ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТЬЮ

С. А. Касьянюк и *Г. И. Ткачук*

Пусть функция

$$f(z) = 1 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

принадлежит классу C-функций в круге $|z| < 1$, т. е. классу регулярных в круге $|z| < 1$ функций с положительной вещественной частью: $\mathrm{Re}\, f(z) > 0, |z| < 1$. Увеличим аргумент одного коэффициента b_n на величину θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, оставив остальные коэффициенты без изменения, т. е. построим функцию

$$f_{n,\theta}(z) = 1 + b_1 z + \ldots + b_{n-1} z^{n-1} + b_n e^{i\theta} z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \ldots .$$

Очевидно, функция $f_{n,\theta}(z)$ не будет C-функцией в круге $|z| < 1$, но сохранит положительной вещественную часть в круге некоторого радиуса $R(n, \theta) < 1$.

Возникает задача отыскания величины $R(n, \theta)$, такой, что $\mathrm{Re}\, f_{n,\theta}(z) \geqslant 0$ для всех $|z| \leqslant R(n, \theta)$ и $\mathrm{Re}\, f_{n,\theta}(z) < 0$ хотя бы для некоторых $|z| > R(n, \theta)$.

Теорема 1. *Величина $R(n, \theta)$ является наименьшим положительным корнем уравнения*

$$1 - x - 2|b_n| x^n (1 + x) \sin\frac{\theta}{2} = 0. \tag{1}$$

При $n = 1$

$$R(1, \theta) = \frac{1}{4}|b_1|^{-1} \sin^{-1}\frac{\theta}{2} \left\{ \sqrt{1 + 12|b_1| \sin\frac{\theta}{2} + 4|b_1|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}} - 1 - 2|b_1| \sin\frac{\theta}{2} \right\}.$$

Доказательство. Очевидно,

$$f_{n,\theta}(z) = f(z) - b_n z^n (1 - e^{i\theta}),$$

где $f(z)$ является C-функцией в круге $|z| < 1$.

Известно, например [1], что

$$\mathrm{Re}\, f(re^{it}) \geqslant \frac{1-r}{1+r}, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Поэтому

$$\mathrm{Re}\, f_{n,\theta}(z) \geqslant \frac{1-r}{1+r} - 2|b_n| r^n \sin\frac{\theta}{2}, \quad |z| = r.$$

Функция $y=\frac{1-x}{1+x}-2|b_n|x^n\sin\frac{\theta}{2}$ является монотонно убывающей в интервале $(0, 1)$, поэтому отыскание максимального r, при котором $\operatorname{Re} f_{n,\theta}(re^{it})\geqslant 0$, сводится к решению уравнения (1).

Оценка $R(n, \theta)$ точная, как показывают примеры функций $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$, $\theta=\pi$ для n-четного, и $f(z)=\frac{1-z}{1+z}$, $\theta=\pi$ для n-нечетного.

Из последовательности коэффициентов $\{b_n\}_1^\infty$ Тейлорова разложения *нормированной* C-функции в круге $|z|<1$ выделим конечную (или бесконечную) подпоследовательность

$$b_{N_1},\ b_{N_2},\ \ldots,\ b_{N_k}$$

и аргументы каждого выписанного коэффициента увеличим на величину θ_{N_j}, $j=1, 2\ \ldots, k$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=f(z)-\sum_j b_{N_j}z^{N_j}(1-e^{i\theta_{N_j}}),$$

которая будет регулярной в круге $|z|<1$, но не будет C-функцией в этом круге.

Найдем величину $R(\theta_{N_1},\ \ldots,\ \theta_{N_k})$, такую, что $\operatorname{Re}\varphi(z)\geqslant 0$ для всех $|z|\leqslant R(\theta_{N_1},\ \ldots,\theta_{N_k})$ и $\operatorname{Re}\varphi(z)<0$ хотя бы для некоторых $|z|>R(\theta_{N_1},\ \ldots,\ \theta_{N_k})$.

Теорема 2. *Величина $R(\theta_{N_1},\ \ldots,\ \theta_{N_k})$ является наименьшим положительным корнем уравнения*

$$1-x-2(1+x)\sum_j|b_{N_j}|x^{N_j}\sin\frac{\theta_{N_j}}{2}=0. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1. Как пример, можно рассмотреть функцию $f(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2\sum_1^\infty z^n$ и построить функцию $\varphi_1(z)=1-2\sum_1^\infty z^n$, которая получается увеличением всех аргументов коэффициентов $\{b_k\}_1^\infty$ на π.

Поскольку $\varphi_1(z)=\frac{1-3z}{1-z}$, нетрудно видеть, что

$$\operatorname{Re}\varphi_1(re^{it})=\frac{1-4r\cos t+3r^2}{1-2r\cos t+r^2}$$

и

$$\min_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}\operatorname{Re}\varphi_1(re^{it})=\frac{1-3r}{1-r}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}\varphi_1(z)\geqslant 0 \text{ для } |z|\leqslant\frac{1}{3},\quad R=\frac{1}{3}.$$

Если же построить функцию

$$\varphi_2(z)=1+2(z+z^3+\ \ldots)-2(z^2+z^4+\ \ldots)=\frac{1+2z-3z^2}{1-z^2},$$

то получаем

$$\operatorname{Re}\varphi_2(re^{it}) = \frac{1 + 2r\cos t - 4r^2\cos 2t - 2r^3\cos t + 3r^4}{1 - 2r^2\cos 2t + r^4}$$

и

$$\min_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \operatorname{Re}\varphi_2(re^{it}) = \frac{1 - 2r - 3r^2}{1 - r^2},$$

откуда следует неравенство

$$\operatorname{Re}\varphi_2(z) \geqslant 0 \text{ для всех } |z| \leqslant \frac{1}{3}, \quad R = \frac{1}{3}.$$

Совершенно аналогичная задача возникает для C-функций в круговом кольце $q < |z| < 1$ — регулярных в кольце $q < |z| < 1$ функций $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$ с положительной вещественной частью там.

Увеличим аргумент коэффициента b_n на величину θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, оставив остальные коэффициенты без изменения, т. е. построим функцию $f_{n,\theta}(z) = f(z) - b_n z^n (1 - e^{i\theta})$ и поставим задачу отыскания таких $r(n, \theta)$ и $R(n, \theta)$, что

$$\operatorname{Re} f_{n,\theta}(\rho e^{it}) \geqslant 0 \text{ для } r(n, \theta) \leqslant \rho \leqslant R(n, \theta)$$
$$\operatorname{Re} f_{n,\theta}(\rho e^{it}) < 0 \text{ для } \rho > R(n, \theta),\ \rho < r(n, \theta).$$

Теорема 3. *Величины $R(n, \theta)$ и $r(n, \theta)$ являются теми положительными корнями уравнения*

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k + q^k x^{-k}}{1 + q^k} - 2|b_n| x^n \sin\frac{\theta}{2} = 0, \tag{3}$$

которые ближе всех остальных отстоят от величины $\sqrt{q}$, причем $R(n, \theta)$ — справа, а $r(n, \theta)$ — слева.

Доказательство. Ввиду того, что

$$f_{n,\theta}(z) = f(z) - b_n z^n (1 - e^{i\theta})$$

где $f(z)$ является C-функцией в кольце $q < |z| < 1$, и ([2])

$$\operatorname{Re} f(z) \geqslant 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{|z|^k + q^k |z|^{-k}}{1 + q^k},$$

получаем

$$\operatorname{Re} f_{n,\theta}(z) \geqslant 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{|z|^k + q^k |z|^{-k}}{1 + q^k} - 2|b_n| |z|^n \sin\frac{\theta}{2}.$$

Поведение функции

$$y(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k + q^k x^{-k}}{1 + q^k} - 2|b_n| x^n \sin\frac{\theta}{2}$$

исследуется теми же методами, как и в работе [3] (лемма 2). Получаем, что в интервале $(q, 1)$ функция $y(x)$ сначала возрастает, затем начинает убывать, достигая экстремума около точки $\sqrt{q}$, откуда и следует утверждение теоремы 3. Точка $\sqrt{q}$ является экстремальной для

$$\lambda(\rho) = \min_{0 \leq t \leq 2\pi} \operatorname{Re} f(\rho e^{it}) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho^k + q^k \rho^{-k}}{1 + q^k},$$

так как

$$\lambda'_\rho = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k\rho^{k-1}}{1+q^k}\left[1 - \left(\frac{q}{\rho^2}\right)^k\right].$$

С классом C-функций тесно связан класс однолистных функций [4] с ограниченным вращением, класс регулярных в $|z| < 1$ функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$, таких, что $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, $|z| < 1$. Построим функцию

$$f_{n,\theta}(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n e^{i\theta} z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots,$$

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, и найдем величину $R(n, \theta)$, такую, что $\operatorname{Re} f'_{n,\theta}(z) \geqslant 0$ для всех $|z| \leqslant \hat{R}(n, \theta)$ и $\operatorname{Re} f'_{n,\theta}(z) < 0$ хотя бы для некоторых $|z| > \hat{R}(n, \theta)$. Очевидно, $f_{n,\theta}(z) = f(z) - a_n z^n (1 - e^{i\theta})$, где $f(z)$ является функцией с ограниченным вращением в круге $|z| < 1$.

Поэтому

$$f'_{n,\theta} = f'(z) - n a_n z^{n-1} (1 - e^{i\theta})$$

и

$$\operatorname{Re} f'_{n,\theta}(re^{it}) \geqslant \frac{1-r}{1+r} - 2n\,|a_n|\,r^{n-1} \sin\frac{\theta}{2}.$$

Функция

$$y = \frac{1-x}{1+x} - 2n\,|a_n|\,x^{n-1} \sin\frac{\theta}{2}$$

монотонно убывает в интервале (0, 1), поэтому имеет место

Теорема 4. *Величина $\hat{R}(n, \theta)$ является наименьшим положительным корнем уравнения*

$$1 - x - 2n\,|a_n|\,x^{n-1}(1+x)\sin\frac{\theta}{2} = 0. \tag{4}$$

Можно поставить и решить для функций с ограниченным вращением задачу, аналогичную задаче, решенной теоремой 2. Могут быть рассмотрены и другие классы регулярных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Ашневиц и Г. В. Улина. «Вестник ЛГУ», 11, 1955, 31—42.
2. В. А. Зморович. «Матем. сб.», 32 (74), 3, 1953, 633—652.
3. Л. Е. Дундученко, С. А. Касьянюк. «Изв. КВАИУ», II, 1962, Киев, 13—24.
4. В. А. Зморович. «Наукові записки Київськ. держ. пед. ін-ту.», VI, № 3, 1948, 4—71.