О РАСТВОРАХ И НАКЛОНАХ ПОДПРОСТРАНСТВ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

В. И. Гурарий

В настоящей работе рассматривается ряд характеристик взаимного расположения подпространств банахова пространства и приводятся некоторые их применения в геометрии банаховых пространств.

§ 1. Различные определения раствора подпространств

М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и Д. П. Мильман ввели [1] следующее определение раствора двух подпространств P и Q банахова пространства E:

$$\Theta(P, Q) = \max\{\sup_{x \in P,\, \|x\|=1} \rho(x, Q), \quad \sup_{y \in Q,\, \|y\|=1} \rho(y, P)\}.$$

Значительная часть применений этого понятия основана на следующей теореме, доказанной в [1].

Теорема 1. *Если размерности* подпространств P и Q банахова пространства E не равны между собой, то $\Theta(P, Q) \geqslant \frac{1}{2}$; если при этом по крайней мере одно из подпространств P и Q конечномерно или E — гильбертово пространство, то $\Theta(P, Q) = 1$.*

И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус [2] следующим образом видоизменили определение раствора:

$$\tilde{\Theta}(P, Q) = \max\{\sup_{x \in S_P} \rho(x, S_Q), \quad \sup_{y \in S_Q} \rho(y, S_P)\}$$

(где S_P — единичная сфера в P, т. е. множество элементов $x \in P$: $\|x\| = 1$; аналогично определяется S_Q) и установили следующее предложение:

Теорема 2. *Множество подпространств банахова пространства E, в котором расстояние между подпространствами P и Q определяется как раствор $\tilde{\Theta}(P, Q)$, есть полное метрическое пространство.*

Нетрудно видеть, что $\Theta(P, Q) \leqslant 1$ и что имеет место неравенство

$$\Theta(P, Q) \leqslant \tilde{\Theta}(P, Q) \leqslant 2\Theta(P, Q).$$

Теорема 1 и, соответственно, теорема 2 становятся несправедливыми, если иметь в виду раствор $\tilde{\Theta}$ или, соответственно, раствор Θ. Мы приводим определение раствора, при котором имеют место утверждения теорем 1 и 2.

---

* Размерность банахова пространства E понимается здесь как минимальная мощность множества, линейная оболочка которого плотна в E. Очевидно, если E бесконечномерно, то $\dim E$ равна минимальной мощности всюду плотного множества в E.

Определение. *Раствором подпространств P и Q будем называть величину*

$$\hat{\Theta}(P, Q) = \max\{\sup_{x \in T_P} \rho(x, T_Q), \quad \sup_{y \in T_Q} \rho(y, T_P)\},$$

где T_P — единичный шар в P, т. е. множество элементов $x \in P : \|x\| \leqslant 1$. Аналогично определяется T_Q.

Легко проверяются неравенства:

$$\Theta(P, Q) \leqslant \hat{\Theta}(P, Q) \leqslant 1, \tag{1}$$

$$C_1\hat{\Theta}(P, Q) \leqslant \tilde{\Theta}(P, Q) \leqslant C_2\hat{\Theta}(P, Q), \tag{2}$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — абсолютные постоянные (точные значения этих постоянных нам неизвестны). Кроме того, в гильбертовом пространстве $\hat{\Theta}(P, Q) = \Theta(P, Q)$.

Теорема 3. *Для раствора $\hat{\Theta}(P, Q)$ имеют место утверждения теорем 1 и 2.*

Доказательство. Из (1) и теоремы 1 вытекает, что для раствора $\hat{\Theta}(P, Q)$ справедливо утверждение теоремы 1. На основании (2) и теоремы 2 для доказательства справедливости утверждения теоремы 2 относительно раствора $\hat{\Theta}(P, Q)$ достаточно доказать неравенство треугольника:

$$\hat{\Theta}(P_1, P_3) \leqslant \hat{\Theta}(P_1, P_2) + \hat{\Theta}(P_2, P_3). \tag{3}$$

Но (3) является частным случаем следующей леммы [3].

Лемма (Ф. Хаусдорф). *Если в метрическом пространстве R определено расстояние между множествами $A \subset R$ и $B \subset R$*

$$r(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} \rho(x, B), \quad \sup_{y \in B} \rho(y, A)\},$$

то для произвольных множеств $A_1 \subset R$, $A_2 \subset R$, $A_3 \subset R$ имеет место неравенство

$$r(A_1, A_3) \leqslant r(A_1, A_2) + r(A_2, A_3).$$

Теорема доказана.

Неизвестно, существует ли абсолютная постоянная q; $\frac{1}{2} < q \leqslant 1$, такая, что если в банаховом пространстве размерности двух подпространств P и Q не равны между собой, то $\hat{\Theta}(P, Q) \geqslant q$.

Аналогичный вопрос для раствора $\Theta(P, Q)$ до сих пор не решен; выяснение же его для раствора $\hat{\Theta}(P, Q)$, формально говоря, могло бы встретить меньшие трудности в силу (1). Возможно, что при достаточно жестких ограничениях на P и Q из соотношения $\Theta(P, Q) < \alpha$ при некотором $\alpha > 0$ вытекает изоморфизм подпространств P и Q. Некоторые основания для такого предположения дает следующая

Теорема 4. *Если в сепарабельном банаховом пространстве для подпространств P и Q $\Theta(P, Q) < 1$ и P изометрично l_1 (*), то Q изоморфно P.*

---

* $l_p\,(p \geqslant 1)$ — пространство числовых последовательностей $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$, с естественно определенными векторными операциями и нормой $\|\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство. Нам понадобится следующая лемма, недавно полученная В. Д. Мильманом*, которую мы приведем в несколько ослабленной форме.

Лемма. Если сепарабельное банахово пространство E не изоморфно l_1, то для произвольной нормированной системы $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ в E и числа $\varepsilon > 0$ существует полная в E система $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, такая что $\|x_i - y_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots$

Предположим, что утверждение теоремы 4 не имеет места. Пусть $\{e_i\}_1^{\infty}$ — естественный базис в l_1. Так как при некотором $a > 0$, $\Theta(P, Q) < a < 1$, то из леммы вытекает, что в Q найдется полная система $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которой $\|e_i - g_i\| < a < 1$. Очевидно, $\|g_i\| < 1 + a$. Имеем

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right\| \leqslant (1+a)\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| = (1+a)\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|.$$

С другой стороны,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(g_i - e_i)\right\| \geqslant$$

$$\geqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(g_i - e_i)\right\| \geqslant (1-a)\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|.$$

Таким образом получаем

$$(1-a)\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\right\| \leqslant (1+a)\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|.$$

Следовательно, линейный оператор T, определенный на множестве всех конечных линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ в P формулой $T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i$, ограничен и ограниченно обратим. Продолжая его на все P, получим требуемый изоморфизм P на Q.

Теорема доказана.

§ 2. Наклон

Определение. *Пусть P и Q подпространства банахова пространства E. Будем называть наклоном P к Q величину*

$$(\widehat{P, Q}) = \inf_{x \in P;\ \|x\|=1} \rho(x, Q).$$

Наклоном подпространства P к элементу $x \in E$ будем называть наклон P к одномерному подпространству, порожденному этим элементом. Аналогично определим наклон элемента к подпространству и элемента к элементу.

Применения этого понятия (см., например, [4]) в теории базисов (** основаны на следующем критерии, данном М. М. Гринблюмом [5] в форме.

---

* Этот результат В. Д. Мильмана изложен в статье, которая в настоящее время находится в печати.

** Последовательность $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве E называется базисом в E, если любой элемент $x \in E$ может быть единственным образом представлен в виде $x = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$. Если $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ является базисом в своей замкнутой линейной оболочке, то она называется базисной в E.

эквивалентной приводимой. Условимся для данной последовательности $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ обозначать через $P_{i,j}$, $i \leqslant j$ линейную оболочку над элементами $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_j$.

Теорема 5. *Для того, чтобы полная последовательность $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве E была базисом в E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$(P_{1,i}\widehat{\ \ } P_{i+1,j}) \geqslant \beta > 0, \quad i < j,$$

где β не зависит от i и j (точная верхняя грань таких β называется индексом базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и обозначается в дальнейшем $\gamma(\{e_i\}_{i=1}^{\infty})$).

Нетрудно видеть, что $(P\widehat{,}Q) = \frac{1}{\|A\|}$, где A — оператор проектирования из $P \dot{+} Q$ на P, параллельно Q. Действительно,

$$\|A\| = \sup_{x \in P,\, y \in Q} \frac{\|x\|}{\|x+y\|} = \frac{1}{\inf\limits_{x \in P,\, y \in Q} \frac{\|x+y\|}{\|x\|}} = \frac{1}{(P\widehat{,}Q)}.$$

Понятие наклона несимметрично: в общем случае для некоторых P и Q $(P\widehat{,}Q) \neq (Q\widehat{,}P)$; следующая теорема дает оценку «степени несимметричности».

Теорема 6. *Если $(P\widehat{,}Q) = \delta$, то $(Q\widehat{,}P) \geqslant \frac{\delta}{1+\delta}$. Это неравенство точное при любом δ, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $y \in Q$, $\|y\| = 1$, $x \in P$, оценим $\|y+x\|$. Рассмотрим два случая

1. $\|x\| \leqslant \frac{1}{1+\delta}$, тогда

$$\|y+x\| \geqslant \|y\| - \|x\| \geqslant 1 - \frac{1}{1+\delta} = \frac{\delta}{1+\delta}$$

2. $\|x\| > \frac{1}{1+\delta}$, тогда

$$\|y+x\| \geqslant \rho(x, Q) \geqslant (P\widehat{,}Q)\,\|x\| \geqslant \frac{\delta}{1+\delta}.$$

Так как элементы $x \in P$ и $y \in Q$ выбраны произвольно, то получаем

$$(Q\widehat{,}P) = \inf_{\substack{y \in Q,\, x \in P \\ \|y\|=1}} \|y+x\| \geqslant \frac{\delta}{1+\delta}.$$

Для установления точности этого неравенства рассмотрим две функции в $C[0,1]$: $x(t) \equiv 1$, $y(t) = (1-\delta) + 2\delta t$. Непосредственно проверяется, что

$$(x\widehat{,}y) = \delta, \ (y\widehat{,}x) = \frac{\delta}{1+\delta}.$$

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Для того, чтобы в банаховом пространстве E, $\dim E > 2$ для любых двух подпространств P и Q выполнялось соотношение*

$$(\widehat{P, Q}) = (\widehat{Q, P}), \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы E было пространством со скалярным произведением.

Доказательство.

Необходимость. Пусть для любых двух подпространств в E выполнено (4) и пусть $E^{(3)}$ — трехмерное подпространство в E, а P — произвольное двумерное подпространство в $E^{(3)}$. Очевидно, найдется элемент $x \in E^{(3)}$ такой, что $(\widehat{x, P}) = 1$, но тогда $(\widehat{P, x}) = 1$. Как нетрудно видеть, это означает, что цилиндрическая поверхность с направляющей S_P (S_P — единичная сфера в P) и образующим элементом x является опорной к единичному шару $T^{(3)}$ в $E^{(3)}$. Так как подпространство P выбрано в $E^{(3)}$ произвольно, то отсюда вытекает, что тело $T^{(3)}$ есть эллипсоид [6] и, следовательно, $E^{(3)}$ — эвклидово пространство. Но так как любое трехмерное подпространство в E эвклидово, то E — пространство со скалярным произведением [7], что и доказывает необходимость.

Неизвестно, справедливо ли утверждение необходимости при $\dim E = 2$.

Достаточность. Для двумерного эвклидова пространства (4) очевидно. Пусть P и Q подпространства пространства со скалярным произведением. Очевидно, для данного $\varepsilon > 0$ найдутся одномерные подпространства $P_1 \subset P$ и $Q_1 \subset Q$, такие что

$$(\widehat{P, Q}) \geqslant (\widehat{P_1, Q_1}) - \varepsilon. \tag{5}$$

Так как, очевидно, $(\widehat{P_1, Q_1}) = (\widehat{Q_1, P_1}) \geqslant (\widehat{Q, P})$, то из (5) имеем

$$(\widehat{P, Q}) \geqslant (\widehat{Q, P}) - \varepsilon$$

и в силу произвольности ε получаем $(\widehat{P, Q}) \geqslant (\widehat{Q, P})$. Таким же образом доказывается обратное неравенство $(\widehat{Q, P}) \geqslant (\widehat{P, Q})$, откуда и вытекает (4).

Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная последовательность в банаховом пространстве E и пусть $(\widehat{P_{1,i}, e_{i+1}}) = \beta_i$. Если $\prod_{i=1}^{\infty} \beta_i = \beta > 0$, то $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ является базисом в E, причем $\gamma(\{e_i\}_{i=1}^{\infty}) \geqslant \beta$.*

Доказательство. Пусть $x \in P_{1,i}$, $y \in P_{i+1,j}$, $y = \sum_{k=i+1}^{j} \alpha_k e_k$, имеем

$$\|x + y\| = \|x + \sum_{k=i+1}^{j-1} \alpha_k e_k + \alpha_j e_j\| \geqslant \|x + \sum_{k=i+1}^{j-1} \alpha_k e_k\| \cdot (\widehat{P_{1,j-1}, e_j}) \geqslant$$

$$\geqslant \|x + \sum_{k=i+1}^{j-2} \alpha_k e_k\| \cdot (\widehat{P_{1,j-2}, e_{j-1}}) \cdot (\widehat{P_{1,j-1}, e_j}) \geqslant$$

$$\geqslant \ldots \geqslant \|x\| \cdot \beta_i \cdot \beta_{i+1} \ldots \cdot \beta_{j-1} \geqslant \|x\| \beta.$$

Это означает, что $(\widehat{P_{1,i}, P_{i+1,j}}) \geqslant \beta$ и на основании теоремы 5 последовательность $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ является базисом в E.

Определение. *Нормированная последовательность $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве называется δ-минимальной $(\delta > 0)$, если $\rho(e_i, P_{1,i-1} \dot{+} P_{i+1,\infty}) \geqslant \delta$, $i = 1, 2, \ldots$*

Теорема 9. *Базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\|e_i\| = 1$ с индексом γ есть δ-минимальная последовательность, где $\delta = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}$.*

Доказательство. Пусть $x \in P_{1,i-1}$, $y \in P_{i+1,\infty}$; применяя теорему 6, имеем

$$\|e_i + x + y\| \geqslant \|e_i\| \cdot (\widehat{e_i, P_{1,i-1}}) \cdot (\widehat{P_{1,i}, P_{i+1,\infty}}) \geqslant \|e_i\| \cdot \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \gamma = \frac{\gamma^2}{1+\gamma},$$
$$i = 1, 2, \ldots$$

что и означает δ — минимальность последовательности $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\delta = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}$.

Следствие. *Если $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ нормированная базисная последовательность с индексом γ, то в разложении нормированного элемента $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ имеют место неравенства*

$$|\alpha_i| \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma^2}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Теорема 10. *Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — нормированная базисная последовательность с индексом γ и пусть последовательность $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\|e_i - g_i\| < \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \leqslant \frac{a\gamma^2}{1+\gamma}$; $0 < a < 1$. Тогда оператор T, определенный на множестве линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ формулой $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ ограничен и ограниченно обратим, причем* $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} \leqslant \frac{1}{1-a}$.

Доказательство. Обозначим $e_i - g_i = h_i$ и пусть $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i = y$. На основании следствия из теоремы 9 имеем

$$|\alpha_i| \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \|x\|, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

поэтому

$$\|x - y\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i\right\| \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \sum_{i=1}^{n} \|h_i\| \cdot \|x\| \leqslant \frac{(1+\gamma)\|x\|}{\gamma^2} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \leqslant a\|x\|$$

и, следовательно,

$$(1-a)\|x\| \leqslant \|y\| \leqslant (1+a)\|x\|,$$

что и доказывает теорему 10.

В заключение отметим, что наклон $(\widehat{P, Q})$ связан с минимальным углом $\varphi(P, Q)$, введенным в [2], следующим образом:

$$\sin\varphi(P, Q) = \min\{(\widehat{P, Q}), (\widehat{Q, P})\}.$$

§ 3. О связи между раствором и наклоном

Очевидно, имеет место неравенство

$$(\widehat{P, Q}) \leqslant \Theta(P, Q). \tag{6}$$

В гильбертовом пространстве в тривиальных случаях, когда P и Q ортогональны или совпадают в (6), имеет место знак равенства: в первом случае $(\widehat{P, Q}) = \Theta(P, Q) = 1$, во втором случае $(\widehat{P, Q}) = \Theta(P, Q) = 0$. Кроме того, если P и Q одномерны, то в случае гильбертова пространства в (6) также имеет место знак равенства. Оказывается, при любом p, $0 \leqslant p \leqslant 1$ для некоторых неодномерных подпространств P и Q в гильбертовом пространстве возможно равенство $(\widehat{P, Q}) = \Theta(P, Q) = p$. Это предложение является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 11. *В гильбертовом пространстве H для любого натурального $n > 1$ и чисел p, q, $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant 1$ существуют n-мерные подпространства P и Q, для которых*

$$(\widehat{P, Q}) = p, \quad \Theta(P, Q) = q.$$

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ ортонормированная система в H. Положим

$$x_i = e_{2i-1} + a_i e_{2i}, \quad y_i = e_{2i-1} - a_i e_{2i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

(числа a_i будут выбраны позже); P_i и Q_i — одномерные подпространства, порожденные соответственно элементами x_i и y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $P = P_1 \dotplus P_2 \dotplus \ldots \dotplus P_n$, $Q = Q_1 \dotplus Q_2 + \ldots + Q_n$. Если $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, то, как легко видеть,

$$\rho(x, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \rho^2(x_i, Q_i)}.$$

Непосредственный подсчет дает:

$$\rho(x_i, Q_i) = \frac{2a_i}{\sqrt{1 + a_i^2}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Учитывая, что $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 (1 + a_i^2)}$, имеем

$$(\widehat{P, Q}) = \min 2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2 a_i^2}{1 + a_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 (1 + a_i^2)}}. \tag{8}$$

$$\max_{x\in P}\frac{\rho(x, Q)}{\|x\|}=\max_{\alpha_i} 2\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^2 a_i^2}{1+a_i^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2(1+a_i^2)}}. \tag{8}$$

Примем, что

$$\frac{a_1}{1+a_1^2}\leqslant\frac{a_2}{1+a_2^2}\leqslant\ldots\leqslant\frac{a_n}{1+a_n^2}. \tag{9}$$

Тогда, очевидно, минимум или максимум в (8) достигается, когда все α_i, кроме α_1 или, соответственно, α_n равны нулю. Так как минимум или максимум выражения $\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}$ равны соответственно 0 или $\frac{1}{2}$, то можно с самого начала выбрать $\{a_i\}_{i=1}^n$ так, чтобы выполнялось (9) и равенство $\frac{a_1}{1+a_1^2}=\frac{p}{2}$, $\frac{a_n}{1+a_n^2}=\frac{q}{2}$. Тогда из (8) получим

$$(\widehat{P, Q})=p,\ \max_{x\in P}\frac{\rho(x, Q)}{\|x\|}=q.$$

Но из (7) видно, что

$$\max_{x\in P}\frac{\rho(x, Q)}{\|x\|}=\max_{y\in Q}\frac{\rho(y, P)}{\|y\|}=\Theta(P, Q).$$

Теорема доказана.

Полагая в теореме 11 $p=q$, получаем

Следствие. *В гильбертовом пространстве для любого числа* p, $0\leqslant p\leqslant 1$ *существуют* n*-мерные подпространства* P *и* Q *такие, что* $\frac{\rho(x, Q)}{\|x\|}\equiv\frac{\rho(y, P)}{\|y\|}\equiv p$ *при любых* $x\in P$, $y\in Q$.

Таким же методом теорема 11 может быть доказана и для случая бесконечномерных подпространств P и Q.

§ 4. Условия замкнутости прямой суммы подпространств

Определение. *Групповой суммой* $P+Q$ *подпространств* P *и* Q *банахова пространства* E *называется множество всех элементов вида* $x+y$, $x\in P$, $y\in Q$. *Если* $P\cap Q=\Theta$, *то* $P+Q$ *называется прямой суммой и обозначается* $P\dot{+}Q$.

Очевидно, если P или Q конечномерно, то $P\dot{+}Q$ замкнута. Для бесконечномерных P и Q замкнутость $P\dot{+}Q$ не всегда имеет место. Известные геометрические критерии замкнутости прямой суммы подпространств (см., например, [8]) можно переформулировать в терминах наклонов следующим образом:

Теорема 12. *Для того, чтобы прямая сумма двух подпространств* P *и* Q *банахова пространства была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы* $(\widehat{P, Q})>0$.

Перед формулировкой основного результата этого параграфа установим несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Пусть P и Q подпространства банахова пространства,* $P = P_1 \dotplus P_2$, $Q = Q_1 \dotplus Q_2$,

$$(\widehat{P_1, P_2 \dotplus Q}) = \alpha, \quad (\widehat{Q_1, Q_2 \dotplus P}) = \beta, \quad (\widehat{P_2, Q_2}) = \gamma.$$

Тогда

$$(\widehat{P, Q}) \geqslant \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $x \in P$, $y \in Q$, $\|x\| = 1$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_i \in P_i$, $y_i \in Q_i$, $i = 1, 2$. Оценивая $\|x + y\|$, рассмотрим два случая:

1. $\|x_1\| + \|y_1\| \geqslant a$ (a выберем позже).

Этот случай в свою очередь подразделяем на два:

а) $\|x_1\| \geqslant \frac{a\beta}{\alpha + \beta}$, тогда

$$\|x + y\| = \|x_1 + (x_2 + y_1 + y_2)\| \geqslant \|x_1\| \alpha \geqslant \frac{a\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

б) $\|x_1\| < \frac{a\beta}{\alpha + \beta}$, тогда $\|y_1\| \geqslant a - \|x_1\| > \frac{\alpha a}{\alpha + \beta}$, и мы имеем

$$\|x + y\| = \|y_1 + (x_1 + x_2 + y_2)\| \geqslant \|y_1\| \beta \geqslant \frac{a\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

и, таким образом, в случае 1:

$$\|x + y\| \geqslant \frac{a\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

2. $\|x_1\| + \|y_1\| < a$, тогда $\|x_2\| \geqslant 1 - \|x_1\| \geqslant 1 - a$ и имеем

$$\|x + y\| = \|x_2 + y_2 + x_1 + y_1\| \geqslant \|x_2 + y_2\| - (\|x_1\| + \|y_1\|) \geqslant \geqslant \|x_2\| \gamma - a \geqslant (1 - a)\gamma - a.$$

Выбирая a как корень уравнения $\frac{a\alpha\beta}{\alpha + \beta} = (1 - a)\gamma - a$, т. е. $a = \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}$, мы в обоих случаях получим

$$\|x + y\| \geqslant \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma},$$

откуда и вытекает (10).

Очевидна следующая

Лемма 2. *Если $P \cap Q = \Theta$ и $\dim P < \infty$, то $(\widehat{P, Q}) > 0$.*

Лемма 3. *Пусть R и S подпространства конечных коразмерностей в подпространствах соответственно P и Q банахова пространства, и $P \cap Q = \Theta$. Для того, чтобы $(\widehat{R, S}) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $(\widehat{P, Q}) = 0$.*

Очевидно, в доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $(\widehat{P, Q}) = 0$ и пусть R' и S' — прямые дополнения к R и S в P и Q соответственно; очевидно, $\dim R' < \infty$ и $\dim S' < \infty$. Так как $P \cap Q = \Theta$ и $R' \cap R = \Theta$, $S' \cap S = \Theta$, то $R' \cap (Q \dotplus R) = \Theta$ и $S' \cap (P \dotplus S) = \Theta$. Если обозначить $(\widehat{R', Q \dotplus R}) = \alpha$, $(\widehat{S', P \dotplus S}) = \beta$, $(\widehat{R, S}) = \gamma$, то на основании леммы 2 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, но тогда из леммы 1 вытекает: $\gamma = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть P конечномерное подпространство в банаховом пространстве E. Для произвольного, наперед заданного $\beta < 1$ существует подпространство Q_β конечной коразмерности в E, такое что $(\widehat{P, Q_\beta}) > \beta$.*

Эта лемма в неявном виде содержится в [9], (см. также [4]).

Определение. *Бесконечномерные банаховы пространства P и Q будем называть частично изометричными (частично изоморфными), если для любого $\eta > 1$ (соответственно для некоторого $\eta < \infty$) существуют бесконечномерные подпространства $P_\eta \subset P$ и $Q_\eta \subset Q$ и изоморфизм T P_η на Q_η такие, что $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} < \eta$. Если P и Q не являются частично изометричными (частично изоморфными), то будем называть их существенно неизометричными (существенно неизоморфными).*

Нетрудно показать, например, что если E есть одно из пространств c_0, l_p, $1 \leqslant p < \infty$ *, E_1 и E_2 — бесконечномерные подпространства в E, то E_1 и E_2 частично изометричны. Примерами существенно неизоморфных (а значит и существенно неизометричных) пространств могут служить l_p и l_r, $p \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $p \neq r$, а также l_p, $p \geqslant 1$ и c_0.

Теорема 13. *Прямая сумма двух существенно неизометричных подпространств банахова пространства замкнута.*

Доказательство. Предположим, что прямая сумма подпространств P и Q, где P и Q существенно неизометричны, незамкнута. Тогда по теореме 12 $(\widehat{P, Q}) = 0$. Пусть $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ положительные последовательности, такие, что

$$\prod_{i=1}^{\infty} \beta_i = \beta > 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\varepsilon\beta^2}{1+\beta}. \tag{11}$$

Так как $(\widehat{P, Q}) = 0$, то найдутся два элемента e_1 и g_1, $e_1 \in P$, $g_1 \in Q$, $\|e_1\| = 1$, такие, что $\|e_1 - g_1\| < \varepsilon_1$. По лемме 4 найдется подпространство R_1 конечной коразмерности в P, такое, что $(\widehat{e_1, R_1}) \geqslant \beta_1$, но так как по лемме 3 $(\widehat{R_1, Q}) = 0$, то найдутся два элемента e_2 и g_2: $e_2 \in R_1$ и $g_2 \in Q$, $\|e_2\| = 1$, такие, что $\|e_2 - g_2\| < \varepsilon_2$. Очевидно, $(\widehat{e_1, e_2}) \geqslant (\widehat{e_1, R_1}) \geqslant \beta_1$. Пусть $P_{1,2}$ — линейная оболочка элементов e_1 и e_2. По лемме 4 найдется подпространство R_2 конечной коразмерности в P такое, что $(\widehat{P_{1,2}, R_2}) \geqslant \beta_2$, но так как по лемме 3 $(\widehat{R_2, Q}) = 0$, то найдутся два элемента e_3 и g_3, $e_3 \in R_2$, $g_3 \in Q$, $\|e_3\| = 1$ такие, что $\|e_3 - g_3\| < \varepsilon_3$. Очевидно, $(\widehat{P_{1,2}, e_3}) \geqslant (\widehat{P_{1,2}, R_2}) \geqslant \beta_2$. Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим существование последовательностей $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, $e_i \in P$, $\|e_i\| = 1$, $g_i \in Q$, $i = 1, 2, \ldots$ таких, что

$$(\widehat{P_{1,i}, e_{i+1}}) \geqslant \beta_i \text{ и } \|e_i - g_i\| < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

($P_{1,i}$ — линейная оболочка над элементами $e_1, \ldots, e_i$). Пусть P_1 и Q_1 — линейные оболочки над $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и соответственно над $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. Очевидно $\dim P_1 = \infty$ и $\dim Q_1 = \infty$. На основании (11), (12) и теоремы 10 существует изоморфизм T P_1 на Q_1 такой, что $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}$, и так как ε можно было с самого начала выбрать сколь угодно малым, то подпространства P и Q частично изометричны, что противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

---

* c_0 — пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с естественно определенными векторными операциями и нормой $\|\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\| = \max_i |\xi_i|$.

Следствие. *Прямая сумма рефлексивного и существенно нерефлексивного** *подпространств банахова пространства замкнута.*

Теорема 14. *Групповая сумма $P+Q$ двух существенно неизометричных подпространств P и Q банахова пространства замкнута.*

Доказательство. Пусть $P\cap Q=R$. Из условия теоремы следует, что $\dim R<\infty$. Но тогда существуют подпространства $P_1\subset P$ и $Q_1\subset Q$ такие, что $R\dot{+}P_1=P$, $R\dot{+}Q_1=Q$. Так как, очевидно, $P_1\cap Q_1=\theta$, то по теореме 13 $P_1\dot{+}Q_1$ замкнута. Но тогда, учитывая, что R конечномерно, получаем, что сумма

$$P+Q=R\dot{+}(P_1\dot{+}Q_1)-$$

замкнута.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Групповая сумма рефлексивного и существенно нерефлексивного подпространств банахова пространства замкнута.*

Следствие 2. *Прямая или групповая сумма существенно неизоморфных подпространств банахова пространства замкнута.*

Из теорем 12 и 13 вытекает

Теорема 15. *Если подпространства P и Q банахова пространства существенно неизометричны и $P\cap Q=\theta$, то эти подпространства образуют положительный минимальный угол.*

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и Д. П. Мильман. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и некоторых геометрических вопросах. Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР, 11 (1948), 97—112.

2. И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус. Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства. «Усп. матем. наук», 14, вып. 5 (1959), 135—140.

3. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. М.—Л., (1937), 166.

4. В. И. Гурарий. О наклонах подпространств и условных базисах в пространстве Банаха. «Докл. АН СССР», 145, № 3 (1962), 504—506

5. М. М. Гринблюм. Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (B). «Докл. АН СССР», 31 (1941), 428—432.

6. T. Bonnesen und W. Fenchel. Theorie der konvexen körper, Berlin, (1934), 142—143.

7. М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства, ИЛ, 1961, 193.

8. М. И. Гринблюм. О представлении пространства типа (B) в виде прямой суммы подпространств. «Докл. АН СССР», 70, (1950), 747—752.

9. B. R. Gelbaum. Notes on Banach spaces and bases. Anais Acad. Brasil. cienc., 30, № 1, (1958), 29—36.

---

* Существенно нерефлексивным мы называем бесконечномерное банахово пространство, все рефлексивные подпространства которого конечномерны.