АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Я. Л. Геронимус, Б. Л. Голинский

ВВЕДЕНИЕ

Пусть многочлены $\varphi_n(z) = \alpha_n z^n + \ldots, \alpha_n > 0, n = 0, 1, \ldots$ ортонормальны на единичной окружности относительно обложения $d\sigma(\theta)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\, d\sigma(\theta) = \delta_{nm}, \ (n, \ m = 0, \ 1, \ \ldots), \tag{1}$$

где $\sigma(\theta)$ — ограниченная неубывающая функция с бесчисленным множеством точек роста. Так как мы будем рассматривать некоторые условия, достаточные для существования

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta}), \ \ \varphi_n^*(z) = z^n \bar{\varphi}_n\left(\frac{1}{z}\right), \tag{2}$$

то во всем дальнейшем будем предполагать, что $\ln \sigma'(\theta) \in L_1$*.

Введем следующие обозначения:

$\mathscr{E}_1$ — *множество точек существования производной* $\sigma'(\theta) = p(\theta)$;
$\mathscr{E}_2$ — » » » » $\sigma'(\theta) = p(\theta) > 0$;
$\mathscr{E}_3$ — » » » функции

$$t(\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln p(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\varphi - \theta}{2}\, d\varphi, \tag{3}$$

сопряженной с функцией $-\frac{1}{2}\ln p(\theta)$, причем интеграл понимается в смысле главного значения Коши.

Очевидно, мы имеем

$$\mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E}_2 \subset \mathscr{E}_3, \ \operatorname{Mes}\mathscr{E}_i = 2\pi, \ (i = 1, \ 2, \ 3). \tag{4}$$

Через C и, соответственно, AC, V будем обозначать классы функций непрерывных и, соответственно, абсолютно непрерывных, имеющих ограниченную вариацию.

---

* В противном случае, как показано в [9], гл. V, никакая подпоследовательность $\{\varphi_{n_\nu}^*(e^{i\theta})\}$ не может сходиться даже по мере ни на каком множестве положительной меры к функции, которая была бы почти всюду на этом множестве конечной.

Рассмотрим функцию *

$$\pi(z) = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln p(\theta)\,d\theta\right\}, \quad |z|<1,$$

$$\pi(0) = \alpha = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln p(\theta)\,d\theta\right\} > 0;$$

она имеет почти всюду на единичной окружности радиальные граничные значения, причем

$$\pi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0}\pi(re^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{p(\theta)}}e^{it(\theta)}, \quad \theta\in\mathscr{E}_3$$

$$p(\theta) = |\pi(e^{i\theta})|^{-2}.$$

Будем также пользоваться обозначением

$$\pi_0(\theta) = \pi(e^{i\theta})\,\gamma(\theta),$$

где $\gamma(\theta)$ характеристическая функция множества $\mathscr{E}_2$. Пусть, далее,

$$\delta_n = \left\|\pi_0(\theta) - \frac{\alpha_n}{\alpha}\varphi_n^*(e^{i\theta})\right\|_2^\sigma \leqslant \|\pi_0(\theta) - G_n(e^{i\theta})\|_2^\sigma,$$

где $G_n(z)$ — произвольный многочлен степени не выше n; через $\|f\|_p^\sigma$, $p\geqslant 1$ обозначена *норма* функции $f(\theta)$ в метрике пространства L_p^σ **.

В том частном случае, когда

$$\sigma(\theta)\in AC,\ 0<m\leqslant p(\theta)\leqslant M,\ -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi, \tag{9}$$

мы имеем

$$\delta_n \leqslant C\omega_2\left(\frac{1}{n};\ p\right)^{***}, \tag{10}$$

где $\omega_p(\delta; f)$ интегральный модуль непрерывности функции $f(\theta)\in L_p$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ в метрике пространства L_p; при $p=\infty$ функция $f(\theta)$ эквивалентна некоторой функции класса C — вместо $\omega_\infty(\delta; f)$ будем писать $\omega(\delta; f)$; локальные модули непрерывности (на части отрезка $[-\pi, \pi]$) будем обозначать $\omega_p'(\delta; f)$ и $\omega'(\delta; f)$.

Рассмотрим еще *параметры* $\{a_n\}_0^\infty$ ортогональной системы, являющиеся коэффициентами рекуррентного соотношения

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{a}_n\Phi_n^*(z),\ \Phi_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\alpha_n} = z^n + \dots,\ (n=0, 1, \dots); \tag{11}$$

они удовлетворяют неравенствам $\{|a_n|\}_0^\infty < 1$, а в нашем случае имеем $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$, причем

$$\frac{\alpha_0}{\alpha}\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^2} \leqslant \delta_n \leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^2},$$

$$\sqrt{\frac{\alpha_0+\alpha}{\alpha^2}}\cdot\sqrt{\alpha-\alpha_n} \leqslant \delta_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\cdot\sqrt{\alpha-\alpha_n}. \tag{12}$$

* См. [9], гл. I, II, VIII.

** Если $d\sigma(\theta) = d\theta$, $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, то верхний значок будем опускать.

*** Через $C, C_1, C_2, \dots$ обозначены различные константы, независящие от n; иногда мы обозначаем различные константы одними и теми же буквами там, где это не может вызвать недоразумений.

Настоящая работа имеет целью рассмотреть асимптотические формулы для ортонормальных многочленов, справедливые всюду, или почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$, или в заданной точке θ_0; так как для существования радиального граничного значения (6) необходимо существование функции $t(\theta)$ (3), то всегда при рассмотрении предельного соотношения будем предполагать, что $\theta \in \mathscr{E}_3$.

Мы приводим без доказательства результаты, полученные другими авторами, а также одним из нас в монографии [9], доказываем только наши новые результаты.

Для более наглядного обзора и сопоставления результатов, многие из которых получены при сходных условиях, мы свели их в таблицы, помещенные в конце статьи.

§ 1. В табл. 1 сведены условия, каждое из которых достаточно для справедливости предельного соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta}) \tag{1.1}$$

на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, или на некотором точечном множестве

$$\mathscr{E} \subset [-\pi, \pi], \ \text{Mes}\, \mathscr{E} = 2\pi.$$

Условие 1), указанное в [4], является наиболее общим; оно получено применением общей теоремы Радемахера — Меньшова, справедливой для ряда Фурье — Чебышева по любым ортогональным функциям, к ряду* ([9], гл. II)

$$\begin{gathered} \alpha\pi_0(\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(0)}\, \varphi_k(e^{i\theta}), \qquad \overline{\varphi_k(0)} = -\alpha_k a_{k-1},\ \alpha_0 \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha, \\ \alpha_n \varphi_n^*(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(0)}\, \varphi_k(e^{i\theta}),\quad \alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \pi(0); \end{gathered} \tag{1.2}$$

оно достаточно для сходимости (1.1) почти всюду в $[-\pi, \pi]$ (т. е. в данном случае за возможным исключением множества i, для которого $\int_i d\sigma(\theta) = 0$).

Более ограничительное условие 2), из которого по (12) вытекает $\delta_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, достаточно для сходимости (1.1) на множестве $\mathscr{E}_3$ ([9], гл. V).

Условие 3) ([3], § 26) достаточно для того, чтобы на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ функция $\sigma(\theta)$ была абсолютно непрерывна, а функция $p(\theta)$ непрерывна и положительна; в этом случае сходимость равномерна на всем отрезке $[-\pi, \pi]$.

Из условия 4), наложенного уже не на параметры, а на функцию $p(\theta)$, вытекает условие 1); действительно, мы имеем [15]: если для достаточно больших значений x функция $\mu(x)$ такова, что

$$\mu(x) > 0, \quad \mu'(x) > 0, \ \mu''(x) < 0,$$

то из сходимости ряда

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu'(k)\, \delta_k^2, \quad \delta_n^2 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^2$$

* Эту теорему обычно доказывают для вещественных функций; однако, внося небольшие изменения в ее доказательство (см. [11], §§ 5.34, 5.35) нетрудно показать ее справедливость и в нашем случае (1).

вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \mu(k)$; полагая $\mu(x) = \ln^2 x$, видим, что из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k^2}{k} \ln k$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \ln^2 k$ при дополнительном условии (9) имеем (10), а сходимость $\sum_{k=2}^{\infty} \omega_2^2\left(\frac{1}{k}; p\right) \frac{\ln k}{k}$ эквивалентна условию 4).

В частности, для выполнения условия 4) достаточно, как легко видеть, условие

$$\omega_2(\delta; p) \leqslant C\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{-\alpha-1}, \quad \alpha > 0,$$

которое интересно сравнить с условием 9).

При выполнении условия 5) ([9], гл. V) сходимость (1.1) вытекает из неравенства

$$|\varphi_n^*(e^{i\theta}) - \pi(e^{i\theta})| \leqslant |\pi(e^{i\theta}) - \pi(re^{i\theta})| + |\pi(re^{i\theta})| \sqrt[3]{n\delta_n^2}, \qquad (1.\ldots)$$

$$r = 1 - \left(\frac{\delta_n}{n}\right)^{\frac{2}{3}};$$

благодаря дополнительному условию (9) имеем (10); сходимость имеет место на $\mathcal{E}_3$.

Из условия 6), более ограничительного, чем 4) и 5), вытекает условие 3) ([9], гл. VIII) — поэтому из него вытекает равномерная сходимость (1.1) на всем отрезке $[-\pi, \pi]$; оно представляет интерес в том случае, когда функция $\omega_2(x; p)$ стремится к нулю вместе с x медленнее, чем функция $\sqrt{x}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-\alpha-2}$, $\alpha > 0$ — в противном случае показано [5], что функция $p(\theta)$ эквивалентна непрерывной функции, удовлетворяющей условию 9). Отметим еще, что условие 6) эквивалентно условию О. Саса ([1], гл. II)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_2\left(\frac{1}{n}; p\right) < \infty, \qquad (1.4)$$

достаточному для абсолютной сходимости на отрезке $[-\pi, \pi]$ ряда Фурье функции $p(\theta)$ — отсюда также вытекает ее непрерывность.

Условие 7), принадлежащее Г. Фрайду [18], достаточно для сходимости на $\mathcal{E}_3$; в § 4 мы обобщим это условие, придав ему локальный характер.

Условие 8) принадлежит Г. Бакстеру [16]; его вывод основан на том, что при выполнении условия 9) абсолютная сходимость ряда Фурье функции $p(\theta)$ эквивалентна условию 3).

Условие 9), достаточное для равномерной сходимости (1.1) на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, принадлежит С. Н. Бернштейну [2]*. Условие 10), более общее, чем 9), принадлежит У. Гренандеру и Г. Сегё ([10], §§1.15, 3.3); они формулируют свои теоремы в предположении, что функция $p(\theta)$ принадлежит классу Липшица, или Дини-Липшица — однако все их выводы справедливы и при более общем условии 10).

---

* С. Н. Бернштейн [2] рассматривал условие 9) для многочленов, ортонормальных на отрезке $[-1, 1]$; для случая окружности это условие вывел Г. Сегё ([14] § 12.4), пользуясь своими методами.

Справедливость условия 11), более общего, чем 10), будет показана в § 4.

Отметим следующее: из условия 10) вытекает существование сопряженной функции (3) и непрерывность функции $\pi(e^{i\theta})$ **на всем отрезке** $[-\pi, \pi]$, а условие 11) достаточно для сходимости (1.1) на множестве $\mathcal{E}_3$.

Примечание 1.1. Хотя все условия естественнее было бы выражать через структурные характеристики функции $\sigma(\theta)$, тем не менее мы видим, что при условиях 1) — 3), наложенных на параметры ортогональной системы, нам не приходится даже требовать абсолютной непрерывности функции $\sigma(\theta)$. Отметим также, что условия 1), 3), наложенные на параметры, позволяют вывести условия 4), 6), выраженные уже через структурные характеристики функции $p(\theta)$. Было бы весьма интересно связать свойства функции $\sigma(\theta)$ с порядком убывания параметров; приведем два примера такого рода:

а) условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \quad \ln p(\theta) \in L_1 \tag{1.5}$$

эквивалентны друг другу ([3], § 21);

б) условие $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ влечет за собой абсолютную сходимость ряда Фурье функции $p(\theta)$; к сожалению, обратного заключения сделать нельзя — для этого надо дополнительно потребовать выполнения (9).

§ 2. В предыдущем параграфе мы рассмотрели несколько условий, достаточных для сходимости (1.1) всюду, или почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$; теперь перейдем к рассмотрению условий, достаточных для сходимости *в данной точке* $\theta_0 \in \mathcal{E}_3$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta_0}) = \pi(e^{i\theta_0}). \tag{2.1}$$

Рассмотрим сперва *«теоремы локализации»* — они дают условия, достаточные *для того, чтобы справедливость (2.1) зависела от поведения* функции $\sigma(\theta)$ лишь в окрестности $e = [\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta)$ точки θ_0, где $\eta > 0$ произвольная малая величина, независящая от n.

Теорема 2.1. *Пусть многочлены* $\{\psi_n(z) = \beta_n z^n + \ldots\}_0^{\infty}$, *ортонормальные относительно обложения* $d\sigma_0(\theta) = p(\theta)\,d\theta$, *равномерно ограничены на всем отрезке* $[-\pi, \pi]$, *а многочлены* $\{\varphi_n(z)\}_0^{\infty}$ *ортонормальны относительно обложения* $d\sigma(\theta) = d\sigma_0(\theta) + d\sigma_1(\theta)$, *где* $\sigma_1(\theta)$ *сумма функции скачков и сингулярной функции; если* $\sigma_1(\theta) \equiv \text{const}$ *для* $\theta \in e$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \{\varphi_n^*(e^{i\theta_0}) - \psi_n^*(e^{i\theta_0})\} = 0; \tag{2.2}$$

таким образом, в этом случае добавление к обложению $d\sigma_0(\theta)$ обложения $d\sigma_1(\theta)$ вне окрестности точки θ_0 не изменяет асимптотических свойств многочленов в этой точке.

Мы имеем очевидное равенство

$$\varphi_n(e^{i\theta_0}) - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\psi_n(e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\, k'_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})\, p(\theta)\, d\theta, \tag{2.3}$$

где по формуле Кристоффеля — Дарбу ([14], § 11.4)

$$k'_{n-1}(z_0, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(z_0)\overline{\psi_k(z)} = \frac{\psi_n^*(z_0)\overline{\psi_n^*(z)} - \psi_n(z_0)\overline{\psi_n(z)}}{1 - z_0 z}, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.3'}$$

Так как $p(\theta)\,d\theta = d\sigma(\theta) - d\sigma_1(\theta)$, то легко находим

$$\varphi_n(e^{i\theta_0}) - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\psi_n(e^{i\theta_0}) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{e_1} k'_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})\,\varphi_n(e^{i\theta})\,d\sigma_1(\theta), \quad e + e_1 = [-\pi, \pi] \qquad (2.$$

Благодаря условию $\{|\psi_n(e^{i\theta})|\}_0^\infty \leqslant M, \ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, имеем

$$|k'_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})| \leqslant \frac{2M^2}{2\sin\frac{\eta}{2}} < \frac{M^2\pi}{\eta}, \quad \theta \in e_1; \qquad (2.$$

таким образом,

$$|\varphi_n^*(e^{i\theta_0}) - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\psi_n^*(e^{i\theta_0})| \leqslant \frac{M^2\pi}{\eta}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{e_1}|\varphi_n(e^{i\theta})|\,d\sigma_1(\theta) \leqslant \frac{M^2\pi}{\eta}\,\|\varphi_n\|_2^{\sigma_1}.$$

Из (8) имеем

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\pi_0(\theta) - \frac{\alpha_n}{\alpha}\varphi_n^*(e^{i\theta})|^2\,p(\theta)\,d\theta + \left(\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(e^{i\theta})|^2\,d\sigma_1(\theta), \quad (2.$$

откуда вытекает оценка

$$\|\varphi_n\|_2^{\sigma_1} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha_n}\delta_n \leqslant \frac{\alpha}{\alpha_0}\delta_n, \quad \lim_{n\to\infty}\delta_n = 0; \qquad (2.$$

так как функция $p(\theta)$ для обеих ортонормальных систем одинакова, и

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\beta_n = \alpha.$$

Из доказанной теоремы можно сделать такой вывод: так как при условиях 6), 8), 9), 10) табл. I имеем равномерную сходимость

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta}), \qquad (2.$$

а, следовательно, и равномерную ограниченность всей ортонормальн[ой] системы на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, то *предельное соотношение* (2.1) *име[ет] место и в том случае, если в указанных условиях функция* $\sigma(\theta)$ *абс[о]лютно непрерывна не на всем отрезке* $[-\pi, \pi]$, *а лишь в окрестнос[ти] точки* θ_0; *это верно и при условии* 7) ([9], § 3.7), и 11) (см. § 4 насто[я]щей работы).

Рассмотрим теперь табл. II и покажем, что каждое из ее услов[ий] 1) — 5) достаточно для того, чтобы справедливость предельного соотн[о]шения (2.1) зависела только от поведения функции $\sigma(\theta)$ в окрестности точки θ_0.

Рассмотрим тригонометрическую сумму Джексона для функции $\frac{1}{p(\theta)}$

$$u_\nu(\theta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_\nu\left(\frac{t-\theta}{2}\right)\frac{dt}{p(t)} \qquad (2$$

порядка $2\nu - 2 \leqslant n$; для ядра

$$K_\nu(\varphi) = \frac{3}{2\pi\nu(2\nu^2+1)}\left(\frac{\sin\nu\varphi}{\sin\varphi}\right)^4 \qquad (2.1[?]$$

имеем, как известно, следующие оценки

$$K_\nu(\varphi) \leqslant \begin{cases} C_1 \nu, & \\ & \delta \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ \dfrac{C_2}{\nu^3 \varphi^4}, & \end{cases} \tag{2.11}$$

где малая положительная величина δ не зависит от n; мы имеем

$$u_\nu(\theta) - \frac{1}{p(\theta)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_\nu(t) A(2t, \theta)\, dt, \tag{2.12}$$

$$A(h, \theta) = \frac{1}{p(\theta + h)} + \frac{1}{p(\theta - h)} - \frac{2}{p(\theta)}. \tag{2.13}$$

По известным свойствам суммы Джексона справедливы неравенства

$$\frac{1}{M} \leqslant u_\nu(\theta), \quad \frac{p(\theta)}{u_\nu(\theta)} \leqslant M^2, \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \tag{2.14}$$

Из условия $p(\theta) \leqslant M$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ вытекает неравенство

$$|\ln p(\theta) - \ln p(\theta_0)| = \left| \ln \frac{1}{p(\theta)} - \ln \frac{1}{p(\theta_0)} \right| \leqslant \frac{1}{M} \left| \frac{1}{p(\theta)} - \frac{1}{p(\theta_0)} \right|,$$

показывающее следующее: если θ_0 точка Лебега для функции $\frac{1}{p(\theta)}$, то она будет точкой Лебега и для функции $\ln p(\theta)$.

Нетрудно видеть, что для ядра Джексона (2.10) справедлива оценка

$$K_\nu\left(\frac{t-\theta}{2}\right) \leqslant \frac{3\pi^3}{2} \cdot \frac{\nu}{16 + \nu^4 (t-\theta)^4}, \tag{2.15}$$

откуда вытекает, что в точке θ_0 имеем ([12], гл. X, §§ 2, 3)

$$u_\nu(\theta_0) - \frac{1}{p(\theta_0)} = o(1), \quad u_\nu(\theta_0) \leqslant C, \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь многочлены $\{\lambda_n(z) = \gamma_n z^n + \ldots\}_0^\infty$, ортонормальные относительно веса $p_1(\theta) = \frac{1}{u_\nu(\theta)}$; как известно ([3], § 10) все многочлены $\{\lambda_k(z)\}_0^r$, $r = 2\nu - 2$ будут такими же, как если бы мы заменили вес $p_1(\theta)$ весом $|\lambda_r(e^{i\theta})|^{-2}$; следовательно,

$$u_\nu(\theta) = |\lambda_r(e^{i\theta})|^2, \; r = 2\nu - 2 \leqslant n; \quad |\lambda_r(e^{i\theta})| \geqslant \frac{1}{\sqrt{M}}, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

$$\lambda_m(z) = z^{m-r} \lambda_r(z), \quad \lambda_m^*(z) = \lambda_r^*(z), \quad (m = r, r+1, \ldots). \tag{2.17}$$

Мы имеем аналогично (2.3)

$$\varphi_n(e^{i\theta_0}) - \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \lambda_n(e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\theta}) k''_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta}) \frac{d\theta}{u_\nu(\theta)},$$

$$k''_{n-1}(z_0, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(z_0) \overline{\lambda_k(z)} = \frac{\lambda_r^*(z_0) \overline{\lambda_r^*(z)} - (z_0 \bar{z})^{n-r} \lambda_r(z_0) \overline{\lambda_r(z)}}{1 - z_0 \bar{z}}. \tag{2.18}$$

Преобразуя интеграл, получим

$$\varphi_n(e^{i\theta_0}) - \frac{\alpha_n}{\gamma_n}\lambda_n(e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{u_\nu(\theta)} - p(\theta)\right]\varphi_n(e^{i\theta})\,k''_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})\,d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(e^{i\theta})\,k''_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})\,d\sigma(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(e^{i\theta})\,k''_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})\,d\sigma_1(\theta),$$

причем второй интеграл, очевидно, равен нулю; отсюда находим

$$\varphi_n^*(e^{i\theta_0}) - \frac{\alpha_n}{\gamma_n}\lambda_r^*(e^{i\theta_0}) = \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{u_\nu(\theta)} - p(\theta)\right]\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})\,d\theta -$$

$$- \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})\,d\sigma_1(\theta) = I_1 + I_2. \qquad (2.19)$$

Для $\theta \in e_1$ имеем $|\theta - \theta_0| > \eta$, откуда по (2.16) — (2.18) следует оценка

$$|k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})| \leqslant \frac{2|\lambda_r(e^{i\theta})\lambda_r(e^{i\theta_0})|}{2\sin\frac{\eta}{2}} \leqslant \frac{\pi\sqrt{u_\nu(\theta)\,u_\nu(\theta_0)}}{\eta} = \frac{C_1}{\eta}\sqrt{u_\nu(\theta)}. \qquad (2.20)$$

Находим оценку для I_2:

$$|I_2| \leqslant \frac{C_1}{\eta}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{u_\nu(\theta)}\,|\varphi_n(e^{i\theta})|\,d\sigma_1(\theta) \leqslant \frac{C_1}{\eta}\cdot\|u_\nu\|_1^{\sigma_1}\cdot\|\varphi_n\|_2^{\sigma_1} \leqslant \frac{C_1}{\eta}\delta_n\|u_\nu\|_1^{\sigma_1}. \qquad (2.21)$$

Для оценки величины $\|u_\nu\|_1^{\sigma_1}$ положим в (2.10), (2.9)

$$K_\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sum_{k=0}^{2\nu-2} l_k^{(\nu)}\cos k\gamma, \quad u_\nu(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} K_\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)\frac{d\gamma}{p_0(\theta+\gamma)}, \qquad (2.22)$$

причем мы заменили в интеграле Лебега (2.9) функцию $\frac{1}{p(\theta)}$ равной ей почти всюду функцией $\frac{1}{p_0(\theta)}$. При обозначениях табл. II имеем

$$\frac{1}{p_0(\theta+\gamma)} \sim \sum_{k=0}^{\infty}\{(b_k\cos k\theta + c_k\sin k\theta)\cos k\gamma + (-b_k\sin k\theta + c_k\cos k\theta)\sin k\gamma\}$$

и таким образом найдем

$$u_\nu(\theta) = 2\pi\left\{b_0 l_0^{(\nu)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2\nu-2} l_k^{(\nu)}(b_k\cos k\theta + c_k\sin k\theta)\right\},$$

$$\|u_\nu\|_1^{\sigma_1} = b_0 l_0^{(\nu)} d_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2\nu-2} l_k^{(\nu)}(b_k d_k + c_k e_k), \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \qquad (2.23)$$

С другой стороны, мы имеем при условии 1)

$$\varphi(\gamma) \sim b_0 d_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{(b_k d_k + c_k e_k)\cos k\gamma + (-b_k e_k + c_k d_k)\sin k\gamma\};$$

обозначая через $\mathfrak{w}_\nu(\theta)$ сумму Джексона порядка $2\nu-2$ функции $\varphi(\theta)$, мы имеем

$$\mathfrak{w}_\nu(0)=\int_{-\pi}^{\pi}K_\nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)\varphi(\gamma)\,d\gamma=2\pi\left\{b_0d_0l_0^{(\nu)}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2\nu-2}l_k^{(\nu)}(b_kd_k+c_ke_k)\right\}. \quad (2.23')$$

Таким образом, из (2.23), (2.23′) вытекает равенство

$$\|u_\nu\|_1^{\sigma_1}=\frac{1}{2\pi}\mathfrak{w}_\nu(0),\quad (\nu=1,\,2,\,\ldots).$$

Так как функция $\varphi(\gamma)$ предполагается ограниченной в некоторой окрестности точки $\gamma=0$, то, по известным свойствам сумм Джексона, величины $\mathfrak{w}_\nu(0)$ также ограничены при всех $\nu=1,2,\ldots$ — отсюда $I_2=o(1)$.

Условие 2), более простое, хотя и менее общее, чем 1), выведем следующим образом: из неравенства

$$\left\{\sin\frac{\nu(t-\theta)}{2}:\sin\frac{t-\theta}{2}\right\}^2\leqslant\nu^2$$

находим по (2.9), (2.10)

$$u_\nu(\theta)\leqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\pi\nu}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\sin\dfrac{\nu(t-\theta)}{2}}{\sin\dfrac{t-\theta}{2}}\right\}^2\frac{dt}{p(t)}=\frac{3}{2}\cdot\sigma_{\nu-1}^{(1)}(\theta), \quad (2.24)$$

где $\sigma_k^{(1)}(\theta)$ сумма Фейера порядка k функции $\frac{1}{p(\theta)}$; при обозначении табл. II находим

$$\sigma_{\nu-1}^{(1)}(\theta)=\sum_{k=0}^{\nu-1}(b_k\cos k\theta+c_k\sin k\theta)\left(1-\frac{k}{\nu}\right),$$

$$\|u_\nu\|_1^{\sigma_1}\leqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{\nu-1}^{(1)}(\theta)\,d\sigma_1(\theta)=\frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\nu-1}(b_kd_k+c_ke_k)\left(1-\frac{k}{\nu}\right).$$

При условии 2) эти величины равномерно ограничены при всех $\nu=1,2,\ldots$. Так как, очевидно,

$$|d_k|,\quad |e_k|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\sigma_1(\theta)=C,\quad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

то имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{\nu-1}(b_kd_k+c_ke_k)\left(1-\frac{k}{\nu}\right)\right|\leqslant C\sum_{k=0}^{\nu-1}\{|b_k|+|c_k|\}\left(1-\frac{k'}{\nu}\right),\quad (\nu=1,\,2,\,\ldots);$$

таким образом, из условия 3) вытекает условие 2); условие 3) более ограничительно, но зато и проще, чем условия 1), 2).

При условии 4) имеем

$$\frac{1}{p(\theta)}\leqslant\frac{1}{m},\quad u_\nu(\theta)\leqslant\frac{1}{m},\quad (\nu=1,\,2,\,\ldots),\ \theta\in[-\pi,\,\pi],$$

откуда также следует равномерная ограниченность величин $\|u_\nu\|_1^{\sigma_1}$; наконец, при условии 5) эти величины равны нулю.

Таким образом, при всех условиях табл. II имеем $I_2=o(1)$.

§ 3. Для оценки I_1 (2.19) преобразуем этот интеграл

$$I_1 = \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int\limits_{e}\left[\frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta)\right]\frac{p(\theta)}{u_\nu(\theta)}\,\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})\,d\theta + \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int\limits_{e_1} = I_3 + I_4, \quad e + e_1 = [-\pi, \pi], \tag{3.1}$$

и оценим сперва I_4, пользуясь (2.20) и (2.14)

$$|I_4| \leqslant \frac{MC_1}{\eta}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{e_1}\left|\frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta)\right|\cdot\sqrt{p(\theta)}\,|\varphi_n(e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{MC_1}{\eta}\cdot\left\|\frac{1}{p} - u_\nu\right\|_2\cdot\left\|\varphi_n\right\|_2^{\sigma_0} < \frac{MC_1}{\eta}\left\|\frac{1}{p} - u_\nu\right\|_2 = o(1), \tag{3.2}$$

ибо из (2.13) находим по неравенству Минковского

$$\left\|\frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta)\right\|_2 \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} K_\nu(t)\,\|A(2t, \theta)\|_2\,dt < 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} K_\nu(t)\,\omega_2\left(2t; \frac{1}{p}\right)dt \leqslant$$
$$\leqslant 2\omega_2\left(\frac{1}{\nu}; \frac{1}{p}\right)\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} K_\nu(t)(2\nu t + 1)\,dt \leqslant C_3\omega_2\left(\frac{1}{\nu}; \frac{1}{p}\right) = o(1); \tag{3.3}$$

при этом мы воспользовались неравенствами

$$|A(2t, \theta)| \leqslant \left|\frac{1}{p(\theta + 2t)} - \frac{1}{p(\theta)}\right| + \left|\frac{1}{p(\theta - 2t)} - \frac{1}{p(\theta)}\right|,$$
$$\omega_2\left(\lambda\delta; \frac{1}{p}\right) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega_2\left(\delta; \frac{1}{p}\right). \tag{3.4}$$

Из (2.19), (2.21), (3.1), (3.2) находим

$$\varphi_n^*(e^{i\theta_0}) - \frac{\alpha_n}{\gamma_n}\lambda_r^*(e^{i\theta_0}) = \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int\limits_{e}\left[\frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta)\right]\frac{p(\theta)}{u_\nu(\theta)}k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})\times$$
$$\times\,\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,d\theta + o(1). \tag{3.5}$$

Мы имеем далее по (5) и (12)

$$\alpha_n \leqslant \alpha = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{p(\theta)}\,d\theta\right\},$$
$$\alpha - \alpha_n \leqslant \frac{\alpha^2}{\alpha_0 + \alpha}\,\delta_n^2, \tag{3.6}$$
$$\gamma_n = \gamma_r = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln u_\nu(\theta)\,d\theta\right\},$$

откуда

$$\ln\frac{\alpha}{\gamma_n} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\ln\frac{1}{p(\theta)} - \ln u_\nu(\theta)\right\}d\theta;$$

пользуясь тем, что $\frac{1}{p(\theta)},\ u_\nu(\theta) \geqslant \frac{1}{M}$, находим

$$\left|\ln\frac{\alpha}{\gamma_n}\right| \leqslant \frac{1}{4\pi M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta)\right| d\theta \leqslant C\omega_1\left(\frac{1}{\nu}\,;\,\frac{1}{p}\right) = o(1).$$

На основании (3.6) получим

$$\frac{\alpha}{\gamma_n} = 1 + o(1),\ \frac{\alpha_n}{\gamma_n} = 1 + o(1);$$

окончательно, пользуясь ограниченностью $|\lambda_r^*(e^{i\theta_0})|$ при $r \to \infty$ имеем

$$\varphi_n^*(e^{i\theta_0}) - \lambda_r^*(e^{i\theta_0}) = \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int_e \left\{\frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta)\right\}\frac{p(\theta)}{u_\nu(\theta)} k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0}) \times$$
$$\times \overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\, d\theta + o(1). \tag{3.7}$$

Далее, из неравенства (2.16) находим

$$\left|u_\nu(\theta_0) - \frac{1}{p(\theta_0)}\right| = \left||\lambda_r^*(e^{i\theta_0})|^2 - |\pi(e^{i\theta_0})|^2\right| = \left||\lambda_r^*(e^{i\theta_0})| - |\pi(e^{i\theta_0})|\right| \times$$
$$\times \{|\lambda_r^*(e^{i\theta_0})| + |\pi(e^{i\theta_0})|\} \leqslant \varepsilon_1, \qquad \lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_1 = 0;$$

отсюда вытекает оценка для разности модулей

$$\left||\lambda_r^*(e^{i\theta_0})| - |\pi(e^{i\theta_0})|\right| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{u_\nu(\theta)} + \dfrac{1}{\sqrt{p(\theta_0)}}} \leqslant 2\sqrt{M}\cdot\varepsilon_1. \tag{3.8}$$

Разность аргументов выражается интегралом

$$\arg\lambda_r^*(e^{i\theta_0}) - \arg\pi(e^{i\theta_0}) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\ln u_\nu(\theta) - \ln\frac{1}{p(\theta)}\right\}\operatorname{ctg}\frac{\theta_0-\theta}{2}\, d\theta, \tag{3.9}$$

понимаемом в смысле главного значения Коши. Из очевидного неравенства

$$|\rho_1 e^{i\varphi_1} - \rho_2 e^{i\varphi_2}| = \sqrt{(\rho_1-\rho_2)^2 + 4\rho_1\rho_2\sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}} \leqslant |\rho_1 - \rho_2| +$$
$$+ \sqrt{\rho_1\rho_2}\cdot|\varphi_1 - \varphi_2|$$

вытекает по (3.8), (3.9) оценка разности

$$|\lambda_r^*(e^{i\theta_0}) - \pi(e^{i\theta_0})| \leqslant 2\sqrt{M}\,\varepsilon_1 + \sqrt{|\lambda_r^*(e^{i\theta_0})\,\pi(e^{i\theta_0})|}\cdot|\arg\lambda_r^*(e^{i\theta_0}) - \arg\pi(e^{i\theta_0})| \leqslant$$
$$\leqslant C_1\varepsilon_1 + C_2\left|\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\ln u_\nu(\theta) - \ln\frac{1}{p(\theta)}\right\}\operatorname{ctg}\frac{\theta_0-\theta}{2}\, d\theta\right|. \tag{3.10}$$

Для той части интеграла, которая взята по множеству e_1, находим оценку

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{e_1}\right| \leqslant \frac{1}{4\pi}\int_{e_1}\left|\ln u_\nu(\theta) - \ln\frac{1}{p(\theta)}\right|\frac{d\theta}{\left|\sin\dfrac{\theta-\theta_0}{2}\right|} \leqslant \frac{C_3}{\eta}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{e_1}\left|u_\nu(\theta) - \frac{1}{p(\theta)}\right| d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_3}{\eta}\,\omega_1\left(\frac{1}{\nu}\,;\,\frac{1}{p}\right) = o(1).$$

Таким образом, пользуясь (3.7), (3.10), приходим к окончательным результатам

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_n^*(e^{i\theta_0})-\pi(e^{i\theta_0})|\leqslant|I_3|+|I_5|+o(1),\\
&I_3=\frac{1}{2\pi}\int\limits_e\left\{\frac{1}{p(\theta)}-u_\nu(\theta)\right\}\frac{p(\theta)}{u_\nu(\theta)}k''_{n-1}(e^{i\theta},e^{i\theta_0})\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,d\theta, \qquad (3.11)\\
&I_5=\frac{1}{4\pi}\int\limits_e\left\{\ln u_\nu(\theta)-\ln\frac{1}{p(\theta)}\right\}\operatorname{ctg}\frac{\theta_0-\theta}{2}\,d\theta,
\end{aligned}
$$

причем оба интеграла взяты по отрезку $e=[\theta_0-\eta,\ \theta_0+\eta]$.

Так как для оценки I_3 надо знать оценки ортонормальных многочленов на e, то представляют интерес условия, достаточные для их равномерной ограниченности внутри множества e.

Теорема 3.1. *Пусть* $\frac{1}{p(\theta)}\in L_1$ *на отрезке* $[-\pi,\pi]$; *рассмотрим некоторые условия, выполнение которых на этом отрезке достаточно для равномерной ограниченности на нем всей ортонормальной системы; пусть эти условия выполняются лишь на* e — *тогда вся ортонормальная система равномерно ограничена внутри* e, *если* $\sigma(\theta)\in AC$ *для* $\theta\in e$.

Для доказательства достаточно воспроизвести с незначительными изменениями доказательство теоремы 4.5 работы [9]. Мы приходим, таким образом, к табл. IV; каждое из ее условий достаточно для равномерной ограниченности всей ортонормальной системы внутри e.

Ограниченность ортонормальной системы на всем отрезке $[-\pi,\pi]$ при условиях 1), 2), выполняющихся на $[-\pi,\pi]$, вытекает из равномерной сходимости (1.1); при условиях 4), 5) она доказана в [9, гл. III].

Для доказательства справедливости условия 3), более общего, чем условия 1), 2), будем исходить из формулы (2.19); пусть сперва на всем отрезке $[-\pi,\pi]$ имеем

$$\sigma(\theta)\in AC,\ \ 0<m\leqslant p(\theta),\quad p(\theta)\in C,\quad \omega(\delta;p)=o\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}}\right);$$

тогда получим из (2.19), полагая $\sigma_1(\theta)\equiv\mathrm{const}$ и вводя обозначение

$$\max_{\theta\in[-\pi,\pi]}|\varphi_n^*(e^{i\theta})|=M_n=|\varphi_n^*(e^{i\theta_0})|,$$

следующее неравенство

$$M_n\leqslant\frac{\alpha_n}{\gamma_n}|\lambda_r^*(e^{i\theta_0})|+M_nC\omega\left(\frac{1}{\nu};\frac{1}{p}\right)\int\limits_{-\pi}^{\pi}|k''_{n-1}(e^{i\theta},e^{i\theta_0})|\,d\theta,$$

откуда вытекает (см. [10], § 3.5)

$$M_n\leqslant O(1)+C_1M_n\omega\left(\frac{1}{\nu};\frac{1}{p}\right)\ln\nu=O(1)+M_no(1),$$

т. е. $M_n=O(1)$; отсюда на основании теоремы 3.1 вытекает справедливость условия 3) табл. IV.

Рассмотрим теперь условия 6), 7) табл. IV, достаточные для ограниченности всей ортонормальной системы *в точке* θ_0. Условие 6), принадлежащее Г. Фрайду [17], можно значительно ослабить (условие 7).

Функция $\lambda(\delta)$ предполагается обладающей всеми свойствами модуля непрерывности на отрезке; от этого модуля она отличается тем, что точка θ_0 фиксирована.

Так как $p(\theta) \leqslant p(\theta_0) + \lambda(|\theta - \theta_0|)$, то на отрезке e имеем $p(\theta) \leqslant M$; введем функцию $p_0(\theta)$ следующим образом*: пусть $p_0(\theta) \equiv p(\theta)$ для $\theta \in e$, а для $\theta \in e_1$ пусть функция $p_0(\theta)$ изменяется по линейному закону и непрерывна в точках $\pm\pi$, $\theta_0 \pm \eta$. Сумму Джексона $u_\nu(\theta)$ (2.9) построим теперь не для функции $\frac{1}{p(\theta)}$, а для функции $\frac{1}{p_0(\theta)}$; тогда, очевидно, на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ имеем

$$0 < m \leqslant p_0(\theta) \leqslant M, \quad 0 < \frac{1}{M} \leqslant u_\nu(\theta) \leqslant \frac{1}{m}.$$

Так как

$$\frac{1}{u_\nu(\theta)} - p(\theta) = \left[\frac{1}{u_\nu(\theta)} - p_0(\theta)\right] + [p_0(\theta) - p(\theta)],$$

то, вместо (2.19), будем иметь

$$\varphi_n^*(e^{i\theta_0}) - \frac{a_n}{\gamma_n}\lambda_r^*(e^{i\theta_0}) = \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{u_\nu(\theta)} - p_0(\theta)\right]\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})\,d\theta -$$
$$- \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})\,d\sigma_1(\theta) + \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[p_0(\theta) -$$
$$- p(\theta)]\cdot\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})\,d\theta = I'_1 - I'_2 + I'_3.$$

Так как в рассматриваемом случае удовлетворяется условие 5) табл. II, то $I'_2 = o(1)$; для оценки I'_3 имеем по (2.20)

$$|I'_3| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{e_1}\left|\frac{p_0(\theta) - p(\theta)}{\sqrt{p(\theta)}}\right|\left|\sqrt{p(\theta)}\right|\varphi_n(e^{i\theta})\left|\right|k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|\,d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\eta}\cdot\left\|\frac{p_0 - p}{\sqrt{p}}\right\|_2\cdot\left\|\varphi_n\right\|_2^{\sigma_0},$$

причем из условия $\frac{1}{p(\theta)} \in L_1$ ясно, что эта величина ограничена при всех $n = 1, 2, \ldots$. Преобразуем I'_1 к форме, аналогичной (3.1)

$$I'_1 = \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{p_0(\theta)} - u_\nu(\theta)\right]\frac{p_0(\theta)}{u_\nu(\theta)}\sqrt{p(\theta)}\,\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\cdot\frac{k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})}{\sqrt{p(\theta)}}\,d\theta =$$
$$= \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int_{e} + \frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int_{e_1} = I'_4 + I'_5; \tag{3.13}$$

пользуясь (2.20), ограниченностью функций $\frac{1}{p_0(\theta)}$ и $u_\nu(\theta)$ и непрерывностью функции $\frac{1}{p_0(\theta)}$ на e_1, мы легко находим оценку для I'_5

$$|I'_5| \leqslant \omega'\left(\frac{1}{\nu};\ \frac{1}{p_0}\right)M^2\cdot\frac{C}{\eta}\int_{e_1}\frac{1}{\sqrt{p(\theta)}}\cdot\sqrt{p(\theta)}\,|\varphi_n(e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_1}{\eta}\,\omega'\left(\frac{1}{\nu};\ \frac{1}{p_0}\right)\cdot\left\|\frac{1}{p}\right\|_1\cdot\left\|\varphi_n\right\|_2^{\sigma_0} = o(1);$$

таким образом, ограниченность всей ортонормальной системы в точке θ_0 зависит только от I'_4, т. е. от поведения функции $p(\theta)$ в окрестности

* Этот метод был применен в [9] при доказательстве теоремы 4.5.

точки θ_0; нетрудно показать, что в рассматриваемом случае $I'_4 = o(1)$ — для этого достаточно дословно воспроизвести доказательство справедливости условия 2) табл. III, приведенное в § 4.

§ 4. Рассмотрим теперь табл. III; в ней сведены некоторые условия, которым должна удовлетворять функция $\sigma(\theta)$ в окрестности точки θ_0 для того, чтобы имело место (2.1).

Условие 1) найдено Г. Фрайдом [17]; покажем, что это условие можно значительно ослабить, заменив его условием 2).

Из условий $p(\theta_0) > 0$ и условия $\left|\frac{1}{p(\theta)} - \frac{1}{p(\theta_0)}\right| \leqslant \lambda(|\theta - \theta_0|)$ вытекает, что на некотором отрезке $[\theta_0 - \eta_1, \theta_0 + \eta_1]$ имеем $p(\theta) \geqslant m > 0$; тогда на некотором внутреннем отрезке $[\theta_0 - \eta_2, \theta_0 + \eta_2]$, $\eta_2 < \eta_1$, будем иметь $u_\nu(\theta) \leqslant \frac{1}{m_1}$. На основании локального аналога неравенства С. Н. Бернштейна, найденного И. И. Приваловым [13], имеем

$$|u'_\nu(\theta)| \leqslant \frac{C\nu}{m_1}, \quad \theta \in [\theta_0 - \eta_3, \theta_0 + \eta_3], \quad 0 < \eta_3 < \eta_2 < \eta_1,$$

откуда для $\theta \in [\theta_0 - \eta_3, \theta_0 + \eta_3]$ найдем *

$$|u_\nu(\theta) - u_\nu(\theta_0)| = \left|\int\limits_{\theta_0}^{\theta} u'_\nu(\theta)\, d\theta\right| \leqslant \frac{C\nu}{m_1}|\theta - \theta_0|;$$

если выбрать $0 < \eta < \eta_3$, то для $\theta \in e$ будем иметь одновременно

$$p(\theta) \geqslant m > 0, \quad u_\nu(\theta) \leqslant \frac{1}{m_1}, \quad |u_\nu(\theta) - u_\nu(\theta_0)| \leqslant \frac{C\nu}{m_1}|\theta - \theta_0|. \tag{4.1}$$

Отсюда, аналогично тому, как это делает Г. Фрайд [17], находим оценки

$$|k''_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})| = O(1) \cdot \mathrm{Min}\left\{n, \frac{1}{|\theta - \theta_0|}\right\}, \quad \theta \in e. \tag{4.2}$$

Найдем теперь оценку для $A(2t, \theta)$ (2.13) при $\theta \in e$

$$|A(2t, \theta)| = \left|\left[\frac{1}{p(\theta + 2t)} - \frac{1}{p(\theta_0)}\right] + \left[\frac{1}{p(\theta - 2t)} - \frac{1}{p(\theta_0)}\right] - 2\left[\frac{1}{p(\theta)} - \frac{1}{p(\theta_0)}\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\lambda(2|t| + |\theta - \theta_0|) + 2\lambda(|\theta - \theta_0|) \leqslant C_1\lambda(|t|) + C_2\lambda(|\theta - \theta_0|), \tag{4.3}$$

и оценку разности (2.12) на e

$$\left|u_\nu(\theta) - \frac{1}{p(\theta)}\right| \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} K_\nu(t)|A(2t, \theta)|\, dt \leqslant C_3\lambda(|\theta - \theta_0|) + C_4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} K_\nu(t)\lambda(t)\, dt.$$

Пользуясь (2.11) и неравенством $\lambda(t) = \lambda\left(\frac{1}{\nu} \cdot \nu t\right) \leqslant (\nu t + 1)\lambda\left(\frac{1}{\nu}\right)$, находим оценку для $\theta \in e$

$$\left|u_\nu(\theta) - \frac{1}{p(\theta)}\right| \leqslant C_3\lambda(|\theta - \theta_0|) + C_5\lambda\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{4.4}$$

Пользуясь неравенствами (4.2), (4.1), оцениваем величину I_3 (3.11), которая ничем не отличается от I'_4 в формуле (3.13)

* Величина C зависит от θ_0, η_2, η_3, но не зависит от n.

$$|I_3| \leqslant \frac{M^2}{2\pi\sqrt{m}} \int_e \left| \frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta) \right| \cdot |k_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})| \cdot \sqrt{p(\theta)}\, |\varphi_n(e^{i\theta})|\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_e \left| \frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta) \right|^2 |k''_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})|^2\, d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}; \tag{4.5}$$

на отрезке $|\theta - \theta_0| \leqslant \frac{1}{\nu}$ имеем при $\nu = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$

$$|k'_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})| = O(n), \quad \left| \frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta) \right| = O\left[\lambda\left(\frac{1}{\nu}\right)\right];$$

кроме того, условие $\frac{\lambda(x)}{x} \in L_2$ эквивалентно условию $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^2\left(\frac{1}{\nu}\right) < \infty$; так как члены этого ряда монотонно убывают, то $\lambda\left(\frac{1}{\nu}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)$; поэтому

$$\left| \int_{\theta_0 - \frac{1}{\nu}}^{\theta_0 + \frac{1}{\nu}} \right| \leqslant \frac{2}{\nu} \cdot O\left[\lambda^2\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] \cdot O(n^2) = o(1). \tag{4.6}$$

На оставшейся части e' отрезка e имеем $\frac{1}{\nu} < |\theta - \theta_0| \leqslant \eta$, откуда

$$|k''_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})| = O\left(\frac{1}{|\theta - \theta_0|}\right), \quad \left| \frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta) \right| = O\{\lambda(|\theta - \theta_0|)\}; \tag{4.7}$$

пользуясь свойством абсолютной непрерывности интеграла, мы можем считать отрезок e настолько малым, чтобы иметь

$$\left| \int_{e'} \right| = O\left[\int_{e'} \left\{ \frac{\lambda(|\theta - \theta_0|)}{|\theta - \theta_0|} \right\}^2 d\theta \right] = o(1).$$

Для оценки I_5 (3.11) заметим, что $\int_e \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2}\, d\theta = 0$; поэтому можем записать I_5 еще и таким образом:

$$I_5 = \frac{1}{4\pi} \int_e \left\{ \ln u_\nu(\theta) - \ln \frac{1}{p(\theta)} - \ln u_\nu(\theta_0) + \ln \frac{1}{p(\theta_0)} \right\} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2}\, d\theta. \tag{4.8}$$

На отрезке $e_0 = \left[\theta_0 - \frac{\varepsilon}{\nu},\ \theta_0 + \frac{\varepsilon}{\nu}\right] \in e$, где $\varepsilon > 0$ произвольная малая величина, независящая от ν, имеем по (4.1)

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_{e_0} \{\ln u_\nu(\theta) - \ln u_\nu(\theta_0)\} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2}\, d\theta \right| \leqslant C \int_{e_0} \left| \frac{\ln u_\nu(\theta) - \ln u_\nu(\theta_0)}{\theta - \theta_0} \right| d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C' \int_{e_0} \left| \frac{u_\nu(\theta) - u_\nu(\theta_0)}{\theta - \theta_0} \right| d\theta = C''\varepsilon; \tag{4.9}$$

так как в точке θ_0 существует сопряженная функция (3), то

$$\lim_{\nu \to \infty} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{e_0} \ln \frac{1}{p(\theta)} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2}\, d\theta \right\} = 0; \tag{4.10}$$

следовательно, часть интеграла (4.8), взятая по отрезку e_0, может быть сделана сколь угодно малой. На остальной части e_0' отрезка e имеем $\frac{\varepsilon}{\nu} < |\theta - \theta_0| \leqslant \eta$; по (4.4), (4.7) находим

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_{e_0'} \left\{ \ln u_\nu(\theta) - \ln \frac{1}{p(\theta)} \right\} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} d\theta \right| \leqslant C_1' \int_{e_0'} \left| \frac{u_\nu(\theta) - \frac{1}{p(\theta)}}{\theta - \theta_0} \right| d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C_2' \int \frac{\lambda(|\theta - \theta_0|)}{|\theta - \theta_0|} d\theta + C_3' \lambda\left(\frac{1}{\nu}\right) \ln \frac{\nu}{\varepsilon} = C_4' \int_{e_0'} \frac{\lambda(x)}{x} dx + o\left(\frac{\ln \nu}{\sqrt{\nu}}\right) = o(1) \quad (4.11)$$

и таким образом можем сделать I_5 сколь угодно малым.

В том частном случае, когда вся ортонормальная система равномерно ограничена на e (условия 1) — 5) табл. IV), мы можем заменить условие $\frac{\lambda(x)}{x} \in L_2$, фигурировавшее в условии 2) табл. III, менее ограничительным условием $\frac{\lambda(x)}{x} \in L_1$. Действительно, при условии $\{|\varphi_n(e^{i\theta})|\}_0^\infty \leqslant C$, $\theta \in e$, мы можем оценить I_3 в (4.5), не прибегая к неравенству Коши—Буняковского

$$|I_3| \leqslant C \int_e \left| \frac{1}{p(\theta)} - u_\nu(\theta) \right| \cdot |k_{n-1}''(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})| d\theta; \quad (4.12)$$

на отрезке $|\theta - \theta_0| \leqslant \frac{1}{\nu}$ имеем по (4.6)

$$\left| \int_{\theta_0 - \frac{1}{\nu}}^{\theta_0 + \frac{1}{\nu}} \right| \leqslant \frac{2}{\nu} \cdot O(\nu) \cdot O\left[\lambda\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] = o(1),$$

а на оставшейся части e' отрезка e имеем по (4.7)

$$\left| \int_{e'} \right| \leqslant O(1) \int_{e'} \frac{\lambda(|\theta - \theta_0|)}{|\theta - \theta_0|} d\theta = O(1) \int_{e'} \frac{\lambda(x)}{x} dx = o(1),$$

ибо эту величину можно сделать сколь угодно малой на основании абсолютной непрерывности интеграла.

Условие 3) табл. III получается комбинированием условия $\frac{\lambda(x)}{x} \in L_1$ с условиями табл. IV в окрестности точки θ_0; условие $\frac{\lambda(x)}{x} \in L_1$ вытекает, очевидно, из условий 4), 5) табл. III, поэтому оно и не фигурирует в этих условиях.

Для доказательства справедливости условия 6) табл. III будем считать, что η выбрано таким образом, чтобы иметь

$$p(\theta) \in C, \quad \theta \in [\theta_0 - \eta', \theta_0 + \eta'], \quad \eta' > \eta.$$

Оценим сперва ту часть интеграла I_3 (4.12), которая взята по отрезку $|\theta - \theta_0| \leqslant \frac{1}{\nu}$; благодаря непрерывности функции $\frac{1}{p(\theta)}$ на e имеем

$$\left| \int_{\theta_0 - \frac{1}{\nu}}^{\theta_0 + \frac{1}{\nu}} \right| \leqslant \frac{2}{\nu} \cdot O(\nu)\, \omega'\left(\frac{1}{\nu}; \frac{1}{p}\right) = o(1);$$

на оставшейся части e' отрезка e имеем

$$\left|\int\limits_{e'}\right| \leqslant O(1)\,\omega'\left(\frac{1}{\nu};\ \frac{1}{p}\right)\int\limits_{e'}\frac{d\theta}{|\theta-\theta_0|} = O(1)\,\omega'\left(\frac{1}{\nu};\ \frac{1}{p}\right)(\ln\eta+\ln\nu) = o(1).$$

Используя (4.9), (4.10), находим, что та часть интеграла I_5 (4.8), которая взята по отрезку e_0, может быть сделана сколь угодно малой; на оставшейся части e_0' отрезка e имеем аналогично (4.11)

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{e_0'}\left|\ln u_\nu(\theta)-\ln\frac{1}{p(\theta)}\right|\cdot\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta_0-\theta}{2}\right|d\theta \leqslant O(1)\int\limits_{e_0'}\left|\frac{u_\nu(\theta)-\dfrac{1}{p(\theta)}}{\theta-\theta_0}\right|d\theta \leqslant$$

$$\leqslant O(1)\,\omega'\left(\frac{1}{\nu};\ \frac{1}{p}\right)\left(\ln\eta+\ln\frac{\nu}{\varepsilon}\right) = o(1).$$

Покажем справедливость условия 7) табл. III, являющегося локальным аналогом условия 7) табл. I.

Выберем произвольно $\varepsilon>0$ и подберем $\eta_0>0$ таким образом, чтобы на отрезке $e_0'=[\theta_0-\eta_0,\ \theta_0+\eta_0]$ имели место неравенства (4.1) и чтобы вариация функции $p(\theta)$ на отрезке e_0' была меньше ε, т. е. $V_p(e_0')<\varepsilon$*; отрезок e пусть лежит строго внутри e_0'.

Воспользуемся неравенством для функций ограниченной вариации ([19], [8], § 4)

$$\int\limits_{e}\left|u_\nu(\theta)-\frac{1}{p(\theta)}\right|d\theta \leqslant \frac{C}{\nu}V_p(e_0'). \tag{4.13}$$

Оценивая I_3 (4.12), имеем: для отрезка $|\theta-\theta_0|\leqslant\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}$

$$\left|\int\limits_{|\theta-\theta_0|\leqslant\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}}\right| \leqslant O(\nu)\int\limits_{|\theta-\theta_0|\leqslant\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}}\left|u_\nu(\theta)-\frac{1}{p(\theta)}\right|d\theta \leqslant O(\nu)\cdot\frac{C}{\nu}V_p(e_0') = O(\varepsilon); \tag{4.14}$$

на оставшейся части e' отрезка e имеем

$$\left|\int\limits_{e'}\right| \leqslant O(1)\int\limits_{e'}\left|\frac{u_\nu(\theta)-\dfrac{1}{p(\theta)}}{\theta-\theta_0}\right|d\theta \leqslant \frac{C_1\nu}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_{e'}\left|u_\nu(\theta)-\frac{1}{p(\theta)}\right|d\theta = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{4.15}$$

Оценивая часть интеграла I_5 (4.8), взятую по отрезку $|\theta-\theta_0|\leqslant$ $\leqslant\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}$, получим по (4.9)

$$\left|\int\limits_{|\theta-\theta_0|\leqslant\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}}\right| = O(\sqrt{\varepsilon});$$

для оставшейся части e' имеем по (4.15)

$$\left|\int\limits_{e'}\right| = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

* Благодаря ограниченности функции $p(\theta)$ сверху и снизу, вариации обеих функций $p(\theta)$ и $\dfrac{1}{p(\theta)}$ на e_0' одного порядка малости.

Для доказательства справедливости условий 8), 9) табл. III рассмотрим формулу ([9], § 4.4)

$$\varphi_n^*(e^{i\theta_0}) = \frac{\left(\frac{\alpha_n}{\alpha} - \bar{c}_n\right)\pi_0(\theta_0) - b_n e^{i(n+1)\theta_0}\overline{\pi_0(\theta_0)}}{\left|\frac{\alpha_n}{\alpha} - c_n\right|^2 - |b_n|^2}, \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.16}$$

где мы положили

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta)\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.17}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} f_0(\theta)\overline{\varphi_n^*(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta) \tag{4.17'}$$

причем

$$f_0(\theta) = \frac{\pi_0(\theta) - \pi_0(\theta_0)}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}. \tag{4.18}$$

Очевидно, имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} f_0(\theta)\left[\overline{\varphi_n^*(e^{i\theta})} - \frac{\alpha}{\alpha_n}\overline{\pi_0(\theta)}\right]d\sigma(\theta) +$$

$$+ \frac{\alpha}{\alpha_n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} f_0(\theta)\frac{\overline{\pi_0(\theta)}}{|\pi_0(\theta)|^2}\,d\theta;$$

функция $D(z) = \frac{1}{\pi(z)}$ принадлежит в области $|z| < 1$ классу H_2 — поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{D(z) - D(z_0)}{z - z_0}\,dz = 0, \quad z = e^{i\theta}, \quad z_0 = e^{i\theta_0},$$

и, следовательно,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} f_0(\theta)\left[\overline{\varphi_n^*(e^{i\theta})} - \frac{\alpha}{\alpha_n}\overline{\pi_0(\theta)}\right]d\sigma(\theta). \tag{4.17''}$$

Положим $f_0(\theta) = f_0^{(1)}(\theta) + f_0^{(2)}(\theta)$, где

$$f_0^{(1)}(\theta) = \begin{cases} f_0(\theta), & \theta \in e, \\ 0, & \theta \bar{\in} e, \end{cases} \quad f_0^{(2)}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in e, \\ f_0(\theta), & \theta \bar{\in} e, \end{cases} \tag{4.19}$$

и, соответственно, положим

$$b_n = b_n^{(1)} + b_n^{(2)}, \quad c_n = c_n^{(1)} + c_n^{(2)}, \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4.20}$$

Так как при $\theta \bar{\in} e$ имеем $|\theta - \theta_0| \geqslant \eta$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_0^{(2)}(\theta)|^2\,d\sigma(\theta) \leqslant \left(\frac{\pi}{2\eta}\right)^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\pi_0(\theta) - \pi_0(\theta_0)|^2\,d\sigma(\theta) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2\eta}\right)^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1 - \frac{\pi_0(\theta_0)}{\pi_0(\theta)}\right|^2 d\theta + \left(\frac{\pi}{2\eta}\right)^2|\pi_0(\theta_0)|^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma_1(\theta) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2\pi}\right)^2 \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1 - \frac{\pi_0(\theta_0)}{\pi_0(\theta)}\right|^2 d\theta + \frac{1}{2\pi p(\theta_0)}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma_1(\theta)\right\};$$

отсюда вытекает, что $f_0^{(2)}(\theta) \in L_2^{\sigma}$, поэтому на основании неравенства Бесселя имеем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{(2)} = 0$; точно так же из (4.17″) получим

$$|c_n^{(2)}| \leqslant \| f_0^{(2)}(\theta)\|_2^{\sigma} \cdot \| \varphi_n^*(e^{i\theta}) - \frac{\alpha}{\alpha_n}\pi_0(\theta)\|_2^{\sigma} = O(\delta_n) = o(1). \quad (4.21)$$

Отсюда находим

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_e f_0(\theta)\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\, d\sigma(\theta) + o(1) = b_n^{(1)} + o(1),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_e e^{i\theta} f_0(\theta)\left\{\overline{\varphi_n^*(e^{i\theta})} - \frac{\alpha}{\alpha_n}\overline{\pi_0(\theta)}\right\} d\sigma(\theta) + o(1) = c_n^{(1)} + o(1); \quad (4.22)$$

отметим, что при $\theta \in e$ функция $f_0(\theta)$ зависит исключительно от поведения функции $\pi_0(\theta)$ в окрестности e точки θ_0.

На множестве e имеем по условию $\sigma(\theta) \in AC$, $0 < m \leqslant p(\theta) \leqslant M$; поэтому модули непрерывности $\omega'(\delta; p)$ и $\omega'(\delta; \ln p)$ одного порядка относительно δ; модуль непрерывности функции $\ln \pi_0(\theta) = -\frac{1}{2}\ln p(\theta) + it(\theta)$, а, следовательно, и функции $\pi_0(\theta)$, таков ([6] или [7]):

$$\omega'(\delta; \pi_0),\ \omega'(\delta; \ln \pi_0) \leqslant C\int_0^{\delta}\frac{\omega'(x; \ln p)}{x}\, dx \leqslant C_1\int_0^{\delta}\frac{\omega'(x; p)\, dx}{x}. \quad (4.23)$$

Воспользовавшись неравенством ([1], стр. 899—900)

$$\int_0^a \left\{\frac{\omega'(x; \pi_0)}{x}\right\}^2 dx \leqslant C_2\int_0^a \left\{\frac{\omega'(x; p)}{x}\right\}^2 dx, \qquad a < 1, \quad (4.24)$$

мы видим, что условие 8) достаточно для того, чтобы $\frac{\omega'(x; \pi_0)}{x} \in L_2$ — это эквивалентно условию $f_0^{(1)}(\theta) \in L_2^{\sigma}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Точно так же, аналогично (4.21) будем иметь $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha} = 1$, то при выполнении условия 8) имеем (2.1). В частности, для выполнения условия 8) достаточно условие

$$\omega'(\delta; p) \leqslant \frac{C\sqrt{\delta}}{\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha}}; \qquad \alpha > \frac{1}{2}. \quad (4.25)$$

При выполнении условия 9) мы имеем на основании условия 2) табл. IV неравенства для $\theta \in e' \subset e$

$$|\varphi_n(e^{i\theta})| \leqslant C, \qquad (n = 0, 1, \ldots). \quad (4.26)$$

В силу теорем 8 и 9 из [7] легко показать, что при

$$0 < m \leqslant p(\theta) \in C(e)$$

будет

$$\int_0^a \frac{\omega'(y;\, \pi_0)}{y}\, dy < C_1 \int_0^a \frac{\omega'(x;\, p) \ln \frac{1}{x}}{x}\, dx; \tag{4.27}$$

при условии 9) функция $f_0(\theta)$ суммируема на e'. Поэтому мы можем положить $f_0(\theta) = f_0^{(3)}(\theta) + f_0^{(4)}(\theta)$, где функция $f_0^{(3)}(\theta)$ ограничена на e', а

$$\int_{e'} |f_0^{(4)}(\theta)|\, d\theta < \varepsilon;$$

$\varepsilon > 0$ произвольно выбранная, сколь угодно малая величина; соответственно этому будем иметь

$$b_n = b_n^{(3)} + b_n^{(4)}, \quad c_n = c_n^{(3)} + c_n^{(4)}, \qquad (n = 0,\, 1,\, \ldots).$$

Так как функция $f_0^{(3)}(\theta)$ ограничена, то $f_0^{(3)}(\theta) \in L_2^\sigma$ и аналогично предыдущему найдем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{(3)} = \lim\limits_{n\to\infty} c_n^{(3)} = 0$.

Далее имеем по (4.22)

$$|b_n^{(4)}| \leqslant \frac{CM}{2\pi} \int_{e'} |f_0^{(4)}(\theta)|\, d\theta \leqslant \frac{CM}{2\pi}\, \varepsilon,$$

$$|c_n^{(4)}| \leqslant \frac{M}{2\pi} \int_{e'} |f_0^{(4)}(\theta)| \cdot \left\{ |\varphi_n^*(e^{i\theta})| + \frac{\alpha}{\alpha_n} |\pi_0(\theta)| \right\} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2\pi} \left\{ C + \frac{\alpha}{\alpha_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{p(\theta_0)}} \right\} \cdot \int_{e'} |f_0^{(4)}(\theta)|\, d\theta < C_2 \varepsilon;$$

таким образом, при условии 9) снова имеем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

В частности, для выполнения условия 9) достаточно условие

$$\omega'(\delta;\, p) \leqslant \frac{C}{\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha}}, \qquad \alpha > 2. \tag{4.28}$$

Отметим в заключение одну интересную нерешенную задачу.

В условии 8) табл. III глобальное условие (на отрезке $[-\pi, \pi]$) наименее ограничительно, как указано во введении — зато локальное условие значительно более ограничительно, чем условие 2); в условии 9) по сравнению с 8) глобальное условие усилено, а локальное — ослаблено.

Было бы весьма интересно видоизменить условия 8), 9), требуя в них непрерывности функции $p(\theta)$ не в окрестности точки θ_0, а лишь в этой точке (как это сделано в условиях 2), 3)) — однако, нам не удалось сделать это.

Таблица I

Каждое из условий достаточно для справедливости предельного соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta})$ всюду или почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$.

В условиях 4)—11) на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ имеем

$$\sigma(\theta) \in AC, \quad 0 < m \leqslant p(\theta) \leqslant M.$$

№	Условия, наложенные на параметры или на функцию $p(\theta)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$
1	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \lvert a_n\rvert^2 \ln^2 n < \infty$
2	$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
3	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lvert a_n\rvert < \infty$
4	$x^{-1}\omega_2^2(x; p) \ln \frac{1}{x} \in L_1$
5	$\omega_2(\delta; p) = o(\sqrt{\delta})$
6	$x^{-\frac{3}{2}}\omega_2(x; p) \in L_1$
7	$p(\theta) \in V$
8	Ряд Фурье функции $p(\theta)$ абсолютно сходится
9	$p(\theta) \in C, \quad \omega(\delta; p) \leqslant C\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-1-\alpha}, \quad \alpha > 0$
10	» $\quad x^{-1}\omega(x; p) \in L_1$
11	» $\quad \omega(\delta; p) = o\left\{\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right\}$

Таблица II

Каждое из условий достаточно для того, чтобы справедливость предельного соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta_0}) = \pi(e^{i\theta_0})$ зависела только от поведения функции $\sigma(\theta)$ в окрестности e точки θ_0.

Во всех условиях $p(\theta) \leqslant M$ на всем отрезке $[-\pi, \pi]$; кроме того, $\sigma(\theta) \in AC$ на e, $p(\theta_0) > 0$ и θ_0 точка Лебега функции $\frac{1}{p(\theta)} \in L_2$;

$$\frac{1}{p(\theta)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} (b_k \cos k\theta + c_k \sin k\theta), \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\sigma_1(\theta) = d_k + ie_k, \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

№	Условия, наложенные на функцию $\sigma(\theta)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$
1	Функция $\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma_1(\theta)}{p_0(\theta+\gamma)} \in L_1$ ограничена в окрестности точки $\gamma = 0$

Продолжение

№	Условия, наложенные на функцию $\sigma(\theta)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$
2	$\sum_{k=0}^{n-1} (b_k d_k + c_k e_k)\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leqslant C, \quad (n = 1, 2, \ldots)$
3	Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \{\lvert b_k\rvert + \lvert c_k\rvert\}$ суммируем методом средне-арифметических
4	$0 < m \leqslant p(\theta)$
5	$\sigma(\theta) \in AC$

Таблица III

Каждое из условий достаточно для справедливости предельного соотношения $\lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta_0}) = \pi(e^{i\theta_0})$.

Во всех условиях $\sigma(\theta) \in AC$ **и** $0 < m \leqslant p(\theta)$ **для** $\theta \in e$ *и* $p(\theta_0) > 0$.

№	Условия на $[-\pi, \pi]$	Условия в окрестности e точки θ_0
1	$\sigma(\theta) \in AC$ $0 < m \leqslant p(\theta) \leqslant M$	$p(\theta) - p(\theta_0) = O(\lvert\theta - \theta_0\rvert)$
2	Любое из условий 1)—4) табл. II	$\left\lvert \frac{1}{p(\theta)} - \frac{1}{p(\theta_0)} \right\rvert = \lambda(\lvert\theta - \theta_0\rvert), \quad \frac{\lambda(x)}{x} \in L_2$
3	» »	» » $p(\theta) \leqslant M, \quad \frac{\lambda(x)}{x} \in L_1$ $\omega_2'(\delta;\ p) \leqslant C\sqrt{\delta}$
4	» »	$p(\theta) \in C, \quad \omega'(\delta;\ p) \leqslant C\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-\alpha-1}, \quad \alpha > 0$
5	» »	» $\omega'(x;\ p)\, x^{-1} \in L_1$
6	» »	» $\omega'(\delta;\ p) = o\left\{\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right\}$
7	» »	$p(\theta) \in V$
8	$\ln p(\theta) \in L_1$	$p(\theta) \in C, \quad \omega'(x;\ p)\, x^{-1} \in L_2$
9	$\frac{1}{p(\theta)} \in L_1$	» $\omega'(x;\ p) \ln\frac{1}{x} \cdot x^{-1} \in L_1$
		В условии 8 предполагается, что можно найти такое число $0 < \beta < 1$, чтобы функция $x^{-\beta}\omega'(x;\ p)$ была невозрастающей при $x \geqslant 0$ [6].

Таблица IV

Каждое из условий 1)—5) достаточно для равномерной ограниченности ортонормальной системы в окрестности e точки θ_0, а условия 6), 7) — в точке θ_0.

Во всех условиях в окрестности e точки θ_0 имеем

$$\sigma(\theta) \in AC, \quad 0 < m \leqslant p(\theta); \quad p(\theta_0) > 0.$$

№	Условия, наложенные на функцию $p(\theta)$	
	На отрезке $[-\pi, \pi]$	В окрестности e точки θ_0
1	$\frac{1}{p(\theta)} \in L_1$	$p(\theta) \in C, \quad \omega'(\delta; p) \leqslant C\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-\alpha-1}, \quad \alpha > 0$
2	» »	» $\quad \omega'(x; p)\, x^{-1} \in L_1$
3	» »	» $\quad \omega'(\delta; p) = o\left[\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right]$
4	» »	$p(\theta) \in V$
5	» »	$p(\theta) \leqslant M, \quad \omega_2'(\delta; p) \leqslant C\sqrt{\delta}$
6	» » $\sigma(\theta) \in AC$	$p(\theta) - p(\theta_0) = O(\lvert\theta - \theta_0\rvert)$
7	$\frac{1}{p(\theta)} \in L_{1}$	$\left\lvert\frac{1}{p(\theta)} - \frac{1}{p(\theta_0)}\right\rvert = \lambda(\lvert\theta - \theta_0\rvert), \quad \frac{\lambda(x)}{x} \in L_2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.
2. С. Н. Бернштейн. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке. Собр. соч., т. II, (1954), 7—106.
3. Я. Л. Геронимус. Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения. «Зап. научно-исслед. ин-та матем. и мех. и ХМО», **19** (1948), 35—120.
4. Я. Л. Геронимус. Об асимптотических свойствах полиномов, ортогональных на единичном круге и некоторых свойствах положительных гармонических функций. «Изв. АН СССР, серия матем.», **14** (1950), 123—144.
5. Я. Л. Геронимус. О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге, или круговом секторе. «Матем. сб.», **38** (80) : 3 (1956), 319—330.
6. Я. Л. Геронимус. О некоторых теоремах вложения. «Изв. высш. учебн. завед. Математика», т. 1 (44), 1965.
7. Б. Л. Голинский. О локальном приближении двух сопряженных функций тригонометрическими многочленами. «Матем. сб.», 51 (93) : 4 1960, 401—426.
8. Я. Л. Геронимус. О сходимости интерполяционного процесса Лагранжа с узлами в корнях ортогональных многочленов. «Изв. АН СССР, серия матем.», 27 (1963), 529—560.
9. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М., Физматгиз, 1958.
10. У. Гренандер и Г. Сегё. Тёплицевы формы и их приложения. Изд-во иностр. лит., М., 1961.
11. С. Качмаж и Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, М., 1958.
12. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., ГТТИ, 1957.
13. И. И. Привалов. Интеграл Коши. Саратов, 1919.
14. Г. Сегё. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
15. G. Alexits, D. Králik. Uber die Bedeutung der strukturellen Eigenschaften einer Funktion für die Konvergenz ihrer Orthogonalentwicklungen. Acta sci. math. **18**. (1957), 131—139.
16. G. Baxter. A convergence equivalence related to polynomials orthogonal on the unit circle. Trans. Amer. Math. Soc., **99**, N3 (1961), 471—478.
17. G. Freud. Uber die Asymptotik orthogonaler Polynome. Acad. Serbe des sci, Pubs. Inst. Math., XI (1957), 19—32.
18. G. Freud. Eine Bemerkung zur asymptotischen Darstellung von Orthogonalpolynomen. Math Scand., **5**, N2 (1957), 285—290.
19. G. Freud. Uber einseitige Approximation durch Polynome. I. Acta sci. math. **16** (1955), 12—28.