О РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛЫХ И РАВНОМЕРНО ГЛАДКИХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. И. Гурарий

В настоящей работе устанавливаются некоторые свойства равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространств. С помощью этих свойств получается обобщение одной теоремы М. Г. Крейна, М. А. Красносельского и Д. П. Мильмана о растворе подпространств, а также устанавливается одна теорема о неустойчивости неполноты последовательности в равномерно гладком пространстве.

§ 1. О модуле выпуклости и модуле гладкости банахова пространства

Определение. *Модулем выпуклости банахова пространства E называется функция*

$$\delta(\omega, E) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geqslant\omega}} \left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right).$$

Модулем гладкости пространства E будем называть функцию

$$\gamma(\eta, E) = \inf_{\substack{x\in E,\ \|x\|=1. \\ \Theta(P_1,\ P_2)\geqslant\eta}} \max\{1-\rho(x, P_1);\ 1-\rho(x, P_2)\},$$

где P_1 и P_2 гиперподпространства в E, $\Theta(P_1, P_2)$ — раствор этих гиперподпространств (см. определение в [1]). Очевидно, $\delta(\omega, E)$ определена при $0\leqslant\omega\leqslant 2$, а $\gamma(\eta, E)$ определена при $0\leqslant\eta\leqslant 1$. Пространство E называется равномерно выпуклым (равномерно гладким), если $\delta(\omega, E)>0$ при $0<\omega\leqslant 2$ (соответственно $\gamma(\eta, E)>0$ при $0<\eta\leqslant 1$)*.

Приведем некоторые известные свойства модулей выпуклости и гладкости (см., например, [2]—[5]) (часть из них мы приводим в несколько ослабленной форме, удобной для дальнейшего).

Предложение 1. $\delta(\omega, E)$ — *неотрицательная неубывающая функция на интервале* $0\leqslant\omega\leqslant 2$, $\delta(0, E)=0$ *и* $\delta(\omega, E)\leqslant\frac{\omega}{2}$**.

Предложение 2. (М. М. Дэй). *Для того, чтобы банахово пространство было равномерно гладким, необходимо и достаточно, чтобы сопряженное к нему пространство было равномерно выпуклым.*

---

* Данное определение модуля гладкости, отличаясь от некоторых других (см., например, [2, 3]), тем не менее приводит к тому же классу равномерно гладких пространств.

** На самом деле справедливо более сильное неравенство: $\delta(\omega, E)\leqslant\delta(\omega, H)=1-\sqrt{1-\omega^2}$, $0\leqslant\omega\leqslant 2$, где H — гильбертово пространство [5].

Предложение 3. *Если P — подпространство банахова пространства E, то справедливы неравенства*

$$\delta(\omega, P) \geqslant \delta(\omega, E) \quad (0 \leqslant \omega \leqslant 2)$$
$$\gamma(\eta, P) \geqslant \gamma(\eta, E) \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 1).$$

Нам понадобится следующее

Определение. *Пусть x, y — элементы банахова пространства. Будем называть наклоном x к y величину*

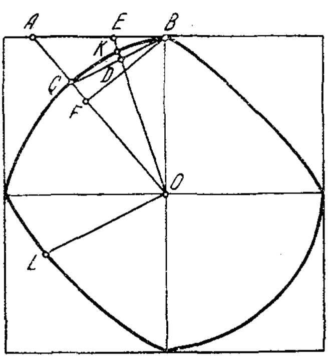
$$(\widehat{x, y}) = \inf_{-\infty<\tau<\infty} \frac{\|x+\tau y\|}{\|x\|}.$$

Предложение 4. *Если для элементов $x \in E$, $\|x\| = 1$ и $y \in E$ $(\widehat{x, y}) = \delta$, то в разложении элемента $z : z = \lambda x + \mu y$ имеет место неравенство* $|\lambda| \leqslant \frac{\|z\|}{\delta}$. Доказательство непосредственно следует из определения наклона.

Теорема 1. *Пусть x и y элементы банахова пространства E с модулем выпуклости $\delta(\omega)$, $\|x\| = 1$. Если $(\widehat{x, y}) = 1$, то справедливо неравенство*

$$\|x+y\| \geqslant 1 + \delta\left(\frac{\|y\|}{\sqrt{2(1+\|y\|^2)}}\right).$$

Доказательство. Мы можем считать линейную оболочку $L_{x, y}$ элементов x и y в E — эвклидовой плоскостью перенормированной с помощью метрики Минковского относительно некоторой выпуклой центрально симметричной кривой γ — единичной сферы в $L_{x, y}$*. Не нарушая общности, мы можем считать (производя в случае надобности аффинное преобразование), что эта кривая вписана в квадрат, середины сторон которого лежат на этой кривой, центры симметрии квадрата и кривой совпадают (см. рисунок), и элементы x и y отождествлены с векторами $\overline{OB}$ и $\overline{BA}$. Для обозначения эвклидовой длины вектора и соответственно нормы вектора как элемента пространства $L_{x, y}$ будем пользоваться символами $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$; условимся считать, что эвклидова длина стороны квадрата равна 2,



тогда $|\overline{BA}| = \|y\|$, $|\overline{OB}| = \|x\| = 1$. Пусть C — точка пересечения OA с γ; $\overline{OD} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OB})$ и K, E—точки пересечения продолжения OD соответственно с γ и с AB. Имеем: $\|\overline{DK}\| \geqslant \delta(\|\overline{BC}\|)$ (по определению модуля выпуклости). Имеем далее,

$$\|x+y\| = \|\overline{OA}\| = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OC}|} \geqslant \frac{|\overline{EO}|}{|\overline{OD}|} \geqslant \frac{|\overline{OK}|}{|\overline{OD}|} = \frac{|\overline{OK}|}{|\overline{OK}| - |\overline{KD}|} =$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{|\overline{KD}|}{|\overline{OK}|}} = \frac{1}{1 - \|\overline{DK}\|} \geqslant \frac{1}{1 - \delta(\|\overline{BC}\|)} \geqslant 1 + \delta(\|\overline{BC}\|). \quad (1)$$

* В случае, если E комплексное пространство, то $L_{x, y}$ определяем как множество всех линейных комбинаций вида $\alpha x + \beta y$ с вещественными α и β.

Опустим из B на AO перпендикуляр $\overline{BF}$ и проведем $OL \parallel BC$ $(L \in \gamma)$. Легко видеть, что $|\overline{BF}| = \frac{\|y\|}{\sqrt{1+\|y\|^2}}$. Поэтому имеем

$$\|\overline{BC}\| = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{OL}|} \geqslant \frac{|\overline{BC}|}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{|\overline{BF}|}{\sqrt{2}} = \frac{\|y\|}{\sqrt{2(1+\|y\|^2)}}. \tag{2}$$

Из (1) и (2), учитывая, что $\delta(\omega)$ есть монотонно возрастающая функция, получаем

$$\|x+y\| \geqslant 1 + \delta\left(\frac{\|y\|}{\sqrt{2(1+\|y\|^2)}}\right),$$

что и требовалось доказать.

С помощью теоремы 1 получается более общая

Теорема 2. *Для любого $\alpha > 0$ и произвольных элементов x и y банахова пространства E, $\|x\| = 1$, найдется $\eta = \eta(\alpha) > 0$ такое, что если $(\widehat{x, y}) > 1 - \eta$, то*

$$\|x+y\| \geqslant 1 + \delta\left(\frac{\|y\|}{\sqrt{2(1+\|y\|^2)}}; E\right) - \alpha.$$

Доказательство. Введем в линейной оболочке $L_{x,y}$ элементов x и y новую норму, полагая в разложении элемента $z: z = \lambda x + \mu y$ $\|z\|_1 = \max\{|\lambda|, \|z\|\}$. Модуль выпуклости $L_{x,y}$ по прежней и по новой норме обозначим через $\delta(\omega)$ и, соответственно, $\delta_1(\omega)$. Легко видеть, что $\|x\|_1 = \|x\| = 1$, $\|y\|_1 = \|y\|$ и на основании предложения 4

$$\|z\| \leqslant \|z\|_1 \leqslant \frac{\|z\|}{(\widehat{x, y})}, \tag{3}$$

кроме того $(\widehat{x, y})_1 = 1$ (наклон $(\widehat{x, y})_1$ понимается по новой норме); из (3) следует

$$\|z\| \leqslant \|z\|_1 \leqslant \frac{1}{1-\eta}\|z\|$$

и поэтому выбирая η достаточно малым, мы получим, что для данного $\alpha > 0$: $|\delta(\omega) - \delta_1(\omega)| < \alpha$ $(0 \leqslant \omega \leqslant 2)$. Утверждение теоремы 2 вытекает теперь из предложения 3 и теоремы 1.

§ 2. О связи между раствором и размерностями подпространств

М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и Д. П. Мильман доказали [1], что если для двух подпространств P и Q банахова пространства выполнено условие $\theta(P, Q) < \frac{1}{2}$, то $\dim P = \dim Q$ (размерностью банахова пространства E называется минимальная мощность множества, линейная оболочка которого плотна в E; если $\dim E = \infty$, то $\dim E$ равна минимальной мощности всюду плотного множества в E). С помощью теоремы 2 можно получить некоторое усиление этого результата.

Теорема 3. *Если P и Q бесконечномерные подпространства банахова пространства и $\theta(P, Q) < \frac{1}{2}\left(1 + \delta\left(\frac{1}{7}; Q\right)\right)$, то $\dim P \geqslant \dim Q$.**

Доказательство. Предположим, что $\dim P < \dim Q$, тогда в P найдется плотное множество $X \subset P$, такое, что

* Постоянная $\frac{1}{7}$ здесь заведомо не является наилучшей.

$$\varkappa (X) < \dim Q \tag{4}$$

($\varkappa(X)$ — кординальное число множества X). Пусть $\theta(P, Q) < t < \frac{1}{2}\left(1 + \delta\left(\frac{1}{7}, Q\right)\right)$. Так как $\theta(P, Q) < t$, то каждому элементу $x \in X$ можно поставить в соответствие элемент $y = y(x) \in Q$, такой, что

$$\| x - y \| < \rho(x, Q) + \varepsilon, \quad \| x - y \| \leqslant t \| x \| \tag{5}$$

($\varepsilon > 0$ будет выбрано позже). Множество всех таких элементов y обозначим через Y, а замыкание линейной оболочки этого множества обозначим через $L(Y)$. Очевидно, $L(Y) \subset Q$, но так как $\varkappa(Y) \leqslant \varkappa(X)$, то $L(Y)$ не совпадает с Q, иначе мы имели бы $\dim Q \leqslant \varkappa(Y) \leqslant \varkappa(X)$, что противоречит (4). Следовательно, найдется элемент $z_0 \in Q$, $\| z_0 \| = 1$, такой, что $\rho(z_0, L(Y)) > 1 - \eta$ ($\eta > 0$ выберем позже), т. е. $(\widehat{z_0, y}) > 1 - \eta$ для любого $y \in L(Y)$. Найдется элемент $x_0 \in X$ такой, что при $\varepsilon < t - \theta(P, Q)$:

$$\| z_0 - x_0 \| < t - \varepsilon, \text{ при этом, очевидно, } \| x_0 \| > 1 - t. \tag{6}$$

Далее имеем, обозначая $y_0 = y(x_0)$,

$$\| x_0 - y_0 \| < \rho(x_0, Q) + \varepsilon \leqslant \| x_0 - z_0 \| + \varepsilon < t. \tag{7}$$

При этом из (6) и (5) получаем

$$\| y_0 \| \geqslant \| x_0 \| - \| x_0 - y_0 \| \geqslant \| x_0 \| - t \| x_0 \| = \| x_0 \| (1 - t) \geqslant (1 - t)^2. \tag{8}$$

Оценим $\| z_0 - y_0 \|$. Имеем по (6) и (7)

$$\| z_0 - y_0 \| \leqslant \| z_0 - x_0 \| + \| x_0 - y_0 \| < 2t, \tag{9}$$

с другой стороны, по теореме 2 и (8) имеем

$$\| z_0 - y_0 \| \geqslant 1 + \delta\left(\frac{\| y_0 \|}{\sqrt{2(1 + \| y_0 \|^2)}}; Q\right) - \alpha \geqslant 1 + \delta\left(\frac{(1 - t)^2}{\sqrt{2[1 + (1 - t)^4]}}; Q\right) - \alpha. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем

$$1 + \delta\left(\frac{(1 - t)^2}{\sqrt{2[1 + (1 - t)^4]}}; Q\right) - \alpha < 2t. \tag{11}$$

Будем считать, что число $\eta > 0$ с самого начала выбиралось столь малым, что $2t + \alpha < 1 + \delta\left(\frac{1}{7}, Q\right)$; в силу теоремы 2 это можно сделать, так как $t < \frac{1}{2}\left(1 + \delta\left(\frac{1}{7}, Q\right)\right)$, тогда из (11) получим

$$\delta\left(\frac{(1 - t)^2}{\sqrt{2[1 + (1 - t)^4]}}; Q\right) < \delta\left(\frac{1}{7}; Q\right),$$

откуда в силу монотонности функции $\delta(\omega, Q)$

$$\frac{(1 - t)^2}{\sqrt{2[1 + (1 - t)^4]}} < \frac{1}{7}. \tag{12}$$

Имеем на основании предложения 1

$$t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{7}, Q\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{28} = \frac{15}{28}, \quad 1 - t > \frac{13}{28},$$

так как левая часть в (12) есть монотонно возрастающая функция от $|1-t|$, то получаем

$$\frac{(1-t)^2}{\sqrt{2[1+(1-t)^4]}} > \frac{\left(\frac{13}{28}\right)^2}{\sqrt{2\left[1+\left(\frac{13}{28}\right)^4\right]}} > \frac{\left(\frac{13}{28}\right)^2}{\sqrt{2\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]}} > \frac{1}{7},$$

что противоречит 12.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если для бесконечномерных подпространств P и Q в E выполнено условие* $\theta(P, Q) < \frac{1}{2}\left(1+\delta\left(\frac{1}{7}, E\right)\right)$, *то* $\dim P = \dim Q$.

Следствие 2. *Пусть E равномерно выпуклое банахово пространство. Существует $\xi > 0$, зависящее лишь от E такое, что если для подпространств P и Q в E $\theta(P, Q) \leqslant \frac{1}{2} + \xi$, то* $\dim P = \dim Q$.

Если провести рассуждения, аналогичные примененным при доказательстве теоремы 3, для рефлексивного пространства, то учитывая, что в последнем расстояние от элемента до подпространства достигается на некотором элементе этого подпространства, мы получим следующую теорему.

Теорема 4. *Если P и Q подпространства рефлексивного строго нормированного банахова пространства, то из соотношения $\theta(P, Q) \leqslant \frac{1}{2}$ вытекает, что* $\dim P = \dim Q$.

§ 3. Неустойчивость неполноты последовательности в равномерно гладком пространстве

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ нормированная последовательность в банаховом пространстве E, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — положительная последовательность. Будем говорить, что $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ обладает свойством неустойчивости неполноты относительно $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, если существует полная в E последовательность $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которой $\|e_i - g_i\| < \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Ниже будет показано, что для равномерно гладкого пространства E существует стремящаяся к нулю последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, зависящая лишь от E, относительно которой любая нормированная последовательность в E обладает свойством неустойчивости неполноты.

Лемма. Пусть E — банахово пространство с модулем гладкости $\gamma(\eta)$. Для $\varepsilon > 0$ и элементов $x \in E$, $\|x\| = 1$, $y \in E$, найдется элемент $z \in E$ и число τ, такие, что $\|x - z\| \leqslant \varepsilon$ и $\|y - \tau z\| < (1-\gamma(\varepsilon))\|y\|$.

Доказательство. Будем сначала считать, что $\|y\| = 1$. Рассмотрим двумерное подпространство $L_{x,y}$ в E, натянутое на элементы x и y и обозначим одномерное подпространство, порожденное элементом x через L_x. Рассмотрим два случая

$$1.\ \rho(y, L_x) \leqslant 1 - \gamma(\varepsilon, L_{x,y}),$$

но тогда в качестве элемента z можно взять сам элемент x и будем иметь используя предложение 3 при некотором τ:

$$\|y - \tau z\| = \|y - \tau x\| = \rho(y, L_x) \leqslant 1 - \gamma(\varepsilon, L_{x,y}) \leqslant 1 - \gamma(\varepsilon).$$

$$2.\ \rho(y, L_x) > 1 - \gamma(\varepsilon, L_{x,y}).$$

Выберем элемент $z \in L_{x,y}$ так, чтобы $\rho(x, L_z) = \| x - z \| = \varepsilon$, где L_z — одномерное подпространство, порожденное элементом z (это, очевидно, можно сделать, так как $\rho(x, L_z)$ — есть непрерывная функция от $z \in L_{x,y}$ и принимает значения 0 или 1, когда z совпадает с x или, соответственно, когда x ортогонально z в $L_{x,y}$). Так как L_x и L_z являются гиперподпространствами в $L_{x,y}$ и, очевидно, $\theta(L_x, L_z) \geqslant \varepsilon$, то из определения модуля гладкости следует, что

$$\gamma(\varepsilon, L_{x,y}) < max\{1 - \rho(y, L_x),\ 1 - \rho(y, L_z)\}.$$

Поскольку случай $\gamma(\varepsilon, L_{x,y}) \leqslant 1 - \rho(y, L_x)$ исключается условием 2, то получаем $\rho(y, L_z) \leqslant 1 - \gamma(\varepsilon, L_{x,y}) \leqslant 1 - \gamma(\varepsilon)$. Отсюда, без всяких ограничений на $\| y \|$ получаем

$$\rho(y, L_z) \leqslant (1 - \gamma(\varepsilon)) \| y \|.$$

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная нормированная последовательность в сепарабельном банаховом пространстве E. Если последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varepsilon_k > 0$ такова, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma(\varepsilon_k, E) = \infty$,* то *$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством неустойчивости неполноты относительно $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$.*

Доказательство. Покажем предварительно, что для любого $h \in E$, натурального n и $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(n, \varepsilon)$ и система элементов $\{g_i\}_{i=n+1}^{N}$, $\| g_i - e_i \| < \varepsilon_i$, $i = n+1, \ldots, N$, такие, что для некоторой совокупности чисел $\{\alpha_i\}_{i=n+1}^{N}$ будем иметь

$$\Big\| h - \sum_{i=n+1}^{N} \alpha_i g_i \Big\| \leqslant \varepsilon \| h \|. \tag{13}$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma(\varepsilon_k, E) = \infty$, то при некотором $N = N(n, \varepsilon)$

$$\prod_{k=n+1}^{N} (1 - \gamma(\varepsilon_k, E)) < \varepsilon. \tag{14}$$

Положим $h = h_{n+1}$ (для удобства дальнейших выкладок). По лемме найдется элемент g_{n+1}, $\| g_{n+1} - e_{n+1} \| \leqslant \varepsilon_{n+1}$, такой, что при некотором α_{n+1}: $\| h_{n+1} - \alpha_{n+1} g_{n+1} \| \leqslant (1 - \gamma(\varepsilon_{n+1})) \| h_{n+1} \|$. Обозначим $h_{n+1} - \alpha_{n+1} g_{n+1} = h_{n+2}$. Найдется элемент g_{n+2}, $\| g_{n+2} - e_{n+2} \| \leqslant \varepsilon_{n+2}$, такой, что при некотором α_{n+2}

$$\| h_{n+2} - \alpha_{n+2} g_{n+2} \| \leqslant (1 - \gamma(\varepsilon_{n+2})) \| h_{n+2} \| \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \gamma(\varepsilon_{n+1}))(1 - \gamma(\varepsilon_{n+2})) \| h_{n+1} \|.$$

Обозначим $h_{n+2} - \alpha_{n+2} g_{n+2} = h_{n+3}$. Продолжая этот процесс, мы получим существование совокупностей $\{g_i\}_{i=n+1}^{N}$, $\{\alpha_i\}_{i=n+1}^{N}$ и $\{h_i\}_{i=n+1}^{N+1}$, таких, что $\| g_i - e_i \| \leqslant \varepsilon_i$, $i = n+1, \ldots, N$ и

$$h_{k+1} = h_k - \alpha_k g_k,\quad \| h_{k+1} \| \leqslant \prod_{i=n+1}^{k} (1 - \gamma(\varepsilon_i)) \| h_{n+1} \|,\quad k = n+1, \ldots, N.$$

Складывая все равенства этой системы, мы получим

$$h_{n+1} = h = \sum_{i=n+1}^{N} \alpha_i g_i + h_{N+1}.$$

Причем в силу (14) $\|h_{N+1}\| \leqslant \prod_{i=n+1}^{N}(1-\gamma(\varepsilon_i))\|h_{n+1}\| \leqslant \varepsilon\|h\|$, что и доказывает (13).

Пусть теперь $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное нормированное множество в E, всюду плотное на единичной сфере в E. Согласно доказанному, найдется натуральная последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, последовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\|g_k-e_k\| \leqslant \varepsilon_k$, $k=1, 2, \ldots$, и последовательность чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, такие, что

$$\left\|y_i - \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}} \alpha_j g_j\right\| \leqslant \frac{1}{2}, \quad i=1, 2, \ldots \tag{15}$$

$\left(\text{Здесь положено } \varepsilon=\frac{1}{2}, \text{ хотя можно было бы выбрать любое } \varepsilon<1\right)$. Обозначим через $L\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ — подпространство в E, натянутое на элементы $g_1, g_2, \ldots$ Остается показать, что $L\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ совпадает с E. Действительно, если бы $L\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \neq E$, то для любого наперед заданного $\lambda<1$ нашелся бы элемент $y \in \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$, такой, что $\rho(y, L\{g_i\}_{i=1}^{\infty}) > \lambda$, что уже при $\lambda=\frac{1}{2}$ противоречит (15).

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — положительная последовательность. Для того, чтобы любая нормированная последовательность в H обладала свойством неустойчивости неполноты относительно $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, необходимо и достаточно, чтобы*
$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 = \infty$.

Действительно, достаточность прямо следует из теоремы 5, если учесть, что $\gamma(\eta, H) = 1-\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\eta^2}}{2}} \geqslant \frac{\eta^2}{8}$. Необходимость вытекает из результатов об устойчивости дефектных безусловных базисов в H (см., например, [6]).

Пользуюсь случаем выразить глубокую признательность М. И. Кадецу, В. И. Мацаеву и В. Д. Мильману за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и Д. П. Мильман. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и некоторых геометрических вопросах. Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР, 11 (1948), 97—112.

2. J. Lindenstrauss. On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces. Michigan Math. J., 10 (1963), 241—252.

3. M. M. Day. Uniform convexity in factor and conjugate spaces. Ann. Math. (2), 45 (1944), 375—385.

4. М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства. Изд-во иностр. лит., М., 1961.

5. M. M. Day. Some characterizations of inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1947), 320—337.

6. И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус. Об устойчивости базисов банаховых и гильбертовых пространств. Изд-во АН Молд. ССР, № 5 (1962), 17—35.