ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЕ ВИНЕРОВСКОГО ТИПА

В. П. Гурарий

Хорошо известная аппроксимационная теорема Винера о полноте системы сдвигов функций $\{f(x+h)\}$ из $L(-\infty, \infty)$ впоследствии была обобщена на пространства $L_\varphi(-\infty, \infty)$, норма в которых определяется формулой

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\varphi(x)\,dx.$$

Берлингу [1] принадлежит такое обобщение для случая, когда вес удовлетворяет условиям

$$\varphi(x) > 1, \quad \varphi(x+y) \leqslant \varphi(x)\,\varphi(y)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{1+x^2}\,dx < \infty.$$

Б. И. Коренблюм [2] полностью исследовал вопрос о полноте сдвигов, когда

$$\varphi(x) = \exp\{\alpha|x|\}, \; \alpha > 0.$$

Следует отметить, что во всех случаях, рассмотренных ранее, сама постановка вопроса о полноте сдвигов и его исследование существенно опирались на кольцевую природу пространств L_φ.

В настоящей работе делается попытка распространить теорему Винера на пространства $L_\varphi(-\infty, \infty)$, которые не являются кольцом относительно операции свертывания. В этих пространствах, как мы увидим, операция сдвига без вывода функции из пространства допустима не для всех функций. Но самое главное отличие от кольцевых пространств состоит в том, что резко сужается множество функций, сдвигами которых можно аппроксимировать любую функцию из этого пространства. Поэтому, строго говоря, в этой работе речь будет идти не о теореме Винера, а о некотором аналоге теоремы Винера, — о полноте специальной системы функций, которая устанавливается методом, не имеющим ничего общего с методами, используемыми при доказательстве теоремы Винера в кольцевом пространстве.

Будем рассматривать банахово пространство функций с нормой

$$\|f(x)\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,e^{|x|^p+\alpha|x|}\,dx, \;(\alpha > 0, \; p > 1).$$

Обозначим это пространство $L_\alpha^{[p]}(-\infty, \infty)$. Если $f(x) \in L_\alpha^{[p]}$, то функции вида $f(x-t)$ при некоторых t могут не принадлежать пространству $L_\alpha^{[p]}$. Например, $f(x) = e^{-x^2-2|x|} \in L_1^{[2]}$, но функции вида $f(x-t)$ при $|t| > 1/2$ не принадлежат $L_1^{[2]}$. Уже этот факт показывает, что пространство $L_\alpha^{[p]}$ не является кольцом относительно операции свертывания. Но даже если предполагать, что $f(x-t) \in L_\alpha^{[p]}$ при любом t, то отсюда еще не следует, что функция вида

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) f(t)\, dt$$

принадлежит этому пространству.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in L_\alpha^{[p]}$. *Для того, чтобы функции вида* $f(x-t)$ *при всех* t *также принадлежали* $L_\alpha^{[p]}$, *а последовательность конечных линейных комбинаций вида*

$$\sum_k c_k f(x-t_k) \qquad (-\infty < t_k < \infty)$$

образовала плотное множество в $L_\alpha^{[p]}$, *необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье функции* $f(x)$, *которое, очевидно, является целой функцией, было отлично от нуля во всей комплексной плоскости.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые свойства преобразований Фурье функций из $L_\alpha^{[p]}$.

1. Преобразование Фурье функции $f(x) \in L_\alpha^{[p]}$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itz} dt$$

можно оценить во всей комплексной плоскости следующим образом:

$$|F(z)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-ty} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{|t|^p + \beta|y|^q} dt \leqslant \|f\| e^{\beta|y|^q},$$

где

$$\beta = 1/qp^{q-1}, \quad 1/p + 1/q = 1, \quad z = x + iy.$$

Таким образом, $F(z)$ — целая функция конечного порядка $q = \frac{p}{p-1}$.

Если функция $F(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке комплексной плоскости, то она обязательно имеет вид

$$F(z) = \exp\{P(z)\},$$

где $P(z)$ — многочлен.

Покажем, что $P(z)$ — многочлен четной степени $2n$ с отрицательной вещественной частью у коэффициента при старшей степени. Действительно, если бы это было не так, то можно было бы подобрать такое число y, чтобы $F(x+iy)$ не стремилось к нулю при $|x| \to \infty$.

С другой стороны, $F(x+iy)$, как преобразование Фурье функции $f(t) e^{-yt} \in L$ обязано стремиться к нулю при $|x| \to \infty$.

Итак, $F(z)$ имеет следующий вид

$$F(z) = \exp\{-a_0 z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + \ldots + a_{2n}\}, \quad \operatorname{Re} a_0 > 0.$$

2. Пусть преобразование Фурье функции $f(x) \in L_\alpha^{[p]}$ нигде в комплексной плоскости не обращается в нуль, так что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, e^{-ixz} dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{P_{2n}(z)-ixz} dz, \tag{1}$$

где

$$P_{2n}(z) = -a_0 z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + \ldots + a_{2n}.$$

Применим к обеим частям равенства (1) операцию

$$P'_{2n}(iD), \quad \left(P'_{2n}(z) = \frac{d}{dz} P_{2n}(z)\right)$$

и правую часть полученного выражения проинтегрируем по частям:

$$-2na_0 i^{2n-1} f^{(2n-1)}(x) + \ldots + a_{2n-1} f(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[P_{2n}(z) - ixz\right] P'_{2n}(z)\, dz =$$

$$= \frac{ix}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[P_{2n}(z) - ixz\right] dz = ixf(x).$$

В результате получается, что $f(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$y^{(2n-1)}(x) + c_1 y^{(2n-2)}(x) + \cdots + c_{2n-1} y(x) = \frac{(-1)^n x}{2na_0} y(x), \tag{2}$$

где c_k явным образом связаны с a_k.

3. Используя тот факт, что функция $f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2), найдем ее асимптотику при $|x| \to \infty$. Для этого воспользуемся следующей теоремой, см. [3].

Пусть имеется система уравнений

$$\frac{dz}{dt} = [A + \varphi(t) + B(t)]\, z, \tag{3}$$

где A — постоянная матрица с простыми характеристическими числами, $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и

$$\int^{\infty} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt < \infty,$$

а B — удовлетворяет условию

$$\int^{\infty} \| B \|\, dt < \infty,$$

где норма A определяется как $\sum\limits_{i,k} |a_{ik}|$.

Если имеет место, по крайней мере, одно из двух неравенств

$$\int_{t_1}^{t} \operatorname{Re}\left[\lambda_i(t) - \lambda_k(t)\right] dt > -c \quad (t > t_1)$$

или

$$\int\limits_{t_1}^{t} \operatorname{Re}\left[\lambda_i(t) - \lambda_k(t)\right] dt < c \quad (t > t_1),$$

где c — положительная постоянная, не зависящая от t и t_1, а $\lambda_k(t)$ — характеристические числа матрицы $A + \varphi(t)$, то существует n линейно независимых решений уравнения (3), таких, что при $|t| \to \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы

$$z_k(t) = \left[\exp \int\limits_{t_1}^{t} \lambda_k(t)\, dt\right] [c_k + o(1)], \tag{4}$$

c_k — постоянный ненулевой вектор.

С помощью замен $t = x^{2n/2n-1}$, $y_1 = y(t)$, $y_2 = y'(t)$, ..., $y_{2n-1} = y^{(2n-2)}(t)$ наше уравнение приводится к системе вида (3), после чего, как легко проверить, мы оказываемся в условиях применимости предыдущей теоремы.

Считая с помощью формул (4) асимптотику, а также используя тот факт, что функция $y = f(-x)$ удовлетворяет уравнению

$$y^{(2n-1)}(x) - c_1 y^{(2n-2)}(x) + \cdots - c_{2n-1} y(x) = \frac{(-1)^n x}{2na_0} y(x),$$

получим следующую асимптотику для функции $y = f(x)$ — единственного решения уравнения (2), принадлежащего $L(-\infty, -\infty)$ и ее производных $f^{(k)}(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, 2n-2)$.

$$f^{(k)}(x) = [\exp(-\beta_0 x^{\frac{2n}{2n-1}} + \beta_1 x + \cdots + \beta_{2n-1} x^{\frac{1}{2n-1}})]\, x^{\frac{k-\overline{n-1}}{2n-1}} [c_k + o(1)], \tag{5}$$

где $c_k \neq 0$, $\operatorname{Re}\beta_0 > 0$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-2$, β_k зависят только от a_0, $c_1, \ldots, c_k$

$$\beta_k = \beta_k(a_0, c_1, \ldots, c_k), \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1). \tag{6}$$

Заметим, что мы могли бы найти асимптотический ряд для функции $f(x)$. Для этого нужно было бы, воспользовавшись методикой, разработанной в [4], привести уравнение (2) к L — диагональной системе*.

4. Заметим, что функция $f(x-t)$ удовлетворяет при фиксированном t тому же дифференциальному уравнению (2), но с измененным коэффициентом c_{2n-1}, равным $c_{2n-1} + (-1)^n \frac{t}{2na_0}$. Поэтому, для функций $f^{(k)}(x-t)$, $k = 0, 1, \ldots$ справедлива, в силу (5) и (6), асимптотическая формула

$$f^{(k)}(x-t) = [\exp(-\beta_0 x^{\frac{2n}{2n-1}} + \\ + \beta_1 x + \cdots + \beta_{2n-1}(t)\, x^{\frac{1}{2n-1}})]\, x^{\frac{k-\overline{n-1}}{2n-1}} [c_k(t) + o(1)].$$

* После того, как работа была выполнена, мне стала известна статья [5], посвященная нахождению асимптотического ряда для функции

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{P_{2n}(z)+xz} dz.$$

В дальнейшем мы используем лишь оценку

$$f^{(k)}(x-t)=[\exp(-\beta_0 x^{\frac{2n}{2n-1}}+\beta_1 x)]\,\psi(x,t),$$

$$|\psi(x,t)|<C\exp(\gamma x^{\frac{2n-2}{2n-1}}),\ \gamma>0.$$

В силу принадлежности функции $f(x)$ пространству $L_\alpha^{[p]}$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta_0 x^{\frac{2n}{2n-1}}+\beta_1 x}\,|\psi(x,0)|\,e^{|x|^p+\alpha|x|}dx.$$

Поэтому, либо $\frac{2n}{2n-1}>p$, либо $\frac{2n}{2n-1}=p$, но $\operatorname{Re}\beta_0>1$. Тогда немедленно получается, что существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f^{(k)}(x-t)|\,e^{|x|^p+\alpha|x|}dx,\quad(-\infty<t<\infty),\ (k=0,1,\ldots),$$

т. е. вместе с функцией $f(x)$ пространству $L_\alpha^{[p]}$ принадлежат также функции вида $f^{(k)}(x-t)$, $(-\infty<t<\infty)$, $(k=0,1,\ldots)$.

Теперь мы имеем возможность доказать теорему 1. Известно, что полнота системы функций эквивалентна отсутствию нетривиального ортогонального к этой системе функций функционала. Линейный функционал в $L_\alpha^{[p]}$ задается формулой

$$G(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,g(x)\,dx,$$

где $g(x)$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\|g\|=\operatorname{vraimax}|g(x)|\,e^{-|x|^p-\alpha|x|}<\infty.$$

Пространство функций, сопряженное пространству $L_\alpha^{[p]}$, обозначим $M_\alpha^{[p]}$.

Итак, полнота системы сдвигов функции $f(x)$ эквивалентна следующему факту: из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\,g(x)\,dx=0,\ (-\infty<t<\infty),\ \ g(x)\in M_\alpha^{[p]}\tag{7}$$

следует, что $g(x)=0$ почти всюду.

Доказательство необходимости тривиально. Действительно, если преобразование Фурье функции $f(x)$ обращается в 0 в некоторой точке z_0, то при всех вещественных t

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\,e^{-ixz_0}\,dx=0$$

и (7) выполняется с функцией $g(x)=e^{-ixz_0}$.

Докажем достаточность Пусть преобразование Фурье функции $f(x)$ не обращается в 0 ни в одной точке комплексной плоскости. Тогда, как уже известно, $f^{(k)}(x-t)\in L_\alpha^{[p]}$.

Нам нужно доказать, что из равенства (7) следует, что $g(x)=0$ почти всюду.

Для этого применим к обеим частям равенства (7) дифференциальный оператор, стоящий в левой части уравнения (2). Будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)(x-t)\,g(x)\,dx = 0$$

и, значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,xg(x)\,dx = 0.$$

Применяя последовательно n раз эту операцию, мы получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,x^n\,g(x)\,dx = 0, \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

В частности, при $t = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,x^n\,dx = 0, \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{8}$$

Введем функцию

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,e^{ixz}\,dx,$$

$\Phi(z)$ — целая функция, так как

$$|f(x)\,g(x)| < e^{-\gamma|x|^p}, \quad (\gamma > 0).$$

Равенства (8) означают, что $\Phi^{(n)}(0) = 0$, $(n = 0, 1, \ldots)$, а, значит, $\Phi(z) \equiv 0$. Таким образом, $f(x)\,g(x) = 0$ почти всюду, а так как $f(x)$ — целая функция, то $g(x) = 0$ почти всюду.

Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно показать, что если преобразование Фурье функции $f(x) \in L_\alpha^{[p]}$ обращается в нуль в точках z_k комплексной плоскости и n_k — порядок кратности корня z_k, то из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(x)\,dx = 0, \quad g(x) \in M_\alpha^{[p]}, \quad (-\infty < t < \infty),$$

следует, что

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} P_{n_k}(x)\,e^{iz_k x}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Beurling. Sur les integrales de Fourier absolument convergentes et leur application a une transformation fonctionelle, Congres des Math. a Helsingfors, 1938.
2. Б. И. Коренблюм. Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстро растущих функций. «Труды Московск. матем. об-ва», 7, 1958.
3. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Изд-во иностр. лит., 1954.
4. И. М. Раппопорт. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд-во АН УССР, Киев, 1954.
5. Marić V. On a class of Fourier integrals, Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 13 (1959).