НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ

И. В. Ушакова *

Настоящая заметка ** примыкает к статье [1] и представляет распространение на случай шара оценок, установленных в ней для субгармонических функций в круге.

Метод получения подобных оценок в шаре, в основном, тот же, что и в круге. Главное различие кроется в доказательстве леммы, с помощью которой оцениваются (снизу) субгармонические функции вне «малых» исключительных множеств. В случае круга (а также всей комплексной плоскости) доказательство леммы было основано на простых геометрических фактах, которые в пространстве любого числа измерений не имеют места. Недавние результаты Н. С. Ландкофа позволяют получить нужную нам лемму для пространственного случая.

Приведем здесь важную геометрическую лемму Н. С. Ландкофа, которой в дальнейшем воспользуемся. Заметим также, что с помощью этой леммы Н. С. Ландкоф устанавливает оценки потенциалов, аналогичные оценкам Картана ***.

Лемма Н. С. Ландкофа гласит:

Пусть множество A пространства s измерений покрыто шарами так, что каждая точка $x \in A$ является центром некоторого шара $K(x)$ радиуса $r(x)$. Если

$$\sup_{x \in A} r(x) < \infty,$$

то из системы шаров $\{K(x)\}$ можно выделить не более чем счетную систему $\{K(x_i)\}$, покрывающую множество A, и такую, что каждая точка пространства принадлежит не более чем $N(s)$ шарам этой системы, где $N(s)$ — число, зависящее только от размерности пространства.

Начнем с перечисления обозначений, которыми мы будем пользоваться.

S — шар единичного радиуса в пространстве s измерений. Точки этого шара будем обозначать прописными буквами латинского алфавита.
$r_P = r_{0P}$ — расстояние точки P до начала координат O;

Γ_r — гиперсфера радиуса r с центром в начале координат;

σ_r — площадь Γ_r;

$d\sigma_r$ — элемент площади Γ_r;

K_M — шар с центром в точке M;

l_M — радиус шара K_M;

---

* Выражаю глубокую признательность Б. Я. Левину, предложившему мне вопрос, разработке которого посвящена настоящая статья.

** Основные результаты заметки были доложены на VII Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного.

*** См. статью Н. С. Ландкофа [2], а также упомянутую в этой работе статью А. Картана [3].

l_M^* — неэвклидов радиус шара K_M;
$u(P)$ — субгармоническая функция в S;
$dm(P)$ — положительное распределение масс, которое порождает $u(P)$ в соответствии с теоремей Ф. Рисса [4];
$u^+(P)$ — положительная составляющая $u(P)$, то есть

$$u^+(P) = \begin{cases} u(P), & \text{если } u(P) > 0 \\ 0, & \text{если } u(P) \leqslant 0. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение характеристику субгармонической функции $u(P)$

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sigma_r} \int_{\Gamma_r} u^+(P)\, d\sigma_r. \tag{1}$$

Это, как известно [4], непрерывная монотонно возрастающая функция от r.

Пусть $\chi(r)$ положительная непрерывная функция, которая гасит рост характеристики $\varphi(r)$ в том смысле, что

$$\int_0^1 \varphi(r)\chi(r)\, dr < \infty. \tag{2}$$

Построим по $\chi(r)$ положительную монотонно убывающую функцию $\mu(r)$ следующим образом:

$$\mu(r) = \int_r^1 dt \int_t^1 \chi(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Теорема 1. *Положительное распределение*

$$dn(P) = \mu(r_P)\, dm(P)$$

обладает конечной массой, то есть

$$\int_S \mu(P)\, dm(P) < \infty.$$

Доказательство полностью совпадает с доказательством теоремы 1 из [1].

Точку M внутри шара S назовем ε-нормальной относительно положительного распределения $dn(P)$, обладающего конечной массой, если для всех шаров K_M радиуса $l_M \leqslant \frac{1}{2}(1 - r_M)$ выполняется неравенство

$$\int_{K_M} dn(P) \leqslant \varepsilon \left(\frac{l_M}{1 - r_M}\right)^{s-1}.$$

Лемма. Все точки в шаре S, которые не ε-нормальны относительно распределения $dn(P)$, можно заключить в систему шаров $\{K_i\}$, неэвклидовы радиусы которых l_i^* удовлетворяют условию

$$\sum_i (l_i^*)^{s-1} < \infty.$$

Доказательство. Обозначим множество не ε-нормальных точек через A. Каждая точка $M \in A$ является центром шара K_M, для которого

$$\int_{K_M} dn(P) > \varepsilon \left(\frac{l_M}{1 - r_M}\right)^{s-1}.$$

Применим теперь лемму Н. С. Ландкофа. На основании этой леммы можно выделить не более чем счетную систему шаров $\{K_{M_i}\}$, покрывающую A так, что каждая точка пространства принадлежит не более чем $N(s)$ шарам, где $N(s)$ зависит только от размерности пространства.

Обозначим через D_1 множество всех тех точек P, которые принадлежат только одному шару системы, через D_2 — точки, которые покрыты двумя шарами, и, наконец, через $D_{N(s)}$ — точки, которые принадлежат $N(s)$ шарам.

Тогда

$$\int\limits_{D_1} dn(P) + 2\int\limits_{D_2} dn(P) + \ldots + N(s)\int\limits_{D_{N(s)}} dn(P) = \sum_i \int\limits_{K_{M_i}} dn(P) < [1+2+$$

$$+ \ldots + N(s)]\int\limits_{S} dn(P) = \frac{1+N(s)}{2} N(s)\int\limits_{S} dn(P) < C(s), \tag{4}$$

где $C(s)$ зависит только от размерности s.

Поскольку

$$\int\limits_{K_{M_i}} dn(P) > \varepsilon\left(\frac{l_{M_i}}{1-r_{M_i}}\right)^{s-1},$$

то благодаря (4)

$$\sum_i \left(\frac{l_{M_i}}{1-r_{M_i}}\right)^{s-1} < \frac{C(s)}{\varepsilon}.$$

Из сходимости этого ряда нетрудно вывести сходимость ряда

$$\sum_i (l_i^*)^{s-1},$$

где l_i^* — неэвклидов радиус* K_{M_i}.

Действительно, это вытекает из оценки

$$l_i^* < \frac{1}{2} ln\left(1 + \frac{l_{M_i}}{1-r_{M_i}}\right) < \frac{1}{2}\frac{l_{M_i}}{1-r_{M_i}}.$$

Лемма доказана.

С помощью леммы так же, как и в работе [1], устанавливается

Теорема 2. *Пусть $u(P)$ — произвольная субгармоническая функция в S, убывающая функция $\mu(r)$ построена по характеристике $\varphi(r)$ по равенствам (2) и (3), а θ любое число из интервала $(0,1)$. Тогда имеет место асимптотическое равенство*

$$\lim_{r_p \to 1} u(P)\,\mu(r_p + \theta(1-r_p))(1-r_p)^{s-2} = 0^{**},$$

где точка P приближается к границе S, минуя некоторую систему шаров $\{K_i\}$, неэвклидовы радиусы которых l_i^* удовлетворяют условию

$$\sum_i (l_i^*)^{s-1} < \infty. \tag{5}$$

---

* Неэвклидова длина l^* дуги L равна

$$l^* = \int\limits_{(L)} \frac{dl_p}{1-r_p^2},$$

где dl_p — эвклидов элемент длины.

** При $s = 2$ получается теорема 3 из [1].

Ограничимся пояснением «малости» исключительного множества в теореме 2 на следующем примере.

Пусть $s=3$. Проведем какую-нибудь диаметральную плоскость Γ в единичном шаре и спроектируем «исключительные» шары K_i на эту плоскость. Тогда мы получим некоторую систему кружков γ_i в диаметральной плоскости. Эти кружки не могут покрыть лишь «малую» часть диаметральной плоскости, поскольку они обладают конечной неэвклидовой площадью, а именно:

$$\sum_i \int_{\gamma_i} \frac{d\sigma_P}{(1-r_P^2)^2} < \infty,$$

тогда как

$$\int_{\Gamma} \frac{d\sigma_P}{(1-r_P^2)^2} = \infty.$$

Рассмотрим важный частный случай, когда субгармоническая функция $u(P)$ имеет ограниченную характеристику $\varphi(r)$. Найдем функцию $\mu(r)$ так, чтобы положительное распределение

$$dn(P) = \mu(r_P)\, dm(P)$$

обладало конечной массой, то есть

$$\int_S dn(P) < \infty.$$

Такое определение функции $\mu(r)$ отличается от введенного ранее (см. (2) и (3)) и позволяет принять

$$\mu(r) = 1 - r.$$

Это приводит к следующей оценке:

$$u(P) > -\frac{C}{(1-r_P)^{s-1}}$$

вне системы шаров $\{K_i\}$, неэвклидовы радиусы которых $\{l_i^*\}$ удовлетворяют условию (5), где C — положительная постоянная, зависящая от функции и размерности пространства.

Эта оценка в определенном смысле точна, как показывает отрицательная гармоническая функция

$$u(P) = -\frac{1-r_P^2}{(r_{PQ})^s},$$

где r_{PQ} — расстояние между точками P и Q, а точка Q — любая фиксированная точка внутри шара S.

Поскольку оценки производятся через характеристику, метод легко распространяется на разность двух субгармонических функций в шаре. Для этого только необходимо привлечь характеристику Неванлинна — Привалова [4] разности двух субгармонических функций.

Итак, пусть

$$u(P) = u_1(P) - u_2(P),$$

где $u_1(P)$, $u_2(P)$ субгармонические функции в S. Введем характеристическую функцию разности двух субгармонических функций, которую обозначим через $T(r)$:

$$T(r) = \varphi(r, u) + N(r, u_2).$$

Здесь $\varphi(r, u)$ была определена ранее (см. (1)), а $N(r, u_2)$ дает линейную плотность масс функции $u_2(P)$

$$N(r, u_2) = \int_0^r \frac{n_2(t)}{t} dt\,*,$$

где $n_2(t)$ масса шара радиуса t с центром в начале координат, т. е.

$$n_2(t) = \int_{r_P < t} dm_2(P).$$

Характеристика $T(r)$ является непрерывной монотонно возрастающей функцией от r. Для разности двух субгармонических функций имеет место теорема, аналогичная теореме 2. Прежде чем привести эту теорему, необходимо определить функцию $\mu(r)$, которая строится так же, как и ранее, с той лишь разницей, что теперь она связана с характеристикой $T(r)$ (а не $\varphi(r)$) разности двух субгармонических функций.

Итак,

$$\mu(r) = \int_r^1 dt \int_t^1 \chi(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

где $\chi(\tau)$ — любая непрерывная положительная функция, для которой

$$\int_0^1 T(r)\,\chi(r)\, dr < \infty. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть*

$$u(P) = u_1(P) - u_2(P)$$

и $\mu(r)$ *связана с* $T(r)$, *так как это вытекает из* (6) *и* (7). *Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{r_P \to 1} u(P)\,\mu(r_P + \theta(1 - r_P))\,(1 - r_P)^{s-2} = 0, \quad (0 < \theta < 1)$$

если только точка P *приближается к границе* S, *минуя некоторую систему шаров* $\{K_i\}$, *неэвклидовы радиусы которых* l_i^* *удовлетворяют условию* (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Ушакова. Некоторые оценки субгармонических функций в круге. «Зап. мех.-матем. фак. ХГУ и харьковск. матем. об-ва», т. XXIX, 1963.

2. Н. С. Ландкоф. Емкости и меры Хаусдорфа. Оценки потенциалов. «Усп. матем. наук», т. 20, вып. 2, 1965.

3. H. Cartan. Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétes linéaires lacunaires. Ann. Ec. Norm. Sup XLV 1928.

4. И. И. Привалов. Субгармонические функции. М., 1937.

* Мы предполагаем для простоты, что $n_2(0) = 0$, то есть начало координат свободно от масс функции $u_2(P)$.