НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ТЕОРИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ*

Н. С. Ландкоф

Мы будем рассматривать евклидово пространство R для определенности трех измерений.

Обозначения:

$x, y, z, \ldots$ — точки R;

$|x-y|$ — расстояние между точками x, y.

G — область в R;

$\overline{G}$ — ее замыкание;

∂G — граница G,

μ — мера в R, т. е. неотрицательная вполне аддитивная функция множества, определенная на всех борелевских множествах R.

ν — заряд в R, т. е. разность двух мер:

$$\nu = \nu^+ - \nu^-;$$

$U^\nu(x)$ — потенциал заряда ν, т. е.

$$U^\nu(x) = \int \frac{d\nu(y)}{|x-y|} = U^{\nu+}(x) - U^{\nu-}(x);$$

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-;$$

$S(\nu) = S(|\nu|)$ — носитель заряда ν.

ε_x — мера Дирака, сосредоточенная в точке x.

$\mu_n \to \mu$ обозначает слабую сходимость мер μ_n к μ; это значит, что для любой непрерывной финитной в R функции $f(x)$

$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu.$$

Аналогичное определение — для зарядов.

§ 1. Ассоциированные заряды и меры

Пусть ∂G является компактом. Обозначим $C_{\partial G}$ линейное пространство вещественных непрерывных функций $f(x)$ на ∂G, нормированное обычным способом:

$$\|f\|_{\partial G} = \max_{x \in \partial G} |f(x)|.$$

---

* Подход к задаче выметания, изложенный в § 1, излагался автором в 1948 г. в докладе в Институте математики и механики ХГУ и в лекциях по теории потенциала, читанных в ХГУ в 1956 году. Теорема 3 была доказана позже. Лишь после этого автор обнаружил, что она имеется в работе Ж. Дени [1], 1950 г. Ради цельности изложения мы привели ее доказательство в § 2.

Аналогичный смысл имеет обозначение $C_{\overline{G}}$, причем в случае области G, содержащей бесконечность, мы рассматриваем лишь функции, равные нулю на бесконечности.

Пусть $H_{\overline{G}}$ обозначает линейное подпространство в $C_{\overline{G}}$, состоящее из всех функций, гармонических в G. Если $h(x) \in H_{\overline{G}}$, то

$$\|h\|_{\overline{G}} = \max_{x \in G} |h(x)| = \max_{x \in \partial G} |h(x)| = \|h\|_{\partial G},$$

так что $H_{\overline{G}}$ линейно изоморфно некоторому подпространству $H_{\partial G}$ пространства $C_{\partial G}$.

Рассмотрим произвольный вполне конечный заряд ν в $\overline{G}$. Это значит, что

$$\int_R d|\nu| < \infty, \quad S(\nu) \subset \overline{G}.$$

Формула

$$\nu(h) = \int_{\overline{G}} h(x)\, d\nu(x), \qquad h \in H_{\overline{G}},$$

определяет линейный функционал в $H_{\overline{G}}$ и, следовательно, в $H_{\partial G}$. Его норма не превосходит, очевидно, $|\nu|(\overline{G}) = \int d|\nu|$.

По теореме Хана-Банаха продолжим функционал $\nu(h)$ с $H_{\partial G}$ на $C_{\partial G}$. Это продолжение обозначим $\nu' = \alpha\nu$. По теореме Ф. Рисса имеем представление

$$\nu'(f) = \int_{\partial G} f(x)\, d\nu'(x), \qquad f \in C_{\partial G},$$

где $S(\nu') \subset \partial G$. При этом

$$\|\nu'\| = |\nu'|(\partial G) \leqslant |\nu|(\overline{G}).$$

Этот результат можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 1. *Всякому вполне конечному заряду* ν, $S(\nu) \subset \overline{G}$, *можно сопоставить заряд* $\nu' = \alpha\nu$ *на* ∂G *таким образом, что для любой функции* $h(x) \in H_{\overline{G}}$

$$\int_{\partial G} h(x)\, d\nu'(x) = \int_{\overline{G}} h(x)\, d\nu(x). \tag{1}$$

При этом

$$|\nu'|(\partial G) \leqslant |\nu|(\overline{G}).$$

Всякий заряд ν', удовлетворяющий соотношению (1), будем называть *ассоциированным* для ν (относительно области G).

Если вместо заряда ν рассматривать меру μ, то, пользуясь, вместо теоремы Хана-Банаха, теоремой о позитивном расширении позитивного функционала, получим существование *меры* μ', ассоциированной любой заданной мере μ.

В случае ограниченной области G

$$\mu'(\partial G) = \mu(\overline{G}),$$

ибо в (1) можно положить $h(x) \equiv 1$. В случае бесконечной области нетрудно построить ассоциированную меру μ', для которой

$$\mu'(\partial G) \leqslant \mu(\overline{G}).$$

Легко доказать, что для регулярности G* необходимо и достаточно, чтобы для любой меры μ, $S(\mu) \subset \overline{G}$, ассоциированная мера $\alpha\mu$ была определена однозначно.

Если $x \overline{\in} \overline{G}$, то

$$h(y) = \frac{1}{|y-x|} \in H_{\overline{G}},$$

и поэтому

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x). \tag{2}$$

Говорят, что мера $\beta\mu$, $S(\beta\mu) \subset \partial G$, решает проблему выметания меры μ, $S(\mu) \subset G$, если

$$U^{\beta\mu}(x) = U^{\mu}(x) \tag{3}$$

для всех $x \overline{\in} \overline{G}$ и для квази всех $x \in \partial G$**. Если (3) имеет место во *всех* точках ∂G, то мы будем говорить, что $\beta\mu$ решает проблему выметания в строгом смысле (в этом случае $\beta\mu$ единственна).

Отметим следующие предложения:

(*a*) Если проблема выметания в строгом смысле разрешима для меры Дирака ε_y, $y \in G$, то область G регулярна. При этом решение $h_f(y)$ задачи Дирихле с граничной функцией $f(x)$ дается формулой

$$h_f(y) = \int_{\partial G} f(x) d\beta\varepsilon_y(x). \tag{4}$$

(*b*) Если проблема выметания разрешима в строгом смысле, то $\beta\mu$ является также ассоциированной мерой для μ.

(*c*) Если область G регулярна, то ассоциированная мера $\alpha\mu$ решает проблему выметания в строгом смысле.

Таким образом, в случае регулярной области

$$\alpha\mu \equiv \beta\mu. \tag{5}$$

В общем случае проблема выметания (в смысле (3)) имеет, как известно (см., например, [2]), единственное решение в классе мер, равных нулю на множестве I иррегулярных точек ∂G. Будем обозначать $\beta\mu$ именно это решение. Тогда нетрудно проверить, что

$$\beta\mu(e) = \int_{S(\mu)} \beta\varepsilon_x(e)\, d\mu(x), \quad e \subset \partial G.$$

В таком случае для любой $h(y) \in H_{\overline{G}}$

$$\int_{\partial G} h(y) d\beta\mu(y) = \int_{S(\mu)} d\mu(x) \int_{\partial G} h(y)\, d\beta\varepsilon_x(y),$$

но

$$\int_{\partial G} h(y)\, d\beta\varepsilon_x(y) = h(x). \tag{6}$$

Для $x \in G$ это можно получить, аппроксимируя, как обычно, G изнутри регулярными областями G_n, затем, пользуясь (5) и делая предельный переход. Для $x \in \partial G$ мы получим (6), если запишем формулу

* Область G называется регулярной, если задача Дирихле разрешима для любой $f(x) \in C_{\partial G}$, т. е. если $H_{\partial G} \equiv C_{\partial G}$.

** Квази всюду — это значит всюду, за возможным исключением множества нулевой емкости.

$$\int_{\partial G} h(y)\, d\beta\varepsilon_{x_n}(y) = h(x_n)$$

для $x_n \in G$, а затем заставим $x_n \to x \in \partial G$. При этом нужно учесть (см. [3] или [4]), что x_n можно выбрать так, чтобы

$$\beta\varepsilon_{x_n} \to m\varepsilon_x + (1-m)\beta\varepsilon_x, \quad (0 \leqslant m < 1).$$

Следовательно,

$$\int_{\partial G} h(y)\, d\beta\mu(y) = \int_{\overline{G}} h(x)\, d\mu(x).$$

Этим доказана

Теорема 2. *Для любой области G и любой меры μ, $S(\mu) \subset \overline{G}$, мера $\beta\mu$, получаемая после выметания μ на ∂G, является ассоциированной мерой для μ.*

Ниже мы увидим, что верна и обратная теорема.

§ 2. Аннулятор подпространства $H_{\partial G}$ и теорема М. В. Келдыша

Пространство $C^*_{\partial G}$, сопряженное $C_{\partial G}$, состоит, как известно, из всех зарядов ν, $S(\nu) \subset \partial G$. Обозначим N *аннулятор* подпространства $H_{\partial G}$, т. е. множество всех зарядов $\nu \in C_{\partial G}{}^*$, для которых

$$\int_{\partial G} h(x)\, d\nu(x) = 0, \text{ при любой } h \in H_{\partial G}. \tag{7}$$

Следующая теорема дает характеристику N.

Теорема 3. *Для того, чтобы заряд ν принадлежал N, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\nu = \nu_I - \beta\nu_I, \tag{8}$$

где ν_I — часть ν на множестве I.

Доказательство. Достаточность условия (8) является следствием теоремы 2.

Будем доказывать его необходимость. Рассмотрим заряды

$$\nu_z = \varepsilon_z - \beta\varepsilon_z, \quad z \in I,$$

и обозначим N_1 линейную оболочку множества $\{\nu_z\}$.

Если $f(x) \in C_{\partial G}$, то условие

$$\int_{\partial G} f(x)\, d\nu_z(x) = 0, \quad z \in I,$$

необходимо и достаточно для принадлежности $f(x)$ к $H_{\partial G}$ (см. [5] или [4]). Следовательно, $H_{\partial G}$ есть аннулятор линейного многообразия N_1. В таком случае, как известно (см. [6], стр. 39), N является слабым замыканием N_1.

Заметим теперь, что для любого $\nu \in N_1$

$$U^{\nu}(x) = 0 \text{ квази всюду на } \partial G. \tag{9}$$

Обозначим $N_0 \supset N_1$ множество *всех* зарядов на ∂G, удовлетворяющих условию (9). Покажем, что N_0 слабо замкнуто. Так как $C_{\partial G}$ сепарабельно, то по известной теореме (см. [7] теорему 5, гл. 8) достаточно убедиться в том, что слабый предел любой *последовательности* $\nu_k \in N_0$ принадлежит N_0. Пусть $\nu_k \to \nu$. Так как нормы $\|\nu_k\| = \nu_k^+(\partial G) + \nu_k^-(\partial G)$ ограничены, то в силу теоремы о слабой компактности мер можно считать, что существуют слабые пределы ν' и ν'' последовательностей $\{\nu_k^+\}$, соответственно $\{\nu_k^-\}$. При этом $\nu = \nu' - \nu''$. Далее, так как $\nu_k \in N_0$, то квази всюду на ∂G

$$U^{\nu_k^+}(x) = U^{\nu_k^-}(x).$$

Следовательно, все такие равенства одновременно также выполняются квази всюду на ∂G.

Согласно теореме Брело (см. [8]), квази всюду

$$U^{\nu'}(x) = \lim_{k\to\infty} U^{\nu_k^+}(x),$$

$$U^{\nu''}(x) = \lim_{k\to\infty} U^{\nu_k^-}(x).$$

Следовательно, квази всюду на ∂G

$$U^{\nu'}(x) = U^{\nu''}(x), \text{ т. е. } U^{\nu}(x) = 0.$$

Итак, $\nu \in N_0$ и N_0 слабо замкнуто.

Таким образом, $N \subseteq N_0$.

Согласно формуле М. Рисса [9], для любого заряда ν на ∂G

$$U^{\nu}(y) = \int_{\partial G} U^{\nu}(x)\, d\beta\varepsilon_y(x) + \int_I G(x, y)\, d\nu(x), \quad y \,\overline{\in}\, \partial G,$$

где $G(x, y)$ — обобщенная функция Грина области, ограниченной ∂G и содержащей точку y. Следовательно, если $\nu \in N_0$, то

$$U^{\nu}(y) = \int_I G(x, y)\, d\nu(x) = \int_I U^{\varepsilon_I}(x)\, d\nu(x) - \int_I U^{\beta\varepsilon_y}(x)\, d\nu(x) =$$

$$= U^{\nu_I}(y) - \int_{\partial G} U^{\nu_I}(x)\, d\beta\varepsilon_I(x) = U^{\nu_I}(y) - U^{\beta\nu_I}(y); \quad y \,\overline{\in}\, \partial G.$$

Кроме того, квази всюду на ∂G

$$U^{\nu}(y) = 0, \quad U^{\nu_I}(y) - U^{\beta\nu_I}(y) = 0,$$

так что

$$U^{\nu}(y) = U^{\nu_I}(y) - U^{\beta\nu_I}(y)$$

квази всюду в R. По теореме единственности $\nu = \nu_I - \beta\nu_I$, и теорема доказана.

Заметим, между прочим, что в силу достаточности условия (8) множества N и N_0 совпадают.

Теорема 3 дает возможность описать множество всех зарядов $\alpha\nu$ при фиксированном ν и установить одно достаточное условие единственности $\alpha\nu$.

Пусть ν' и ν'' два заряда, ассоциированные с ν. Тогда для любой функции $h(x) \in H_{\overline{G}}$

$$\int_{\overline{G}} h(x)\, d\nu(x) = \int_{\partial G} h(x)\, d\nu'(x) = \int_{\partial G} h(x)\, d\nu''(x),$$

откуда видно, что $\nu' - \nu'' \in N$. По теореме 3

$$\nu' = \nu'' + \nu_I - \beta\nu_I, \tag{10}$$

где ν_I — произвольный заряд, сосредоточенный на I.

Таким образом, если ν'' *какой-либо* заряд, ассоциированный с ν, то формула (10) дает *все* заряды $\alpha\nu$. Так как $\beta\nu_I \equiv 0$ на I, то легко видеть, что существует единственный заряд $\alpha\nu$, равный тождественно нулю на I. Если мы удержим обозначение $\alpha\nu$ именно за этим зарядом, то равенство

$$\alpha\nu \equiv \beta\nu \tag{5}$$

окажется установленным в случае произвольной, а не только регулярной области G.

Покажем теперь, как с помощью теоремы 3 получить простое доказательство следующей теоремы, принадлежащей М. В. Келдышу [10].

Теорема 4. *Пусть оператор A действует из $C_{\partial G}$ в пространство H_G гармонических и ограниченных внутри G функций. Предположим, что*

a) $A(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 A(f_1) + a_2 A(f_2)$; $f_1,\ f_2 \in C_{\partial G}$;

b) $A(f) \geqslant 0$, *если* $f(x) \geqslant 0$;

c) если $f \in H_{\partial G}$, то $A(f)$ есть решение задачи Дирихле с граничной функцией $f(x)$.

Тогда для любой $f \in C_{\partial G}$ $A(f)$ есть обобщенное решение задачи Дирихле с граничной функцией $f(x)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $y \in G$ и будем рассматривать значение $A_y(f)$ функции $A(f)$ в этой точке, как функционал в пространстве $C_{\partial G}$. В силу *a)* и *b)* имеем

$$A_y(f) = \int\limits_{\partial G} f(x)\, d\alpha_y(x),$$

где α_y некоторая *мера* на ∂G. С другой стороны, решение обобщенной задачи Дирихле $h_f(y)$ с граничной функцией $f(x)$ дается, как известно, формулой

$$h_f(y) = \int\limits_{\partial G} f(x)\, d\beta\varepsilon_y(x). \tag{11}$$

Поэтому из *c)* следует, что для $f(x) \in H_{\partial G}$

$$\int\limits_{\partial G} f(x)\, d\alpha_y(x) = \int\limits_{\partial G} f(x)\, d\beta\varepsilon_y(x),$$

т. е. заряд $\nu_y = \alpha_y - \beta\varepsilon_y \in N$.

Пусть теперь x_0 — произвольная регулярная точка ∂G. Теорема будет, очевидно, доказана, если мы убедимся в том, что при $y \to x_0$ $\alpha_y \to \varepsilon_{x_0}$. Так как $\alpha_y = \beta\varepsilon_y + \nu_y$ и $\beta\varepsilon_y \to \varepsilon_{x_0}$, то мы должны доказать, что $\nu_y \to 0$. Заметим, что $\nu_y(\partial G) = 0$ и $\alpha_y \geqslant 0$. Далее $\alpha_y(\partial G) \leqslant 1$, и по теореме о слабой компактности мер мы можем считать, что существует мера α_{x_0}, являющаяся слабым пределом мер α_y. Но тогда существует также слабый предел ν_{x_0} зарядов ν_y, причем $\nu_{x_0} = \alpha_{x_0} - \varepsilon_{x_0}$ и $\nu_{x_0}(\partial G) = 0$. Отсюда видно, что вне точки x_0 $\nu_{x_0} \geqslant 0$, и если $\nu_{x_0} \neq 0$, то $\nu_{x_0}(\{x_0\}) < 0$. Но это невозможно, ибо $\nu_{x_0} \in N$, и по теореме 3 имеет вид $\nu_I - \beta\nu_I$, который показывает, что точечной массы в регулярной точке x_0 быть не может. Теорема доказана.

§ 3. Единственность ассоциированной меры и аппроксимационная теорема

В некоторых случаях заряд $\alpha\nu$ можно охарактеризовать, не прибегая к множеству I иррегулярных точек ∂G. Будем предполагать, что граница ∂G приведенная, т. е. всякая ее порция имеет положительную емкость.

Теорема 5. *Пусть μ есть мера, причем $S(\mu)$ находится на положительном расстоянии от I (например, $S(\mu) \subset G$). Тогда $\alpha\mu$ характеризуется тем, что в классе всех зарядов ν, ассоциированных с μ*

$$\|\alpha\mu\| = \alpha\mu(\partial G) = \min_{\nu} |\nu|(\partial G).$$

Доказательство. Мы видели в § 2, что

$$\nu = \alpha\mu + \nu_I - \beta\nu_I. \tag{12}$$

Предположим, что

$$|\nu|(\partial G) \leqslant \alpha\mu(\partial G),$$

и покажем, что в этом случае $\nu \equiv \alpha\mu$, т. е. $\nu_I \equiv 0$. Имеем

$$|\nu|(\partial G) = |\alpha\mu - \beta\nu_I|(\partial G) + |\nu_I|(\partial G) \geqslant |\alpha\mu - \beta\nu_I|(\partial G) + |\beta\nu_I|(\partial G).$$

Следовательно,

$$|\alpha\mu - \beta\nu_I|(\partial G) + |\beta\nu_I|(\partial G) \leqslant \alpha\mu(\partial G).$$

С другой стороны, неравенство треугольника дает

$$|\alpha\mu - \beta\nu_I|(\partial G) + |\beta\nu_I|(\partial G) \geqslant \alpha\mu(\partial G),$$

так что

$$\alpha\mu(\partial G) = |\alpha\mu - \beta\nu_I|(\partial G) + |\beta\nu_I|(\partial G).$$

Так как $\alpha\mu \geqslant 0$, то такое равенство возможно лишь в том случае, если

$$\beta\nu_I \geqslant 0, \quad \alpha\mu - \beta\nu_I \geqslant 0.$$

Из последнего неравенства следует, что всюду

$$U^{\alpha\mu}(x) - U^{\beta\nu_I}(x) \geqslant 0.$$

Но потенциал $U^{\alpha\mu}$ ограничен в окрестности I, в то время как потенциал $U^{\beta\nu_I}$ меры $\beta\nu_I$ не может быть таковым в окрестности I, если $\beta\nu_I \not\equiv 0$. Следовательно, $\nu_I \equiv 0$, и $\nu \equiv \alpha\mu$.

Теорема 6. *В условиях предыдущей теоремы $\alpha\mu$ является единственной мерой в классе всех зарядов ν, ассоциированных с μ.*

Доказательство. Если в формуле (12) ν является мерой, то мерой будет также ν_I и $\alpha\mu - \beta\nu_I$. Но если $\nu_I \not\equiv 0$, то это невозможно, ибо потенциал

$$U^{\alpha\mu - \beta\nu_I} = U^{\alpha\mu} - U^{\beta\nu_I}$$

принимает вблизи некоторых точек I отрицательные значения.

Эта теорема приводит к следующему результату.

Теорема 7. *Пусть $h_f(x)$ обозначает решение обобщенной задачи Дирихле с граничной функцией f. Существует последовательность функций $h_n(x) \in H_{\bar G}$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h_f(x)$$

равномерно на каждом компакте из G.

Доказательство. Согласно (11)

$$h_f(x) = \int\limits_{\partial G} f(y)\, d\beta\varepsilon_x(y).$$

В силу (5) $\beta\varepsilon_x$ является ассоциированной мерой для ε_x и получается позитивным продолжением на все $C_{\partial G}$ линейного функционала $\varepsilon_x(h) = h(x)$, определенного на подпространстве $H_{\partial G}$. Согласно теореме 6, других позитивных продолжений этого функционала не существует. Вспоминая конструкцию такого продолжения (см. [11]), приходим к заключению, что для любой $f \in C_{\partial G}$

$$\beta\varepsilon_x(f) = \sup_{h \leqslant f} \varepsilon_x(h) = \inf_{h \geqslant f} \varepsilon_x(h),$$

где $h \in H_{\partial G}$. Следовательно, существует последовательность функций $h_n \in H_{\bar{G}}$ такая, что $h_n(y) \geqslant f(y)$, $y \in \partial G$, и

$$\beta\varepsilon_x(f) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_x(h_n).$$

Но $\varepsilon_x(h_n) = h_n(x)$, а $\beta\varepsilon_x(f) = h_f(x)$ Кроме того, неравенство $h_n \geqslant f$, выполненное на ∂G, влечет, согласно обобщенному принципу максимума, неравенство $h_n(y) \geqslant h_f(y)$ всюду в G.

Итак, последовательность неотрицательных гармонических функций $h_n(y) - h_f(y)$ стремится к нулю в точке x. По теореме Гарнака она будет стремиться к нулю равномерно на всяком компакте $K \subset G$. Теорема доказана.

§ 4. Оператор выметания

Пусть $K \subset R$ произвольный компакт. Известно (см. [9]), что любой заряд ν можно заменить зарядом ν', $S(\nu') \subset K$, так, чтобы $\nu' \equiv 0$ на I. и квази всюду на K

$$U^{\nu'}(x) = U^{\nu}(x).$$

Как и в § 1, будем обозначать $\nu' = \beta\nu$ и будем рассматривать β, как оператор, действующий в пространстве всех вполне конечных зарядов ν *.

Этот оператор линеен и ограничен, ибо $\|\beta\nu\| \leqslant \|\nu\|$.

Заряд $\beta\nu$ будет ассоциирован с ν в том смысле, что

$$\int\limits_{\partial K} h(x)\, d\beta\nu(x) = \int\limits_{\overline{CK}} h(x)\, d\nu(x) \tag{13}$$

для любой функции $h(x)$ непрерывной в $\overline{CK}$ и гармонической в каждой связной компоненте CK.

Предыдущие результаты, полученные для компакта ∂G, легко переносятся на случай любого компакта.

Обозначим теперь β_0 сужение оператора β на множестве M_0 зарядов, равных нулю на множестве I иррегулярных точек K.

Лемма. *Оператор β_0 слабо непрерывен.*

Доказательство. Достаточно проверить это свойство на мерах. Пусть $\mu_n \to \mu$, причем μ_n, $\mu \in M_0$.

Множество $\{\beta_0\mu_n\}$ слабо компактно. Пусть λ слабый предел какой-либо подпоследовательности $\{\beta_0\mu_{n_i}\}$. Тогда $\lambda \in M_0$.

---

* Т. е. зарядов ν, для которых $\|\nu\| = |\nu|(R) < \infty$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно установить, что для любс замкнутого множества $F \subset I$ $\lambda(F) = 0$. Для этого, в свою очередь, дос точно проверить, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется открытая в ∂G окре ность V множества F, такая, что $\beta_0 \mu_{n_i}(V) < \varepsilon$ при $i > i_0(V)$.

Будем обозначать Ω_δ множество точек $\overline{G}$, расстояние которых до меньше δ, а V_δ — пересечение Ω_δ с ∂G. В дальнейшем можно считать нормальным относительно μ множеством, т. е. предполагать, что μ-м границы Ω_δ есть нуль. Имеется только счетное множество значений не удовлетворяющих этому условию, и мы их с самого начала исключи Тогда

$$\mu(\Omega_\delta) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(\Omega_\delta).$$

Так как $\mu(F) = 0$, то Ω_δ можно взять так, чтобы

$$\mu_n(\Omega_\delta) < \varepsilon \text{ при } n > n_0(\Omega_\delta).$$

Возьмем $\delta_1 < \delta$ и оценим величину $\beta_0 \mu_{n_i}(V_{\delta_1})$. Согласно сказанному в §

$$\beta_0 \mu_{n_i}(V_{\delta_1}) = \int \beta \varepsilon_x(V_{\delta_1})\, d\mu_{n_i}(x).$$

Так как $\mu_{n_i} \in M_0$, то при интегрировании можно исключить точки I написать

$$\beta_0 \mu_{n_i}(V_{\delta_1}) = \int_{\Omega_\delta} \beta_0 \varepsilon_x(V_{\delta_1})\, d\mu_{n_i}(x) + \int_{\overline{G} \setminus \Omega_\delta} \beta_0 \varepsilon_x(V_{\delta_1})\, d\mu_{n_i}(x).$$

Но $\beta_0 \varepsilon_x(V_{\delta_1}) \leqslant 1$, и поэтому

$$\int_{\Omega_\delta} \beta_0 \varepsilon_x(V_{\delta_1})\, d\mu_{n_i}(x) \leqslant \mu_{n_i}(\Omega_\delta) < \varepsilon$$

при $i > i_0(\Omega_\delta)$.

С другой стороны, так как расстояние от любой точки $x \in \overline{G} \setminus \Omega$ до V_{δ_1} превосходит $\delta - \delta_1 > 0$, а емкость V_{δ_1} при достаточно малом δ сколь угодно мала, то можно δ_1 выбрать так, чтобы при $x \in \overline{G} \setminus \Omega$

$$\beta_0 \varepsilon_x(V_{\delta_1}) < \varepsilon.$$

Тогда

$$\int_{\overline{G} \setminus \Omega_\delta} \beta_0 \varepsilon_x(V_{\delta_1})\, d\mu_{n_i}(x) < \varepsilon \mu_{n_i}(\overline{G}).$$

Но меры μ_n ограничены, так что $\mu_{n_i}(\overline{G}) < B$, и

$$\beta_0 \mu_{n_i}(V_{\delta_1}) < \varepsilon(1 + B)$$

при $i > i_0(\delta_1)$. Этим доказано, что $\lambda \in M_0$.

В силу (13)

$$\int_{\partial K} h(x)\, d\beta_0 \mu_{n_i}(x) = \int_{\overline{CK}} h(x)\, d\mu_{n_i}(x),$$

и после предельного перехода

$$\int_{\partial K} h(x)\, d\lambda(x) = \int_{\overline{CK}} h(x)\, d\mu(x).$$

Это показывает, что λ является мерой, ассоциированной с μ, а так как $\lambda(I)=0$, то она единственна и совпадает с $\beta_0\mu$. Итак, $\beta_0\mu_n \to \beta_0\mu$, и лемма доказана.

Вернемся теперь к области G, обозначим β_0^G — сужение β_0 на заряды с носителем в $\overline{G}$ и установим связь между β_0^G и оператором A из теоремы 4. Для того, чтобы ее обнаружить, обозначим D_G — область значений оператора A, т. е. множество всех обобщенных решений h_f задачи Дирихле для области G. Тогда $H_{\overline{G}} \subset D_G \subset H_G$, и D_G превращается в банахово пространство, если положить

$$\|h_f\| = \|f\|_{C_{\partial G}}.$$

Оператор A устанавливает изометрическое соответствие между $C_{\partial G}$ и D_G.

Сопряженный оператор A^*, отображающий D_G^* на $C_{\partial G}^*$, определяется, как известно, равенством

$$A^*T(f) = T(Af) = T(h_f),$$

справедливым для всех $f \in C_{\partial G}$, $T \in D_G^*$.

Теорема 8. A^* *является расширением* β_0^G.

Доказательство. Из обобщенного принципа максимума следует, что D_G^* содержит все заряды, принадлежащие $\overline{G}$. Далее

$$h_f(y) = \int\limits_{\partial G} f(x)\, d\beta_0^G \varepsilon_y(x), \quad y \in \overline{G} \setminus I.$$

Если $\nu \equiv 0$ на I, то

$$\nu(h_f) = \int\limits_{\overline{G}} h_f(y)\, d\nu(y) = \int\limits_{\partial G} f(x)\, d\nu'(x),$$

где

$$\nu'(e) = \int\limits_{S(\nu)} \beta_0^G \varepsilon_y(e)\, d\nu(y) = \beta_0^G \nu(e).$$

Таким образом,

$$\beta_0^G \nu(f) = \nu(h_f), \quad f \in C_{\partial G},$$

что и требовалось доказать.

Заметим теперь, что если

$$\|h_n - h\| \to 0, \quad h_n, h \in D_G,$$

то при любом p $\partial^p h_n \to \partial^p h$ (∂^p — любой оператор дифференцирования порядка p) равномерно на всяком компакте в G. Поэтому всякой обобщенной функции T с носителем внутри G однозначно соответствует элемент D_G^*. Согласно предыдущему A^*T есть некоторый заряд $\nu \in C_{\partial G}^*$. При этом, для любой точки $z \in \overline{G}$

$$U^\nu(z) = \nu\left(\frac{1}{|z-x|}\right) = T\left(\frac{1}{|z-x|}\right) = U^T(z),$$

ибо $h(x) = \frac{1}{|z-x|} \in H_{\overline{G}}$. Это равенство имеет место также в регулярных точках ∂G. Для доказательства возьмем область G_1, $\overline{G}_1 \subset G$, содержащую носитель T. Если A_1 — оператор обобщенного решения задачи Дирихле в G_1, то $A_1^*T = \nu_1 \in C_{\partial G}^*$. Если теперь произвести выметание ν_1 на ∂G положить $\nu = \beta_0^G \nu_1$, то нетрудно видеть, что $\nu = A^*T$. В самом деле, как $\nu_1 \in D_G^*$, то для любой $f \in C_{\partial G}$ будем иметь

$$\nu(f) = \int\limits_{\partial G} f(x)\, d\nu(x) = \int\limits_{\partial G_1} h_j(x)\, d\nu_1(x) =$$
$$= A_1^* T(h_j) = T(A_1 h_j) = T(h_j).$$

Итак, доказана

Теорема 9. *Пусть носитель обобщенной функции T содержится внутри G. Тогда на ∂G существует заряд ν, потенциал которого совпадает с потенциалом T во всех точках CG, кроме, возможно, иррегулярных точек ∂G. Заряд ν определяется однозначно, если потребовать еще, чтобы $\nu \equiv 0$ на множестве I.*

В заключение рассмотрим одно свойство семейства операторов $\{\beta_K\}$. Здесь K — произвольный компакт R, а β_K — оператор выметания на K. Однако, в отличие от предыдущего, мы будем считать, что β_K не изменяет зарядов на K.

Теорема 10. *Пусть $\{K_\alpha\}$ базис компактов в R. Тогда все операторы β_K могут быть определены по $\{\beta_{K_\alpha}\}$ с помощью следующих формул:*

$$(i)\ \beta_{K_1 \cap K_2} = \lim_{n\to\infty} (\beta_{K_1}\beta_{K_2})^n = \lim_{n\to\infty} (\beta_{K_2}\beta_{K_1})^n,$$

$$(ii)\ \beta_K = \lim_{n\to\infty} \beta_{K_n}; \quad K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n, \quad K_n \supset K_{n+1}.$$

В обеих формулах речь идет о слабой сходимости операторов, т. е. $\beta = \lim\limits_n \beta_n$ обозначает, что для любого финитного заряда ν справедливо $\beta_n \nu \to \beta\nu$.

Доказательство. То, что формулы (i), (ii) определяют β_K для любого K, следует из того, что представление $K = \bigcap K_i$ можно всегда заменить таким:

$$K = \bigcap K_i', \quad K_i' = \bigcap_{j=1}^{i} K_j \supset K_{i+1}'.$$

Установим формулу (i), являющуюся по существу краткой формой записи альтернирующего процесса. Так как все операторы, входящие в (i), действуют на заряд, сосредоточенный на $K_1 \cap K_2$, как тождественный оператор, то мы можем рассматривать только заряды (или даже меры), равные нулю на $K_1 \cap K_2$. Такую меру μ можно представить в форме $\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i$, где $U^{\mu_i}(x)$ ограничен на $K_1 \cap K_2$ *. Поэтому достаточно проверить (i) только для мер, сосредоточенных вне $K_1 \cap K_2$ и имеющих ограниченный потенциал на $K_1 \cap K_2$. Если μ такая мера, то $\beta_{K_1 \cap K_2}\mu = \mu'$ однозначно определяется двумя условиями: $S(\mu') \subset K_1 \cap K_2$ и $U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x)$ квази всюду на $K_1 \cap K_2$. Положим

$$\mu_n = (\beta_{K_1}\beta_{K_2})^n \mu.$$

* Достаточно, например, в качестве μ_i взять часть μ на множестве точек R, для которых расстояние до $K_1 \cap K_2$ лежит в полуинтервале $\left[\frac{1}{i}, \frac{1}{i-1}\right)$.

Так как всюду

$$U^{\mu_n}(x) \leqslant U^{\mu_{n-1}}(x),$$

то (см. [12]) $\mu_n \to \mu_0$, и квази всюду

$$U^{\mu_0}(x) = \lim_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x). \tag{14}$$

Покажем, что $S(\mu_0) \subset K_1 \cap K_2$. В силу ограниченности потенциалов все меры μ_n, μ_0 равны нулю на множестве иррегулярных точек, и согласно лемме оператор $\beta_{K_1}\beta_{K_2}$ будет слабо непрерывен на них. Следовательно, из

$$\mu_{n+1} = (\beta_{K_1}\beta_{K_2})\,\mu_n$$

следует при $n \to \infty$

$$\mu_0 = (\beta_{K_1}\beta_{K_2})\,\mu_0,$$

а это возможно только в том случае, если

$$S(\mu_0) \subset K_1 \cap K_2.$$

С другой стороны, так как при любом n равенство

$$U^{\mu}(x) = U^{\mu_n}(x)$$

имеет место квази всюду на $K_1 \cap K_2$, то в силу (14)

$$U^{\mu}(x) = U^{\mu_0}(x)$$

квази всюду на $K_1 \cap K_2$.

Следовательно,

$$\mu_0 = \lim_{n\to\infty} (\beta_{K_1}\beta_{K_2})^n \mu = \mu' = \beta_{K_1 \cap K_2}\mu,$$

и (i) доказано.

Формула (ii) легко доказывается, если заметить, что потенциалы U^{μ_n} мер $\mu_n = \beta_{K_n}\mu$ образуют невозрастающую последовательность и применить (14). Кроме того, существенно, что мы согласились считать все операторы β_K не изменяющими зарядов на K.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Deny. Systèmes totaux de fonctions harmoniques. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 1, 1950, 103—112.
2. O. Frostman. Sur le balayage des masses. Acta Szeged, 9, 1938.
3. O. Frostman. Les points irréguliers dans la théorie du potentiel et le critère de Wiener. Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem., 4, 1939.
4. Н. Ландкоф. О структуре множества иррегулярных точек в задаче Дирихле. «Докл. АН СССР», 28, № 4, 1940, 291—293.
5. М. В. Келдыш. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. «Усп. матем. наук», старая серия, вып. VIII, 1941.
6. М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства. Изд-во иностр. лит., М., 1961.
7. С. Банах. Курс функціонального аналізу. Вид-во «Радянська школа», Київ, 1948.
8. M. Brelot, G. Choquet. Le théorème de convergence en théorie du potentiel. J. Madras Univ. 1957, B 27, № 1, 277—286.
9. M. Riesz. Integrales de Riemann — Liouville et potentiels. Acta Szeged, 9, 1938.
10. М. В. Келдыш. О задаче Дирихле. «Докл. АН СССР», 32, № 5, 1941.
11. М. Г. Крейн. О позитивных функционалах в линейных нормированных пространствах. (Сб. Н. Ахиезер и М. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, 1938).
12. H. Cartan. Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels. Bull. Soc. Math. France, 73, 1945, 74—106.