$ при любом α является минорантой для $\|\cdot\|$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если операторная норма $\|\cdot\|_0$, подчиненная норме векторов $\|x\|_0$, является минорантой для сохраняющей единицу нормы матриц $\|\cdot\|$, то*

$$\|x\|_0 = \sup_{y \in L_0} \|x \otimes y\|^*, \tag{2}$$

где L_0 — некоторое множество векторов. Обратно, всякая операторная норма $\|\cdot\|_0$, подчиненная норме векторов вида (2), *является минорантой для нормы $\|\cdot\|$.*

Теорема 2 дает описание всех норм векторов, которым подчинены операторные миноранты нормы, сохраняющей единицу. Если норма $\|\cdot\|$ не сохраняет единицу, то, помимо минорант, подчиненных нормам вида (2), существуют и другие операторные миноранты. Покажем, как следует переформулировать теорему 2 для общего случая.

Из теоремы 2 вытекает следующее: если две, сохраняющие единицу, нормы матриц таковы, что их сопряженные совпадают на множестве I_1 всех матриц ранга единица[1], то эти нормы имеют общее множество операторных минорант. Справедливо также и обратное утверждение. Более того, имеет место

Теорема 3. *Пусть нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ сохраняют единицу. Обозначим через K_1 и K_2 соответствующие множества операторных минорант. Тогда включение*

$$K_1 \subseteq K_2$$

эквивалентно неравенству

$$\|x \otimes y\|_1^* \leqslant \|x \otimes y\|_2^*$$

при всех x, y.

Отсюда вытекает

Следствие. *Две сохраняющие единицу нормы матриц имеют общее множество операторных минорант в том и только в том случае, когда их сопряженные нормы совпадают на множестве I_1.*

Доказательству теорем 2 и 3 предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Норма матриц $\|\cdot\|$ сохраняет единицу в том и только в том случае, когда*

$$\|A\|^* \geqslant |\operatorname{sp} A| \quad (A \in \mathfrak{M}_p).$$

Доказательство. Если $\|E\| = 1$, то

$$\|A\|^* \geqslant \frac{|\operatorname{sp} AE|}{\|E\|} = |\operatorname{sp} A| \quad (A \in \mathfrak{M}_p).$$

Обратно, пусть $\|A\|^* \geqslant |\operatorname{sp} A|$ при всех A. Тогда

$$\|E\| = \max_{U \in \mathfrak{M}_p} \frac{|\operatorname{sp} U|}{\|U\|^*} \leqslant 1$$

и в то же время всегда $\|E\| \geqslant 1$. Следовательно, $\|E\| = 1$.

[1] Которое, очевидно, совпадает с множеством всех тензорных произведений $x \otimes y$.

Лемма 2. *Пусть* $\|.\|_0$ *— операторная норма, подчиненная норме векторов* $\|x\|_0$. *Тогда имеют место тождества*

$$\|x\otimes y\|_0^* = \|x\otimes y\|_0 = \|x\|_0\cdot\|y\|_0^*,$$

где $\|x\|_0^*$ *— норма векторов, сопряженная к норме* $\|x\|_0$.

Доказательство. Тождество для $\|x\otimes y\|_0$ установлено в [1]. Вычислим $\|x\otimes y\|_0^*$. Так как

$$\|A\| = \max_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|_0} = \max_{x,\,y}\frac{|(Ax,\,y)|}{\|x\|_0\,\|y\|_0^*}\qquad (A\in\mathfrak{M}_p),$$

то, с одной стороны,

$$\|x\|_0\cdot\|y\|_0^* \geqslant \max_A\frac{|(Ax,\,y)|}{\|A\|_0} = \|x\otimes y\|_0^*,$$

с другой стороны

$$\|x\otimes y\|_0^* = \max_A\frac{|(Ax,\,y)|}{\|A\|_0} \geqslant \max_{u,\,v}\frac{|((u\otimes v)\,x,\,y)|}{\|u\otimes v\|_0} =$$

$$= \max_{u,\,v}\frac{|(v,\,x)|\,|(u,\,y)|}{\|u\|\cdot\|v\|_0^*} = \|x\|_0\cdot\|y\|_0^*.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\|.\|$ *— любая норма матриц. Для того, чтобы операторная норма* $\|.\|_0$, *подчиненная норме векторов* $\|x\|_0$, *была минорантой для* $\|.\|$, *необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\|x\|_0\cdot\|y\|_0^* \geqslant \|x\otimes y\|^* \tag{3}$$

при всех x, y.

Доказательство. Необходимость очевидна: из неравенства $\|.\|_0 < \|.\|$ вытекает неравенство $\|.\|_0^* > \|.\|^*$. Отсюда и из леммы 2 следует (3).

Достаточность (3) следует из неравенств

$$\|A\| \geqslant \max_{x,\,y}\frac{|(Ax,\,y)|}{\|x\otimes y\|^*} \geqslant \max_{x,\,y}\frac{|(Ax,\,y)|}{\|x\|_0\,\|y\|_0^*} = \|A\|_0.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. В силу леммы 3,

$$\|x\|_0\cdot\|y\|_0^* \geqslant \|x\otimes y\|^*$$

при всех x, y. Так как норма $\|.\|$ сохраняет единицу, то, согласно лемме 1,

$$\|x\otimes y\|^* \geqslant |(x,\,y)|$$

при всех x, y. Следовательно,

$$\|x\|_0 \geqslant \max_y\frac{\|x\otimes y\|^*}{\|y\|_0^*} \geqslant \max_y\frac{|(x,\,y)|}{\|y\|_0^*} = \|x\|_0,$$

т. е.

$$\|x\|_0 = \max_y\frac{\|x\otimes y\|^*}{\|y\|_0^*}. \tag{4}$$

Иными словами, норма $\|x\|_0$ имеет вид (2), причем

$$L_0 = \{y\,|:\|y\|_0^* = 1\}.$$

Обратно, пусть норма векторов $\|x\|_0$ имеет вид (2). В силу свойства b) сопряженных норм

$$\|Ax\|_0=\sup_{y\in L_0}\|Ax\otimes y\|^*\leqslant\|A\|\sup_{y\in L_0}\|x\otimes y\|^*=\|A\|\cdot\|x\|_0$$

при всех x. Следовательно, $\|\,.\,\|_0<\|\,.\,\|$. Теорема доказана.

Заметим, что если $\|\,.\,\|_0<\|\,.\,\|$, то наряду с (4)

$$\|y\|_0^*=\max_x\frac{\|x\otimes y\|^*}{\|x\|_0}\tag{5}$$

при всех y. Поэтому теорему 2 можно сформулировать аналогичным образом и в применении к норме $\|y\|_0^*$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $K_2\subseteq K_1$. Положим

$$\|x\|_0=\|x\otimes y_0\|_2^*,$$

где y_0 — фиксированный вектор. Тогда для соответствующей операторной нормы $\|\,.\,\|_0$ имеет место неравенство $\|\,.\,\|_0<\|\,.\,\|_2$, а следовательно, и неравенство $\|\,.\,\|_0<\|\,.\,\|_1$. В силу леммы 3,

$$\|x\|_0\cdot\|y_0\|_0^*\geqslant\|x\otimes y_0\|_1^*\tag{6}$$

при всех x. Применив (5) к нормам $\|\,.\,\|_2$ и $\|x\|_0=\|x\otimes y_0\|_1$, получим

$$\|y_0\|_0^*=1,$$

после чего (6) дает

$$\|x\otimes y_0\|_2^*=\|x\|_0\geqslant\|x\otimes y_0\|_1^*$$

при всех x и y_0.

Обратное утверждение теоремы 3 очевидным образом вытекает из леммы 3. Теорема доказана.

Мы уже отмечали, что теоремы 2 и 3, вообще говоря, не справедливы для норм, не сохраняющих единицу. Для того, чтобы описать множество операторных минорант произвольной нормы $\|\,.\,\|$, построим сохраняющую единицу норм $\|\,.\,\|^{(1)}$, которая заведомо имеет такое же множество операторных минорант, как исходная норма $\|\,.\,\|$. После этого для получения нужных результатов остается сформулировать теоремы 2 и 3 применительно к норме $\|\,.\,\|^{(1)}$.

В качестве нормы $\|\,.\,\|^{(1)}$ удобнее всего взять верхнюю грань сохраняющих единицу минорант нормы $\|\,.\,\|$. Эту норму можно получить следующим образом. Рассмотрим функционал ν, определенный на $\mathfrak{M}_p$ равенствами

$$\nu(A)=\|A\|\quad(A\in\mathfrak{M}_p,\ A\neq\lambda E),\quad \nu(\lambda E)=|\lambda|\quad(-\infty<\lambda<\infty).$$

Легко видеть, что

$$\|A\|^{(1)}=\inf\sum_k\prod_j\nu(X_{kj}),$$

где нижняя грань берется по всем представлениям матрицы $A\in\mathfrak{M}_p$ в виде

$$A=\sum_k\prod_j X_{kj}\quad(X_{kj}\in\mathfrak{M}_p).$$

Очевидно, все нормы векторов, которым подчинены операторные миноранты нормы $\|\,.\,\|$, имеют вид (2) в том случае, когда

$$\|x\otimes y\|^*=\|x\otimes y\|^{(1)*}$$

при всех x и y. Так будет, например, если норма $\|\,.\,\|$ имеет единственную операторную миноранту. Это вытекает из теоремы 4, которая дает характеристику норм матриц, имеющих единственную операторную миноранту.

Назовем функционал $\|\cdot\| \subset \mathfrak{M}_p \cup \mathfrak{M}_p^*$ квазиоператорной нормой, подчиненной данной норме векторов $\|x\|$, если на множестве I_1 этот функционал совпадает с соответствующей операторной нормой

$$\|x \otimes y\| = \|x\| \cdot \|y\|^*$$

при всех x, y.

Следствие из теоремы 3 показывает, что сохраняющая единицу норма матриц имеет единственную операторную миноранту в том и только в том случае, когда ее сопряженная является квазиоператорной нормой. Этот факт имеет место и в общем случае.

Теорема 4. *Для того, чтобы норма матриц $\|\cdot\|$ имела единственную операторную миноранту, необходимо и достаточно, чтобы сопряженная норма $\|\cdot\|^*$ была квазиоператорной.*

Если сама норма $\|\cdot\|$ является квазиоператорной, то из [1] вытекает, что она имеет единственную операторную миноранту и, следовательно, ее сопряженная $\|\cdot\|^*$ также является квазиоператорной. Это легко проверяется и непосредственным вычислением.

Доказательство теоремы 4. Необходимость. Пусть $\|\cdot\|_0$— единственная операторная миноранта нормы $\|\cdot\|$, подчиненная норме векторов $\|x\|_0$. Покажем, что

$$\|x \otimes y\|^* = \|x\|_0 \cdot \|y\|_0^*$$

при всех x, y.

Положим

$$\|x\|_y = \|x \otimes y\|^*,$$

тогда соответствующая операторная норма $\|\cdot\|_y$ является минорантой для $\|\cdot\|$. По условию $\|\cdot\|_y = \|\cdot\|_0$. Следовательно, нормы $\|x\|_0$, $\|x\|_y$ пропорциональны:

$$\|x\|_y = c_1(y)\|x\|. \tag{7}$$

Полагая, что

$$\|x\|_y' = \|y \otimes x\|^*,$$

получим также[1]

$$\|A\|_y' = \max_x \frac{\|A^*x\|_y'}{\|x\|_y'} \leqslant \|A\| \quad (A \in \mathfrak{M}_p).$$

Покажем, что $\|\cdot\|_y'$— операторная норма, подчиненная норме векторов $\|x\|_y'^*$. В самом деле,

$$\|A\|_y' = \max_x \frac{\|A^*x\|_y'}{\|x\|_y'} = \max_{x,\,z} \frac{|(A^*x, z)|}{\|x\|_y' \cdot \|z\|_y'^*} =$$

$$= \max_{x,\,z} \frac{|(x, Az)|}{\|x\|_y' \|z\|_y'^*} = \frac{\|Az\|_y'^*}{\|z\|_y'^*}.$$

Вследствие этого из неравенства $\|\cdot\|' < \|\cdot\|$ вытекает пропорциональность норм $\|x\|_y'^*$ и $\|x\|_0$:

$$\|x\|_y'^* = c_2^{-1}(y)\|x\|_0$$

или

$$\|x\|_y' = c_2(y)\|x\|_0^*.$$

[1] Здесь A^* — транспонированная матрица.

Отсюда и из (7) вытекает, что

$$\| x \otimes y \|^* = c_1(y) \| x \|_0 = c_2(x) \| y \|_0^*$$

при всех x, y. Следовательно,

$$c_1(y) = \lambda \| y \|_0^* \quad (\lambda = \mathrm{const}),$$

откуда получаем тождество

$$\| x \otimes y \|^* = \lambda \| x \|_0 \| y \|_0^*.$$

Покажем, что $\lambda = 1$. Из неравенства $\| . \|^* < \| . \|_0^*$ вытекает, что $\lambda \leqslant 1$. Допустим, что $\lambda < 1$. Положим

$$\| x \|_\varepsilon = \| x \|_0 + \varepsilon (\xi_1) \quad (\varepsilon > 0)$$

для каждого вектора $x = \{\xi_i\}_1^p$. Очевидно, нормы $\| x \|_0$ и $\| x \|_\varepsilon$ непропорциональны ни при каком ε. Так как

$$\| x \|_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \| x \|_0, \quad \| y \|_\varepsilon^* \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \| y \|_0^*$$

и $\lambda < 1$, то из соображений компактности можно выбрать такое $\varepsilon = \varepsilon_1$, что

$$\| x \|_{\varepsilon_1} \cdot \| y \|_{\varepsilon_1}^* \geqslant | \lambda | \| x \|_0 \cdot \| y \|_0^* = \| x \otimes y \|^*$$

при всех x, y. Тогда соответствующая операторная норма $\| . \|_{\varepsilon_1}$ будет отличной от $\| . \|_0$ минорантой для $\| . \|$ вопреки условию. Итак, $\lambda = 1$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть норма $\| . \|$ такова, что

$$\| x \otimes y \|^* = \| x \| \cdot \| y \|^*,$$

и пусть $\| . \|_0$ — операторная миноранта для $\| . \|$. Тогда в силу леммы 3 для соответствующей нормы векторов

$$\| x \|_0 \cdot \| y \|_0^* \geqslant \| x \| \cdot \| y \|^*$$

при всех x, y. Отсюда, согласно [1], вытекает, что нормы $\| x \|_0$ и $\| x \|$ пропорциональны, т. е. норма $\| . \|$ имеет единственную операторную миноранту. Теорема доказана.

3. Характеристика норм, являющихся верхними гранями систем операторных норм. Дадим несколько критериев, позволяющих определить, является ли данная норма матриц верхней гранью некоторого множества операторных норм. Наиболее интересным нам кажется последний (теорема 7), так как он формулируется в терминах структуры порядка.

Обозначим множество всех норм вида (1) через $\mathfrak{N}_p^{(1)}(I_1)$.

Теорема 5. *Норма матриц* $\| . \|$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{N}_p^{(1)}(I_1)$ *в том и только в том случае, когда она сохраняет единицу и удовлетворяет условию*[1]

$$\| A \| = \max_{x,\, y} \frac{|(Ax, y)|}{\| x \otimes y \|^*} \quad (A \in \mathfrak{M}_p).$$

Теорема 5, однако, не указывает способ явного построения соответствующего множества операторных норм. Этот пробел восполняет

[1] Само по себе это условие является характеристикой более широкого класса норм, не сохраняющих единицу. Мы не рассматриваем здесь этот класс норм, чтобы не усложнять изложение.

Теорема 6. *Норма* $\|.\|$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{N}_p^{(1)}(I_1)$ *в том и только в том случае, когда*

$$\|A\| = \max_{x,y} \frac{\|Ax, y\|^*}{\|x \otimes y\|} \quad (A \in \mathfrak{M}_p).$$

Положим, как и прежде,

$$\|x\|_y = \|x \otimes y\|^*, \quad \|A\|_y = \max_{\|x\|_y=1} \|Ax\|_y.$$

Тогда условие теоремы эквивалентно равенству

$$\|A\| = \sup_y \|A\|_y \quad (A \in \mathfrak{M}_p),$$

отсюда следует его достаточность.

Теорема 6 утверждает, таким образом, что, если норма $\|.\|$ является верхней гранью какого-нибудь множества операторных норм, то она непременно является и верхней гранью множества $\{\|A\|_y\}_y$.

Из теорем 5, 6 вытекает ряд интересных следствий.

Следствие 1. *Две нормы из* $\mathfrak{N}_p^{(1)}(I_1)$ *совпадают, если их сопряженные совпадают на множестве* I_1 *матриц ранга единица.*

Следовательно, если две нормы различны, а их сопряженные совпадают на I_1, то, по крайней мере, одна из этих норм не является верхней гранью никакого множества операторных норм.

Далее, пусть $\|.\| \in \mathfrak{N}_p^{(1)}$. Обозначим через $\|.\|_{I_1}$ верхнюю грань операторных минорант нормы $\|.\|$. Так как нормы $\|.\|$ и $\|.\|_{I_1}$ имеют общее множество операторных минорант, то

$$\|x \otimes y\|^* = \|x \otimes y\|^*_{I_1}$$

при всех x, y. Вследствие этого из теорем 5, 6 вытекает:

Следствие 2. *Имеет место тождество*

$$\|A\|_{I_1} = \max_{x,y} \frac{|(Ax, y)|}{\|x \otimes y\|^*} = \max_{x,y} \frac{\|Ax \otimes y\|^*}{\|x \otimes y\|^*}.$$

Сформулируем теперь критерий несколько иного характера.

Назовем норму $\|.\| \in \mathfrak{N}_p^*$ максимальной относительно множества I_1, если из условий a) $\|.\| \in \mathfrak{N}_p^*$ и b) $\|A\|_1 \leqslant \|A\|$ $(A \in I_1)$ вытекает c) $\|.\|_1 < < \|.\|$.

Теорема 7. *Норма матриц является верхней гранью некоторого множества операторных норм в том и только в том случае, когда она сохраняет единицу, а ее сопряженная является максимальной относительно множества* I_1.

Переходим к доказательству сформулированных теорем.

Доказательство теоремы 5. Пусть норма матриц $\|.\|$ принадлежит множеству $\mathfrak{N}_p^{(1)}(I_1)$:

$$\|A\| = \sup_\alpha \|A\|_\alpha,$$

где $\|.\|_\alpha$ — операторные нормы, подчиненные соответственно нормам векторов $\|x\|_\alpha$. Тогда

$$\|A\| = \sup_\alpha \max_x \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} = \max_{x,y} \sup_\alpha \frac{|(Ax, y)|}{\|x\|_\alpha \|y\|^*_\alpha} =$$

$$= \max_{x,y} \frac{|(Ax, y)|}{\inf\limits_\alpha \|x\|_\alpha \cdot \|y\|^*_\alpha}.$$

Отсюда, полагая

$$q(x, y) = \inf_{\alpha} \|x\|_{\alpha} \|y\|_{\alpha}^{*},$$

получим

$$\|A\| = \max_{x, y} \frac{|(Ax, y)|}{q(x, y)}. \tag{8}$$

Следовательно,

$$q(x, y) \geqslant \max_{A} \frac{|(Ax, y)|}{\|A\|} = \|x \otimes y\|^{*}$$

при всех x, y. Подставляя это неравенство в (8), получим

$$\|A\| \leqslant \max_{x, y} \frac{|(Ax, y)|}{\|x \otimes y\|^{*}}.$$

Так как справедливость обратного неравенства заведомо очевидна, то

$$\|A\| = \max_{x, y} \frac{|(Ax, y)|}{\|x \otimes y\|^{*}}.$$

Обратно, пусть $\|.\| \in \mathfrak{N}_p^{(1)}$ и

$$\|A\| = \max_{x, y} \frac{|(Ax, y)|}{\|x \otimes y\|^{*}}.$$

Тогда в силу леммы 1

$$|(Ax, y)| \leqslant \|Ax \otimes y\|^{*},$$

откуда

$$\|A\| \leqslant \max_{x, y} \frac{\|Ax \otimes y\|^{*}}{\|x \otimes y\|^{*}}.$$

Но из свойства b) сопряженных норм вытекает обратное неравенство, поэтому

$$\|A\| = \max_{x, y} \frac{\|Ax \otimes y\|^{*}}{\|x \otimes y\|^{*}},$$

т. е. $\|.\| \in \mathfrak{N}_p^{(1)}(I_1)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 6 теперь уже не представляет труда, и мы его опускаем.

Доказательство теоремы 7. Пусть $\|.\| \in \mathfrak{N}_p^{(1)}(I_1)$. Тогда в силу теоремы 5

$$\|A\| = \max_{x, y} \frac{|(Ax, y)|}{\|x \otimes y\|^{*}} = \max_{U \in I_1} \frac{|\operatorname{sp} AU|}{\|U\|^{*}} \quad (A \in \mathfrak{M}_p).$$

Если $\|.\| \in \mathfrak{N}_p$ и $\|A\|_1^{*} \leqslant \|A\|^{*}$ $(A \in I_1)$, то

$$\|A\|_1 = \max_{U \in I_1} \frac{|\operatorname{sp} AU|}{\|U\|_1^{*}} \geqslant \max_{U \in I_1} \frac{|\operatorname{sp} AU|}{\|U\|_1^{*}} \geqslant \max_{U \in I_1} \frac{|\operatorname{sp} AU|}{\|U\|^{*}} = \|A\|$$

при всех A. Поэтому $\|.\|_1^{*} < \|.\|^{*}$. Следовательно, норма $\|.\|^{*}$ максимальна относительно I_1.

Обратно, пусть $\|.\| \in \mathfrak{N}_p^{(1)}$ и $\|.\|^{*}$ максимальна относительно множества I. Как уже отмечалось выше,

$$\|A\|^{*} = \|A\|_{I_1}^{*} \quad (A \in I_1),$$

где $\|.\|_{I_1}$ — верхняя грань операторных минорант нормы $\|.\|$. Так как норма $\|.\|^{*}$ максимальна относительно I_1, то отсюда вытекает, что $\|.\|_{I_1}^{*} < \|.\|^{*}$, т. е. $\|.\|_{I_1} > \|.\|$. Но, с другой стороны, $\|.\|_{I_1}$ — миноранта для нормы $\|.\|$, поэтому $\|.\|_{I_1} = \|.\|$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что аналогичное исследование можно было бы провести для норм матриц, которые, подобно операторным, характеризуются равенством типа

$$A \doteq \max_{U \in I_k} \frac{\| AU \|'}{\| U \|'},$$

где $\| . \|'$ — некоторая норма в линейном пространстве $\mathfrak{M}_p$, а I_k — множество всех матриц данного ранга $k \leqslant p$. Следуя изложенной схеме, нетрудно получить результаты, совершенно аналогичные тем, которые содержатся в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Любич. Об операторных нормах матриц. УМН, XVIII, № 4, (1963), 161—164.

2. Г. Р. Белицкий. О нормах матриц, являющихся максимумами систем операторных норм. УМН, XX, № 5 (1965), 181—184.