ОДНА ТЕОРЕМА ОБ ОПЕРАТОРАХ КЛАССА K

Ю. И. Любич

Линейный оператор T в линейном нормированном пространстве называется, согласно [1], оператором класса K, если для каждого $n=2, 3, \ldots$ и для каждого вектора x из области определения оператора T^n выполняются неравенства

$$\| T^m x \| \leqslant C_{n,m} \| x \|^{\frac{n-m}{n}} \| T^n x \|^{\frac{m}{n}} \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где $C_{n,m} \geqslant 0$ — некоторые константы. Наименьшее значение константы $C_{n,m}$ обозначается $C_{n,m}(T)$.

В работе [1] доказано, что, если оператор $T \neq 0$ класса K определен на всем пространстве* и ограничен, то

$$C_{n,m}(T) \geqslant 1 \tag{1}$$

для всех n, m. В то же время, если, например, T — нормальный оператор в гильбертовом пространстве (в этом случае он заведомо класса K), то $C_{n,m}(T) = 1$ для всех n, m. Возникает задача описания операторов, для которых $C_{n,m}(T) = 1$ при всех или при некоторых n, m. Этой задаче и посвящена настоящая заметка, основным результатом которой является

Теорема. *Пусть T — ограниченный оператор класса K в гильбертовом пространстве H и пусть спектр оператора T имеет лишь конечное** множество предельных точек. Если*

$$C_{n,m}(T) = 1, \; C_{n,n-m}(T) = 1$$

при некоторых n, m, то оператор $T^{d(n,m)}$, где $d(n,m)$ — наибольший общий делитель чисел n, m, нормален.

Предварительно докажем некоторые леммы.

Лемма 1. *Пусть A — ограниченный оператор класса K в банаховом пространстве. Если*

$$C_{n,m}(A) = 1, \; C_{n,n-m}(A) = 1 \tag{2}$$

при некоторых n, m, то

$$\| A^m \| = \rho(A^m),$$

где $\rho(A^m)$ — спектральный радиус.

Доказательство. В силу (2) для всех x имеет место неравенство

$$\| A^{n-m} x \| \leqslant \| x \|^{\frac{m}{n}} \| A^n x \|^{\frac{n-m}{n}}. \tag{3}$$

* Всюду ниже это условие считается выполненным, если не оговорено противное.

** Не обязательно непустое.

Заменяя здесь x на $A^m x$, получаем

$$\| A^n x \| \leqslant \| A^m x \|^{\frac{m}{n}} \| A^{n+m} x \|^{\frac{n-m}{n}},$$

откуда в силу неравенства

$$\| A^m x \| \leqslant \| x \|^{\frac{n-m}{n}} \| A^n x \|^{\frac{m}{n}}, \tag{4}$$

также вытекающего из (2),

$$\| A^n x \| \leqslant \| x \|^{\frac{m}{n+m}} \| A^{n+m} x \|^{\frac{n}{n+m}}, \tag{5}$$

и из (4) и (5)

$$\| A^m x \| \leqslant \| x \|^{\frac{n}{n+m}} \| A^{n+m} x \|^{\frac{m}{n+m}}. \tag{6}$$

Неравенства (5), (6) говорят о том, что

$$C_{n+m,\, m}(A) = 1, \quad C_{n+m,\, n}(A) = 1.$$

Таким образом, соотношения (2) не нарушаются при замене n на $n+m$. По индукции

$$C_{n+qm,\, m}(A) = 1 \quad (q = 0, 1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$\| A^m x \| \leqslant \| x \|^{\frac{n+(q-1)m}{n+qm}} \| A^{n+qm} x \|^{\frac{m}{n+qm}} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots)$$

для всех x. Отсюда

$$\| A^m \| \leqslant \| A^{n+qm} \|^{\frac{m}{n+qm}} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Устремляя здесь q к бесконечности, получаем, согласно известной формуле Гельфанда [2] (см. также [3], гл. XI), что $\| A^m \| \leqslant \rho(A^m)$ и тем самым $\| A^m \| = \rho(A^m)$.

Лемма 2. *Если оператор A удовлетворяет условиям леммы 1 и если его спектр сосредоточен в одной точке λ, то $A = \lambda E$ (E — единичный оператор).*

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда существует и ограничен оператор A^{-1} и A^{-1} является оператором класса K, причем (см. [1])

$$C_{n,\, m}(A^{-1}) = C_{n,\, n-m}(A), \quad C_{n,\, n-m}(A^{-1}) = C_{n,\, m}(A).$$

Следовательно, оператор A^{-1} также удовлетворяет условиям леммы 1, поэтому

$$\| A^{\pm m} \| = \rho(A^{\pm m}) = | \lambda |^{\pm m}. \tag{7}$$

Положим

$$B = \lambda^{-m} A^m.$$

Так как в силу (7)

$$\| B \| = 1, \quad \| B^{-1} \| = 1,$$

то B — изометрический оператор. При этом его спектр сосредоточен в точке 1. Следовательно, $B = E$, откуда $A^m = \lambda^m E$ и $A = \lambda E$, ибо спектр оператора A сосредоточен в точке λ.

Если же $\lambda = 0$, то, согласно лемме 1, $\| A^m \| = 0$, откуда $A = 0$ в силу неравенства

$$\| Ax \| \leqslant C_{m,\, 1} \| x \|^{\frac{m-1}{m}} \| A^m x \|^{\frac{1}{m}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть A — ограниченный оператор класса K в гильбертовом пространстве H и пусть*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \Gamma \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где операторы A_1, A_2 действуют во взаимно ортогональных подпространствах H_1, H_2,

$$H_1 \oplus H_2 = H,$$

а оператор Γ действует из H_2 в H_1. Пусть, далее,

1) $C_{n,m}(A) = 1$, $C_{n,n-m}(A) = 1$ при некоторых n, m;

2) оператор A_1 нормален и система его собственных векторов полна в H_1;

3) спектр оператора A_2 сосредоточен в одной точке μ, причем $\mu^{d(n,m)}$ не является собственным значением оператора $A_1^{d(n,m)}$.

Тогда $\Gamma = 0$, $A_2 = \mu E$ и, следовательно, оператор A нормален и имеет полную систему собственных векторов.

Доказательство. Возьмем любой вектор $y \in H_2$ и любой нормированный собственный вектор x оператора A_1, отвечающий собственному значению $\lambda \neq 0$. Положим

$$u(\rho, \varphi) = x + \rho e^{i\varphi} y \quad (\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$$

и

$$f_{n,m}(\rho, \varphi) = \frac{\| A^m u(\rho, \varphi) \|}{\| u(\rho, \varphi) \|^{\frac{n-m}{n}} \, \| A^n u(\rho, \varphi) \|^{\frac{m}{n}}}.$$

Так как $f_{n,m}(\rho, \varphi) \leqslant 1$, в силу условия 1), и $f_{n,m}(0, \varphi) = 1$, то

$$\left. \frac{\partial f_{n,m}(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0.$$

Это равенство после элементарных вычислений принимает вид

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-i\varphi} \left[\frac{(x, A^m y)}{\bar{\lambda}^m} - \frac{m}{n} \frac{(x, A^n y)}{\bar{\lambda}^n} \right] \right\} = 0,$$

и так как φ произвольно, то

$$\left(x, \left[\frac{A^m}{m\lambda^m} - \frac{A^n}{n\lambda^n} \right] y \right) = 0. \tag{8}$$

Заметим теперь, что

$$\underset{H_1}{\text{пр}}\, A^p y = \sum_{k=0}^{p-1} A_1^{p-k-1} \Gamma A_2^k y \quad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

и, далее, так как $A_1^* x = \bar{\lambda} x$, в силу нормальности оператора A_1, то

$$(x, A_1 v) = (x, \lambda v) \quad (v \in H_1).$$

Поэтому соотношению (8) можно придать вид

$$(x, \Gamma R_{n,m} y) = 0, \tag{9}$$

где

$$R_{n,m} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_2^k}{\lambda^k} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_2^k}{\lambda^k}$$

Меняя ролями m и $n-m$, получаем:

$$(x, \Gamma R_{n, n-m} y) = 0.$$

Спектр оператора $R_{n, m}$ сосредоточен в точке

$$\omega_{n, m} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega^k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \quad \left(\omega = \frac{\mu}{\lambda}\right),$$

спектр оператора $R_{n, n-m}$ — в точке $\omega_{n, n-m}$. Покажем, что по крайней мере одно из чисел $\omega_{n, m}$, $\omega_{n, n-m}$ отлично от нуля. Действительно,

$$\omega_{n, m} = \frac{n-m}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \omega^k - \frac{\omega^m}{n} \sum_{k=0}^{n-m-1} \omega^k$$

и, соответственно,

$$\omega_{n, n-m} = -\frac{\omega^{n-m}}{n} \sum_{k=0}^{m-1} \omega^k + \frac{m}{(n-m)\, n} \sum_{k=0}^{n-m-1} \omega^k.$$

Поэтому, если $\omega_{n, m} = 0$, $\omega_{n, n-m} = 0$, то либо

$$\sum_{k=0}^{m-1} \omega^k = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-m-1} \omega^k = 0, \tag{10}$$

либо

$$\omega^n = 1,$$

и, поскольку $\omega \neq 1$ в силу условия 3), то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0,$$

откуда вновь получаются равенства (10). Записывая (10) в виде

$$\omega^m = 1, \quad \omega^{n-m} = 1$$

и подбирая целые p, q так, чтобы

$$pm + q\,(n-m) = d\,(n, m),$$

получаем

$$\omega^{d(n, m)} = 1,$$

вопреки условию 3).

Пусть, например, $\omega_{n, m} \neq 0$. Тогда для любого $w \in H_2$ найдется такой $y \in H_2$, что

$$w = R_{n, m} y.$$

Но тогда в силу (9) оказывается

$$(x, \Gamma w) = 0.$$

Таким образом, область значений оператора Γ ортогональна всем собственным векторам оператора A_1, принадлежащим ненулевым собственным значениям. Поэтому, если нуль не является собственным значением оператора A_1, то $\Gamma = 0$ в силу полноты в H_1 системы собственных векторов оператора A_1. Теперь подпространство H_2 оказывается инвариантным относительно оператора A, и, согласно лемме 2, $A_2 = \mu E$.

Пусть нуль является собственным значением оператора A_1, и, следовательно, $\mu \neq 0$. Рассмотрим собственное подпространство $H^{(0)}$ оператора A_1, отвечающее нулевому собственному значению, и образуем ортогональную сумму

$$\hat{H} = H^{(0)} \oplus H_2.$$

Подпространство $\hat{H}$ инвариантно относительно оператора A, и оператор A в $\hat{H}$ равен

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Спектр оператора $\hat{A}$ состоит из двух точек $0, \mu$, и этим точкам соответствуют по Риссу (см. [3], гл. XI) спектральные подпространства L_0, L_μ, причем

$$L_0 \dotplus L_\mu = \hat{H}. \tag{12}$$

Проекторы, соответствующие разложению (12), равны

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\varepsilon} \hat{R}_\lambda \, d\lambda, \quad P_\mu = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\mu|=\varepsilon} \hat{R}_\lambda \, d\lambda,$$

где $\varepsilon < \frac{1}{2}|\mu|$ и $\hat{R}_\lambda$ — резольвента оператора $\hat{A}$,

$$\hat{R}_\lambda = \begin{pmatrix} -\dfrac{E}{\lambda} & -\dfrac{\Gamma R_\lambda^{(2)}}{\lambda} \\ 0 & R_\lambda^{(2)} \end{pmatrix},$$

$R_\lambda^{(2)}$ — резольвента оператора A_2. Отсюда, в частности,

$$P_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma A_2^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Учтем теперь, что к оператору, индуцированному оператором A (и, следовательно, оператором $\hat{A}$) в подпространстве L_μ, применима лемма 2. Поэтому

$$\hat{A} P_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu E \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, из (11) и (13) вытекает:

$$\hat{A} P_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\Gamma = 0$, $A_2 = \mu E$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть A — оператор* класса K в гильбертовом пространстве. Если*

$$C_{n,m}(A) = 1, \quad C_{n,n-m}(A) = 1$$

при некоторых n, m, то собственные векторы оператора A, отвечающие таким собственным значениям λ, μ, что

$$\lambda^{d(n,m)} \neq \mu^{d(n,m)},$$

взаимно ортогональны.

* Оператор не обязательно ограниченный и не обязательно определенный на всем пространстве.

Действительно, если

$$Au = \lambda u, \ Av = \mu v \quad (\|u\| = 1, \ \|v\| = 1),$$

то в двумерном подпространстве, порождаемом векторами u, v, оператор A в базисе u, $v - (v, u) u$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (\gamma = (\mu - \lambda)(v, u)),$$

и к нему применима лемма 3. Следовательно, $(v, u) = 0$.

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Положим

$$S = T^{d(n, m)}$$

и

$$n_1 = \frac{n}{d(n, m)}, \quad m_1 = \frac{m}{d(n, m)}.$$

Так как

$$C_{i, k}(A^l) = C_{il, kl}(A)$$

для любого оператора A класса K, то

$$C_{n_1, m_1}(S) = 1, \quad C_{n_1, n_1 - m_1}(S) = 1.$$

Пусть Δ — множество изолированных точек спектра оператора S, $H(\lambda)$ $(\lambda \in \Delta)$ — соответствующие спектральные подпространства. В силу леммы 2 подпространство $H(\lambda)$ — собственное для оператора S и собственного значения λ. В силу леммы 4 подпространства $H(\lambda)$, $H(\mu)$ при $\lambda \neq \mu$ ортогональны. Положим

$$H_1 = \sum_{\lambda \in \Delta} \oplus H(\lambda), \quad H_2 = H \ominus H_1.$$

В подпространстве H_1 оператор S нормален и имеет полную систему собственных векторов. Поэтому, если $H_2 = 0$, то теорема доказана.

Если $H_2 \neq 0$, то

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & \Gamma \\ 0 & S_2 \end{pmatrix},$$

где S_1 — часть оператора S, индуцированная в H_1; S_2 действует в H_2; Γ — из H_2 в H_1.

Спектр оператора S_2 является дополнением к Δ в спектре оператора S, т. е. состоит из предельных точек спектра S. Поэтому в случае, когда спектр оператора S не имеет предельных точек, $H_2 = 0$ и теорема доказана.

Если спектр оператора S имеет одну предельную точку, то оператор S нормален и имеет полную систему собственных векторов, согласно лемме 3.

В общем случае построим попарно непересекающиеся области

$$D_1, \ D_2, \ \ldots, \ D_p,$$

содержащие каждая по одной предельной точке спектра оператора S и покрывающие в совокупности весь спектр. Части оператора S в соответствующем разложении

$$S = \sum_{k=1}^{p} S_k$$

нормальны по доказанному и ортогональны в силу леммы 4.

Теорема доказана.

Подчеркнем, что теорема перестает быть верной, если отбросить ограничения на спектр. Действительно, если T — изометрический, но не унитарный оператор в гильбертовом пространстве (его спектр заполняет круг $|\lambda| \leqslant 1$), то, хотя $C_{n,m}(T) = 1$ для всех n, m, однако T не является нормальным оператором.

Отметим также, что в условиях основной теоремы нельзя утверждать, что сам оператор T или какая-нибудь его степень с показателем, меньшим $d(n, m)$, является нормальным оператором. В самом деле, пусть $e_0, e_1, \ldots, e_{d-1}$ — какая-нибудь линейно независимая система попарно не ортогональных векторов, $u_0, u_1, \ldots, u_{d-1}$ — биортогональная система их линейных комбинаций. Тогда оператор

$$T = \sum_{k=0}^{d-1} e^{\frac{2k\pi i}{d}} (\ ,\ u_k)\, e_k$$

удовлетворяет всем условиям теоремы при любых n, m, делящихся на d, но ни один из операторов

$$T,\ T^2,\ \ldots,\ T^{d-1}$$

не является нормальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Любич. О неравенствах между степенями линейного оператора. «Изв. АН СССР, серия матем.», 24, № 6, 1960, стр. 825—864.

2. И. М. Гельфанд. Normierte Ringe. «Матем. сб.», 9 (51), № 1, 1941, стр. 3—24.

3. Ф. Рисс и Б. Секефальви—Надь. Лекции по функциональному анализу. Изд-во иностр. лит., М., 1954.