О РОСТЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПО ЛУЧУ

А. А. Гольдберг

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ, $T(r)$ — ее неванлинновская характеристика:

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

В настоящей статье сравнивается рост $\overset{+}{\ln}|f(re^{i\varphi})|$ при фиксированном φ с ростом $T(r)$. Введем еще такие обозначения:

$$\mu(r, f) = \min_{0 \leqslant \varphi < 2\pi} |f(re^{i\varphi})|,$$

$$M(r, f) = \max_{0 \leqslant \varphi < 2\pi} |f(re^{i\varphi})|.$$

Не уменьшая общности, мы будем считать, что фиксирован луч $\varphi = 0$, т. е. положительная вещественная полуось. Оказывается, имеют место следующие неравенства, которые невозможно улучшить:

$$\infty \geqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}|f(r)|}{T(r)} \geqslant \begin{cases} \pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho, & 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0, & \rho > \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

$$0 \leqslant \liminf_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln}|f(r)|}{T(r)} \leqslant \begin{cases} \pi\rho \operatorname{cosec} \pi\rho, & 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}, \\ \pi\rho, & \rho > \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Оценки в (1) и (2) слева и в (1) справа при $\rho > \frac{1}{2}$ тривиальны, оценки при $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}$ справа в (1) и (2) являются непосредственными следствиями результатов Ж. Валирона [1]. *Целью настоящей статьи является доказательство правой части (2) при* $\rho > \frac{1}{2}$. Чтобы показать, что во всех неравенствах (1) и (2) для некоторых целых функций порядка ρ может достигаться равенство, достаточно указать на следующие хорошо известные примеры целых функций.

А. Для функции

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z a_n^{-1}),$$

где $a_n = n^{\frac{1}{\rho}}$ при $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$ и $a_n = e^n$ при $\rho = 0$, достигается равенство в правой части (1) при $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}$, а для $F(-z)$ достигается равенство в правой части (2) при $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}$ (асимптотику $F(z)$ см., например, в [2]).

Б. Для функции Миттаг — Леффлера

$$E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)}, \quad \frac{1}{2} < \rho < \infty,$$

достигается равенство в правой части (2) при $\frac{1}{2} < \rho < \infty$ (асимптотику $E_\rho(z)$ см., например, в [3], стр. 39), для $E_\rho(-z)$ достигается равенство в правой части (1) при $\frac{1}{2} < \rho < \infty$.

В. Для функции $f(z) = \exp(e^z)$ справедливо $\ln|f(r)| = e^r$, $T(r) \sim \sim \pi^{-\frac{3}{2}}(2r)^{-\frac{1}{2}}e^r$ и в правой части (2) достигается равенство при $\rho = \infty$, а для $\exp(e^{-z})$ достигается равенство в правой части (1) при $\rho = \infty$ (при оценке $T(r)$ мы использовали лемму 3 из [4]).

Г. Для целой функции любого порядка с бесконечным числом положительных нулей в левой части (2) достигается равенство.

Д. Значительные трудности были преодолены Пэйли [5] для построения примеров целых функций любого порядка, для которых в левой части (1) достигается равенство.

Заметим, что (1) остается в силе, если в этом неравенстве $|f(r)|$ заменить на $\mu(r, f)$ и слева вместо ∞ поставить 1 (это следует из [1] и простых дополнительных соображений). Пэйли [5] выдвинул гипотезу о том, что имеет место неравенство более сильное, чем (2), а именно:

$$1 \leqslant \liminf_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln} M(r, f)}{T(r)} \leqslant \begin{cases} \pi\rho \operatorname{cosec} \pi\rho, & 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}, \\ \pi\rho, & \rho > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь левая часть неравенства (3) тривиальна, правая часть (3) доказана при $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}$ (см. [1]), а при $\rho > \frac{1}{2}$ вопрос до сих пор остается открытым. Если дополнительно предположить, что при некотором φ_0 справедливо $\ln|f(re^{i\varphi_0})| \sim \ln M(r, f)$, то из (2) следует справедливость гипотезы Пэйли при $\rho > \frac{1}{2}$ и, как частный случай, один результат И. В. Островского ([6], стр. 31).

Отметим еще следующий результат, связанный с рассматриваемой в нашей статье темой. Имеет место следующая оценка, которая не может быть улучшена:

$$1 \geqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(r)|}{\ln M(r, f)} \geqslant \begin{cases} \cos \pi\rho, & 0 \leqslant \rho < 1, \\ -1, & \rho \geqslant 1. \end{cases} \tag{4}$$

Оценка слева тривиальна. Оценка справа в (4) при $0 \leqslant \rho < 1$ (причем здесь можно даже заменить $\ln|f(r)|$ на $\ln \mu(r, f)$) составляет известную теорему А. Вимана ([2], стр. 98). Оценка справа в (4) при $\rho \geqslant 1$ доказана А. Бейрлингом [7], однако здесь нельзя заменить $\ln|f(r)|$ на $\ln \mu(r, f)$, как показал У. Хейман [8].

Итак, мы должны доказать, что для всякой целой функции порядка $\frac{1}{2} < \rho < \infty$

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\ln} |f(r)|}{T(r)} \leqslant \pi\rho. \tag{5}$$

Чтобы сделать более ясной простую идею доказательства, предположим сначала дополнительно, что функция $f(z)$ принадлежит классу расходимости порядка $\rho > \frac{1}{2}$. Для таких функций А. Рок [9], опираясь на результаты Ж. Валирона [10], доказал справедливость следующего соотношения *:

$$\limsup_{\sigma\to 0+} \frac{\int\limits_1^\infty \overset{+}{\ln} |f(r)| \frac{dr}{r^{\rho+\sigma+1}}}{\int\limits_1^\infty T(r) \frac{dr}{r^{\rho+\sigma+1}}} \leqslant \pi\rho. \tag{6}$$

Чтобы вывести из (6) искомое неравенство (5), докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функции $h(r)$ и $g(r)$ непрерывны при $a \leqslant r < \infty$, $g(r) > 0$ при $a \leqslant r < \infty$. Пусть $K(\sigma, r) \geqslant 0$ непрерывна при $0 \leqslant \sigma < \delta$ и $a \leqslant r < \infty$, интегралы*

$$\int\limits_a^\infty h(r) K(\sigma, r)\, dr \text{ и } \int\limits_a^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr > 0$$

сходятся при $0 < \sigma < \delta$, а

$$\int\limits_a^\infty g(r) K(0, r)\, dr = \infty.$$

Введем следующие обозначения:

$$\limsup_{\sigma\to 0+} \frac{\int\limits_a^\infty h(r) K(\sigma, r)\, dr}{\int\limits_a^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr} = A,$$

$$\liminf_{\sigma\to 0+} \frac{\int\limits_a^\infty h(r) K(\sigma, r)\, dr}{\int\limits_a^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr} = B. \tag{7}$$

Тогда

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{h(r)}{g(r)} \geqslant A, \tag{8}$$

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{h(r)}{g(r)} \leqslant B. \tag{9}$$

---

* Собственно, А. Рок утверждает в [9] существование предела в левой части (6), но это утверждение ничем не мотивировано. В [11] А. Рок пытается доказать даже более сильное неравенство, которое получим, если в (6) заменим $|f(r)|$ на $M(r, f)$ и $\limsup$ на $\lim$, но его рассуждения содержат грубые ошибки.

Доказательство. Докажем, например, (9), неравенство (8) доказывается аналогично. При $B = +\infty$ неравенство (9) тривиально. Будем считать, что $-\infty < B < +\infty$. Если (9) не выполняется, то существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\infty > R \geqslant a$, что для всех $r \geqslant R$ имеет место $h(r) > (B + \varepsilon) g(r)$. Но тогда

$$\frac{\int_a^\infty h(r) K(\sigma, r)\, dr}{\int_a^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr} = \frac{\int_a^R h(r) K(\sigma, r)\, dr}{\int_a^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr} + \frac{\int_R^\infty h(r) K(\sigma, r)\, dr}{\int_R^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr}\left(1 - \frac{\int_a^R g(r) K(\sigma, r)\, dr}{\int_a^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\int_a^R h(r) K(\sigma, r)\, dr}{\int_a^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr} + (B + \varepsilon)\left(1 - \frac{\int_a^R g(r) K(\sigma, r)\, dr}{\int_a^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr}\right) \xrightarrow[\sigma \to 0+]{} B + \varepsilon,$$

так как при $\sigma \to 0+$

$$\int_a^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr \to +\infty,$$

а интегралы

$$\int_a^R h(r) K(\sigma, r)\, dr \quad \text{и} \quad \int_a^R g(r) K(\sigma, r)\, dr$$

стремятся к конечным пределам. Следовательно,

$$\liminf_{\sigma \to 0+} \frac{\int_a^\infty h(r) K(\sigma, r)\, dr}{\int_a^\infty g(r) K(\sigma, r)\, dr} \geqslant B + \varepsilon,$$

что противоречит (7). Если $B = -\infty$, то все предыдущие рассуждения сохраняются, лишь $B + \varepsilon$ надо заменить на $-\frac{1}{\varepsilon}$. Лемма доказана.

Теперь в случае, когда $f(z)$ принадлежит классу расходимости, т. е

$$\int_1^\infty \frac{T(r)}{r^{\rho+1}}\, dr = \infty,$$

чтобы получить (5), достаточно применить к (6) лемму 1, положив

$$h(r) = \overset{+}{\ln} |f(r)|, \quad g(r) = T(r), \quad K(\sigma, r) = r^{-\rho-\sigma-1}, \quad a = 1.$$

Чтобы доказать справедливость (5) без дополнительного предположения о принадлежности $f(z)$ классу расходимости, мы получим некоторый аналог неравенства А. Рока, а затем применим лемму 1. Предварительно докажем ряд лемм.

Функция $\rho(r)$, дифференцируемая на $[1, \infty)$, называется уточненным порядком для целой функции $f(z)$ порядка ρ, если выполнены следующие условия:

А) $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$;

Б) $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r=0$;

В) $\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{T(r)}{r^{\rho(r)}}=1$.

Комбинируя известные результаты ([2], гл. I, § 12; [3], гл. II, § 1), получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Для всякой целой функции порядка $\rho>0$ существует аналитическая в z-плоскости с разрезом по отрицательной вещественной полуоси функция $l(z)$ со следующими свойствами:*

1) $l(r)=r^{\rho-\rho(r)}$, *где $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок функции $f(z)$;*

2) *в каждом углу $|\arg z|\leqslant\pi-\eta$, $\eta>0$, выполняется $l(re^{i\varphi})=l(r)+\beta(re^{i\varphi})$, где*

$$\gamma(r)=\max_{|\varphi|\leqslant\pi-\eta}|\beta(re^{i\varphi})|=o(l(r)).$$

Лемма 3. *Если $\rho(r)$ — уточненный порядок для целой функции порядка $\rho>0$, то*

$$\int\limits_1^\infty\frac{T(r)}{r^{\rho(r)+1}}\,dr=\infty.$$

При доказательстве этой леммы и всюду в дальнейшем мы считаем известными все свойства уточненного порядка, приведенные в [2]. Из определения $\rho(r)$ следует, что можно найти такую последовательность $r_n\to\infty$, что: а) $r_{n+1}>2r_n$; б) при $r\geqslant r_1$ функция $r^{\rho(r)}$ строго монотонно возрастает; в) $T(r_n)>\frac{1}{2}r_n^{\rho(r_n)}$. Тогда

$$\int\limits_{r_n}^{2r_n}\frac{T(r)}{r^{\rho(r)+1}}\,dr\geqslant\frac{T(r_n)}{(2r_n)^{\rho(2r_n)+1}}\cdot r_n>\frac{1}{4}\,\frac{r_n^{\rho(r_n)}}{(2r_n)^{\rho(2r_n)}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^\rho}.$$

Так как

$$\int\limits_1^\infty\frac{T(r)}{r^{\rho(r)+1}}\,dr\geqslant\sum_{n=1}^\infty\int\limits_{r_n}^{2r_n}\frac{T(r)}{r^{\rho(r)+1}}\,dr,$$

то отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть $f(z)$ — целая функция, $f(0)\neq0$. Проведем в конечной z-плоскости разрезы от нулей a_n функции $f(z)$ по лучам $\{\arg z=\arg a_n=\theta_n,\ |a_n|\leqslant|z|<\infty\}$ и в оставшейся части z-плоскости (обозначим ее через Z) выберем однозначную ветвь $\arg f(z)$, $-\pi<\arg f(0)\leqslant\pi$. Тогда существует такая постоянная L, что для $|z|=r\geqslant1$ выполняется*

$$|\arg f(z)|<LT(2r).\tag{10}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Иенсена — Неванлинна ([12], стр. 165) $(R>r)$:

$$\ln f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\theta})|\,\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,d\theta-\sum_{|a_n|<R}\ln\left\{\frac{|a_n|}{a_n}\,\frac{R^2-\bar a_nz}{R(a_n-z)}\right\}+i\arg f(0),$$

где мы считаем $\arg \frac{R}{|a_n|} = 0$. Отсюда получаем, что

$$\arg f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| \operatorname{Im} \left\{ \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \right\} d\theta -$$

$$- \sum_{|a_n| < R} \arg \left\{ \frac{|a_n|}{\bar{a}_n} \frac{R^2 - \bar{a}_n z}{R(a_n - z)} \right\} + \arg f(0),$$

откуда

$$|\arg f(z)| \leqslant \frac{R+r}{R-r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\ln |f(Re^{i\theta})|| \, d\theta + 2\pi n(R, 0, f) +$$

$$+ |\arg f(0)| \leqslant \frac{R+r}{R-r} 2T(R) + 2\pi n(R, 0, f) + O(1),$$

где через $n(R, 0, f)$ обозначено число нулей $f(z)$ в круге $|z| \leqslant R$. Возьмем $R = \frac{3}{2} r$, тогда

$$|\arg f(z)| \leqslant 10T\left(\frac{3}{2} r\right) + 2\pi n\left(\frac{3}{2} r, 0, f\right) + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant 10T(2r) + \frac{2\pi}{\ln \frac{4}{3}} N(2r, 0, f) + O(1) \leqslant \left(10 + \frac{2\pi}{\ln \frac{4}{3}}\right) T(2r) + O(1),$$

т. е. выполняется (10).

Лемма 5. *Пусть целая функция $f(z)$ имеет порядок $\infty > \rho > 0$ и уточненный порядок $\rho(r)$. Тогда для всякого σ, $1 > \sigma > 0$, и φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, справедливо неравенство*

$$\int_1^\infty \frac{|\ln f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} dr < K \int_1^\infty \frac{T(r)\, dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}, \tag{11}$$

где K — некоторая положительная постоянная, не зависящая от σ.

Будем обозначать через K_j, вообще говоря, различные положительные постоянные, не зависящие от σ. Из леммы 4 следует, что*

$$\int_1^\infty \frac{|\arg f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} dr < K_1 \int_1^\infty \frac{T(2r)\, dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}.$$

В силу неравенства $\overset{+}{\ln} M(r, f) \leqslant 3T(2r)$ ([12], стр. 222) имеет место

$$\int_1^\infty \frac{\overset{+}{\ln} |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} dr \leqslant 3 \int_1^\infty \frac{T(2r)\, dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}.$$

Чтобы оценить

$$\int_1^\infty \frac{\overset{+}{\ln} \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi})} \right|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} dr,$$

* *Если существует такой нуль a_n, что $\varphi = \arg a_n$, то мы выбираем какой-нибудь определенный край разреза в Z, какой — безразлично.*

воспользуемся неравенством

$$\int_1^r \overset{+}{\ln} M\left(t, \frac{1}{f}\right) dt < CrT(2r),$$

где C — некоторая абсолютная постоянная ([13], стр. 25). Тогда

$$\int_1^\infty \frac{\overset{+}{\ln}\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} dr \leqslant \int_1^\infty \frac{\overset{+}{\ln} M\left(r, \frac{1}{f}\right)}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} dr =$$

$$= \frac{\int_1^r \overset{+}{\ln} M\left(t, \frac{1}{f}\right) dt}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\Bigg|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\rho'(r) r \ln r + \rho(r) + \sigma + 1}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} \left\{\frac{1}{r}\int_1^r \overset{+}{\ln} M\left(t, \frac{1}{f}\right) dt\right\} dr \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \int_1^\infty \frac{T\left(2r, \frac{1}{f}\right)}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} dr = K_2 \int_1^\infty \frac{T(2r, f) + O(1)}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} dr \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \int_1^\infty \frac{T(2r)\, dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} + K_3 \leqslant K_4 \int_1^\infty \frac{T(2r)\, dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}.$$

Таким образом,

$$\int_1^\infty \frac{|\ln f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} dr < K_5 \int_1^\infty \frac{T(2r)\, dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} =$$

$$= K_5 \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{T(r)\, dr}{\left(\frac{r}{2}\right)^{\rho\left(\frac{r}{2}\right)+\sigma+1}} < K \int_1^\infty \frac{T(r)\, dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}.$$

Замечание. Легко убедиться, что постоянную K в (11) можно выбрать так, что неравенство (11) остается справедливым, если в левой части неравенства функцию $f(z)$ заменить на $f(z) - a$, где $|a| \leqslant A$, A — некоторая постоянная, а справа оставить $T(r) = T(r, f)$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству нашей теоремы. Здесь мы пользуемся приемом Ж. Валирона [10].

Рассмотрим пересечение $S(R_0, R, \varphi_1)$ сектора $S_{R_0 R}: \{R_0 < |z| < R, 0 < \arg z < \varphi_1\}$, $0 < \varphi_1 < \pi$, с областью Z (см. лемму 4). Вообще говоря, $S(R_0, R, \varphi_1)$ состоит из конечного числа областей (это число на 1 больше числа нулей $f(z)$ в секторе $\{0 < |z| \leqslant R_0, 0 < \arg z < \varphi_1\}$). Ориентированную границу $S(R_0, R, \varphi_1)$ обозначим через $\partial S(R_0, R, \varphi_1)$. Для простоты будем считать сначала, что все нули $f(z)$ простые и имеют различные аргументы. Пусть $l(z)$ — функция, определенная в лемме 2. Выбросим из $S(R_0, R, \varphi_1)$ достаточно малые окрестности нулей $f(z)$. Тогда на замыкании оставшегося множества функция $l(z) z^{-\rho-\sigma-1} \ln f(z)$ будет аналитической ($\sigma > 0$) и к ней применима интегральная теорема Коши. Устремляя к нулю радиусы выбрасываемых кружочков, получим

$$\int_{\partial S(R_0, R, \varphi_1)} \frac{l(z) \ln f(z)}{z^{\rho+\sigma+1}} dz = 0. \qquad (12)$$

Интеграл в (12) можно разбить на такие слагаемые:

1) $\int\limits_{R_0}^{R} \frac{l(r)\ln f(r)}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr,$

2) $i\int\limits_{0}^{\varphi_1} \frac{l(Re^{i\varphi})\ln f(Re^{i\varphi})\,e^{-i(\rho+\sigma)\varphi}}{R^{\rho+\sigma}}\,d\varphi,$

3) $-\int\limits_{R_0}^{R} \frac{l(re^{i\varphi_1})\ln f(re^{i\varphi_1})\,e^{-i(\rho+\sigma)\varphi_1}}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr,$

4) $-i\int\limits_{0}^{\varphi_1} \frac{l(R_0e^{i\varphi})\ln f(R_0e^{i\varphi})e^{-i(\rho+\sigma)\varphi}}{R_0^{\rho+\sigma}}\,d\varphi,$

5) если $0<|a_n|\leqslant R_0$, $0<\theta_n<\varphi_1$, то в интеграл в (12) входит слагаемое

$$\int\limits_{R_0}^{R} \frac{l(re^{i\theta_n})\{\ln f(re^{i\theta_n})\}_{л}\,e^{-i(\rho+\sigma)\theta_n}}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr -$$

$$-\int\limits_{R_0}^{R} \frac{l(re^{i\theta_n})\{\ln f(re^{i\theta_n})\}_{п}\,e^{-i(\rho+\sigma)\theta_n}}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr =$$

$$= -2\pi i\int\limits_{R_0}^{R} \frac{l(re^{i\theta_n})\,e^{-i(\rho+\sigma)\theta_n}}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr,$$

здесь $\{\ \ldots\ \}_{л}$ означает, что берется ветвь $\ln f(re^{i\theta_n})$ на левом краю разреза по $\arg z=\theta_n$, $\{\ \ldots\ \}_{п}$ — на правом краю, $\{\ln f(re^{i\theta_n})\}_{п}-\{\ln f(re^{i\theta_n})\}_{л}= = 2\pi i$,

6) если $R_0<|a_n|<R$, $0<\theta_n<\varphi_1$, то в интеграл в (12) входит слагаемое

$$-2\pi i\int\limits_{|a_n|}^{R} \frac{l(re^{i\theta_n})\,e^{-i(\rho+\sigma)\theta_n}}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr.$$

Подставим эти слагаемые в (12), умножим полученное равенство на $e^{i(\rho+\sigma)\varphi_1}$ и, сравнив действительные части в левой и правой частях равенства, получим

$$\cos(\rho+\sigma)\varphi_1\int\limits_{R_0}^{R} \frac{l(r)\ln|f(r)|}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr-\sin(\rho+\sigma)\varphi_1\int\limits_{R_0}^{R} \frac{l(r)\arg f(r)}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr-$$

$$-\frac{1}{R^{\rho+\sigma}}\,\mathrm{Im}\int\limits_{0}^{\varphi_1} l(Re^{i\varphi})\ln f(Re^{i\varphi})\,e^{i(\rho+\sigma)(\varphi_1-\varphi)}d\varphi-$$

$$-\int\limits_{R_0}^{R} \frac{l(r)\ln|f(re^{i\varphi_1})|}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr-\mathrm{Re}\int\limits_{R_0}^{R} \frac{\beta(re^{i\varphi_1})\ln f(re^{i\varphi_1})}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr+$$

$$+\frac{1}{R_0^{\rho+\sigma}}\,\mathrm{Im}\int\limits_{0}^{\varphi_1} l(R_0e^{i\varphi})\ln f(R_0e^{i\varphi})\,e^{i(\rho+\sigma)(\varphi_1-\varphi)}d\varphi+$$

$$+\,2\pi\sum_{\substack{0<|a_n|\leqslant R_0\\ 0<\theta_n<\varphi_1}}\operatorname{Im}\int\limits_{R_0}^{R}\frac{l(re^{i\theta_n})\,e^{i(\rho+\sigma)(\varphi_1-\theta_n)}}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr+$$

$$+\,2\pi\sum_{\substack{R_0<|a_n|<R\\ 0>\theta_n<\varphi_1}}\operatorname{Im}\int\limits_{|a_n|}^{R}\frac{l(re^{i\theta_n})\,e^{i(\rho+\sigma)(\varphi_1-\theta_n)}}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr=0.$$

Устремим в этом равенстве $R\to\infty$. В силу леммы 4 интеграл

$$\left|\frac{1}{R^{\rho+\sigma}}\operatorname{Im}\int\limits_{0}^{\varphi_1}l(Re^{i\varphi})\ln f(Re^{i\varphi})\,e^{i(\rho+\sigma)(\varphi_1-\varphi)}d\varphi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+o(1)}{R^{\rho+\sigma}}\,l(R)\int\limits_{0}^{\varphi_1}|\ln f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+o(1)}{R^{\rho(R)+\sigma}}\left\{\int\limits_{0}^{2\pi}|\ln|f(Re^{i\varphi})||\,d\varphi+\int\limits_{0}^{2\pi}|\arg f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+o(1)}{R^{\rho(R)+\sigma}}\,[2T(R)+LT(2R)]\xrightarrow[R\to\infty]{}0.$$

Сходимость остальных интегралов обеспечивается леммой 5. Мы получим

$$\cos(\rho+\sigma)\,\varphi_1\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{l(r)\ln|f(r)|}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr-\sin(\rho+\sigma)\,\varphi_1\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{l(r)\arg f(r)}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr-$$

$$-\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{l(r)\ln|f(re^{i\varphi_1})|}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr-\operatorname{Re}\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{\beta(re^{i\varphi_1})\ln f(re^{i\varphi_1})}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr+$$

$$+\,\frac{1}{R_0^{\rho+\sigma}}\operatorname{Im}\int\limits_{0}^{\varphi_1}l(R_0e^{i\varphi})\ln f(R_0e^{i\varphi})\,e^{i(\rho+\sigma)(\varphi_1-\varphi)}d\varphi+$$

$$+\,2\pi\sum_{0<\theta_n<\varphi_1}\sin(\rho+\sigma)(\varphi_1-\theta_n)\int\limits_{\max(R_0,\,|a_n|)}^{\infty}\frac{l(r)dr}{r^{\rho+\sigma+1}}+$$

$$+\,2\pi\sum_{0<\theta_n<\varphi_1}\operatorname{Im}\int\limits_{\max(R_0,\,|a_n|)}^{\infty}\frac{\beta(re^{i\theta_n})\,e^{i(\rho+\sigma)(\varphi_1-\theta_n)}}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr=0.$$

Теперь такие же рассуждения проведем для сектора $R_0<|z|<\infty$, $-\varphi_1<$ $<\arg z<0$, причем границу $\partial S(R_0,\ R,\ -\varphi_1)$ будем обходить в отрицательном направлении. Тогда получим формулу, аналогичную предыдущей, но всюду вместо φ_1 будет стоять $-\varphi_1$ и перед слагаемыми 5) и 6) изменится знак. Складывая эти два равенства, получим

$$2\cos(\rho+\sigma)\,\varphi_1\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{\ln|f(r)|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr-\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi_1})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr-$$

$$-\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{\ln|f(re^{-i\varphi_1})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr-\operatorname{Re}\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{\beta(re^{i\varphi_1})\ln f(re^{i\varphi_1})}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr-$$

$$-\operatorname{Re}\int_{R_0}^{\infty}\frac{\beta(re^{-i\varphi_1})\ln f(re^{-i\varphi_1})}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr+$$

$$+\frac{1}{R_0^{\rho+\sigma}}\operatorname{Im}\int_0^{\varphi_1} l(R_0e^{i\varphi})\ln f(R_0e^{i\varphi})\,e^{i(\rho+\sigma)(\varphi_1-\varphi)}d\varphi-$$

$$-\frac{1}{R_0^{\rho+\sigma}}\operatorname{Im}\int_{-\varphi_1}^{0} l(R_0e^{i\varphi})\ln f(R_0e^{i\varphi})\,e^{-i(\rho+\sigma)(\varphi_1+\varphi)}\,d\varphi+$$

$$+2\pi\sum_{|\theta_n|<\varphi_1}\sin(\rho+\sigma)(\varphi_1-|\theta_n|)\int_{\max(R_0,|a_n|)}^{\infty}\frac{l(r)\,dr}{r^{\rho+\sigma+1}}+$$

$$+2\pi\sum_{0\leqslant\theta_n<\varphi_1}\operatorname{Im}\int_{\max(R_0,|a_n|)}^{\infty}\frac{\beta(re^{i\theta_n})\,e^{i(\rho+\sigma)(\varphi_1-\theta_n)}}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr-$$

$$-2\pi\sum_{-\varphi_1<\theta_n<0}\operatorname{Im}\int_{\max(R_0,|a_n|)}^{\infty}\frac{\beta(re^{i\theta_n})\,e^{-i(\rho+\sigma)(\varphi_1+\theta_n)}}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr=0.$$

Легко убедиться, что к такому же равенству придем и в случае, когда $f(z)$ имеет кратные нули и нули, лежащие на одном луче.

Будем теперь считать, что $\varphi_1\leqslant\frac{\pi}{2\rho}\left(\rho>\frac{1}{2}\right)$ и что σ взято настолько малым, что $(\rho+\sigma)\varphi_1<\frac{\pi}{2}$. Тогда при $|\theta_n|<\varphi_1$ выполняется $\sin(\rho+\sigma)(\varphi_1-|\theta_n|)\geqslant 0$. Учитывая это и проводя простые оценки, получим неравенство $[\gamma(r)=\max\limits_{|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}}|\beta(re^{i\varphi})|]$:

$$2\cos(\rho+\sigma)\varphi_1\int_{R_0}^{\infty}\frac{\ln|f(r)|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr\leqslant$$

$$\leqslant\int_{R_0}^{\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi_1})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr+\int_{R_0}^{\infty}\frac{\ln|f(re^{-i\varphi_1})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr+ \tag{13}$$

$$+\int_{R_0}^{\infty}\frac{\gamma(r)\,|\ln f(re^{i\varphi_1})|}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr+\int_{R_0}^{\infty}\frac{\gamma(r)\,|\ln f(re^{-i\varphi_1})|}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr+$$

$$+2\pi\sum_{|\theta_n|<\varphi_1}\int_{\max(R_0,|a_n|)}^{\infty}\frac{\gamma(r)\,dr}{r^{\rho+\sigma+1}}+K_6.$$

Пусть

$$\omega(r)=\max_{t\geqslant r}\frac{\gamma(t)}{l(t)}.$$

Тогда по лемме 5 $(R_0>1)$

$$\int_{R_0}^{\infty}\frac{\gamma(r)\,|\ln f(re^{\pm i\varphi_1})|}{r^{\rho+\sigma+1}}\,dr\leqslant\omega(R_0)\int_{R_0}^{\infty}\frac{|\ln f(re^{\pm i\varphi_1})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr<$$

$$\leqslant\omega(R_0)\,K\int_{1}^{\infty}\frac{T(r)\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}.$$

Далее

$$\sum_{|\theta_n|<\varphi_1} \int\limits_{\max(R_0,\,|a_n|)}^{\infty} \frac{\gamma(r)\,dr}{r^{\rho+\sigma+1}} \leqslant \sum_{|\theta_n|<\varphi_1} \omega(R_0) \int\limits_{\max(R_0,\,|a_n|)}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \omega(R_0)\int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{n(r,0)\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} \leqslant \frac{\omega(R_0)}{\ln 2}\int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{N(2r,0)\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \omega(R_0)\,K_7 \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{T(r)\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} + K_8.$$

В итоге получим из (13) следующее неравенство

$$\begin{gathered} 2\cos(\rho+\sigma)\,\varphi_1 \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{\ln|f(r)|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi_1})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr + \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{\ln|f(re^{-i\varphi_1})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr + \\ + \omega(R_0)\,K_9 \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{T(r)\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} + K_{10}. \end{gathered} \tag{14}$$

Применим теперь неравенство (14) к функции $f(z)-e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta<2\pi$ (не уменьшая общности, можно считать, что $|f(0)|\neq 1$). Легко убедиться, учитывая замечание к лемме 5, что в (14) можно выбрать K_9 и K_{10} так, что (14) будет справедливо одновременно для всех $f(z)-e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta<2\pi$, при любых $R_0>1$ и $0<\varphi_1\leqslant\pi/2\rho$. Полученное неравенство проинтегрируем по θ в пределах от 0 до 2π. Учитывая, что ([2], стр. 25; [12], стр. 179)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|\omega - e^{i\theta}|\,d\theta = \overset{+}{\ln}|\omega|,$$

получим

$$\begin{gathered} 2\cos(\rho+\sigma)\,\varphi_1 \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{\overset{+}{\ln}|f(r)|\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} \leqslant \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{\overset{+}{\ln}|f(re^{i\varphi_1})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr + \\ + \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{\overset{+}{\ln}|f(re^{-i\varphi_1})|}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}\,dr + \omega(R_0)\,K_9 \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{T(r)\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} + K_{10}. \end{gathered}$$

Проинтегрируем это неравенство по φ_1 в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2(\rho+\sigma)}$. Мы получим

$$\begin{gathered} \frac{2}{\rho+\sigma}\int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{\overset{+}{\ln}|f(r)|\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} \leqslant \int\limits_{R_0}^{\infty} r^{-\rho(r)-\sigma-1}\,dr \int\limits_{-\frac{\pi}{2(\rho+\sigma)}}^{\frac{\pi}{2(\rho+\sigma)}} \overset{+}{\ln}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi + \\ + \frac{\pi K_9}{2(\rho+\sigma)}\,\omega(R_0)\int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{T(r)\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} + \frac{\pi}{2(\rho+\sigma)}K_{10} \leqslant \end{gathered}$$

$$\leqslant \left(2\pi + \frac{\pi K_9}{2(\rho+\sigma)}\omega(R_0)\right)\int_{R_0}^{\infty}\frac{T(r)\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} + \frac{\pi}{2(\rho+\sigma)}K_{10}. \tag{15}$$

Из леммы 3 следует, что

$$\lim_{\sigma\to 0+}\int_{R_0}^{\infty}\frac{T(r)\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}} = \infty,$$

и из (15) получаем

$$\limsup_{\sigma\to 0+}\frac{\displaystyle\int_{R_0}^{\infty}\frac{\overset{+}{\ln}|f(r)|\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}}{\displaystyle\int_{R_0}^{\infty}\frac{T(r)\,dr}{r^{\rho(r)+\sigma+1}}} \leqslant \pi\rho + \frac{\pi}{4}K_9\omega(R_0).$$

Отсюда в силу леммы 1, положив $h(r) = \overset{+}{\ln}|f(r)|$, $g(r) = T(r)$, $K(\sigma, r) = r^{-\rho-\sigma-1}$, $a = R_0$, имеем

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\overset{+}{\ln}|f(r)|}{T(r)} \leqslant \pi\rho + \frac{\pi}{4}K_9\omega(R_0). \tag{16}$$

Так как по лемме 2

$$\lim_{R_0\to\infty}\omega(R_0) = 0,$$

то, устремив в (16) $R_0\to\infty$, получим искомое неравенство (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Valiron. Sur le minimum du module des fonctions entiéres d'ordre inférieur a un. Mathematica, 11 (1935), 264—269.
2. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.
3. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. 1-е изд., Гостехиздат, М., 1957.
4. W. H. J. Fuchs, W. K. Hayman. An entire function with assigned deficiencies, Studies Math. Analysis and Related Topics, Stanford, Calif., Univ. Press, 1962, 117—125.
5. R. E. A. C. Paley. A note on integral function, Proc. Cambridge Philos. Soc. 28 (1932), 262—265.
6. И. В. Островский. О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями. «Зап. мех.-матем. ф-та Харьковск. госуд. ун-та и Харьковского матем. об-ва», 28 (1961), 23—32.
7. A. Beurling. Some theorems on boundedness of analytic functions. Duke Math. J., 16 (1949), 355—359.
8. W. K. Hayman. The minimum modulus of large integral functions, Proc. London Math. Soc., 2 (1952) 469—512.
9. A. Rauch. Sur les fonctions entières de la classe de divergence de l'ordre positif ϱ, C. r. Acad. sci., 206 (1938), 1076—1078.
10. G. Valiron. Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini. J. math. pures et appl., 10 (1931), 457—480.
11. A. Rauch. Sur les fonctions entières de la classe de divergence. Bull. sci. math., 63 (1939), 66—79.
12. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. ОГИЗ. М.-Л., 1941.
13. R. Nevanlinna. Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris, 1929.