О МАКСИМУМЕ НА ЛУЧЕ ПРОИЗВОДНОЙ ОТ МОНОТОННОЙ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ НОРМАЛЬНОГО ТИПА ПОРЯДКА ПОЛОВИНА

Н. И. Ахиезер

С. Н. Бернштейну [1] принадлежит следующая теорема:

Пусть $f(z)$ — вещественная целая функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, монотонная на вещественной оси и удовлетворяющая на ней неравенству

$$|f(x)| \leqslant 1.$$

В таком случае

$$|f'(x)| \leqslant \frac{\sigma}{\pi} \quad (-\infty < x < \infty),$$

где знак равенства может достигаться лишь в одной точке. Если это — точка $x = 0$, то экстремальная функция равна

$$\pm \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\sigma z} \frac{1 - \cos t}{t^2}\, dt.$$

Мы докажем здесь аналогичную теорему для целых функций порядка $^1/_2$.

Напомним, что целая функция $F(z)$ типа σ порядка $^1/_2$ характеризуется неравенством

$$\varlimsup_{|z| \to \infty} \frac{\ln |F(z)|}{\sqrt{|z|}} = \sigma.$$

Теорема. *Если $f(z)$ — вещественная целая функция типа $\leqslant \sigma$, порядка $^1/_2$, монотонная на луче $0 \leqslant x < \infty$ и удовлетворяющая на нем неравенству*

$$|f(x)| \leqslant 1,$$

то

$$|f'(x)| \leqslant \frac{\sigma^2}{8} \quad (0 \leqslant x < \infty),$$

где знак равенства достигается лишь в точке $x = 0$ и притом лишь на функции

$$\pm \left\{ 4 \int\limits_0^{\frac{1}{2}\sigma \sqrt{z}} [J_1(t)]^2 \frac{dt}{t} - 1 \right\}$$

(здесь $J_1(t)$ — функция Бесселя порядка 1).

Доказательство. Примем для определенности, что речь идет о функциях, неубывающих на луче $0 \leqslant x < \infty$, и поставим следующую вариационную задачу: среди всех вещественных целых функций $F(z)$ типа $\leqslant \sigma$ порядка $1/2$ найти ту, которая наименее уклоняется от нуля на луче $0 \leqslant x < \infty$, если ее производная во всех точках этого луча $\geqslant 0$ и по крайней мере в одной точке равна 1.

Пусть $F(z)$ — искомая функция, L — ее уклонение от нуля на луче $0 \leqslant x < \infty$, а $x_0 \geqslant 0$ — точка луча, в которой F' принимает значение 1. Докажем, что в таком случае

$$F(0) = -L, \ F(\infty) = L, \ x_0 = 0.$$

Действительно, если хотя бы одно из этих равенств не выполнено, то вещественная целая функция

$$F_1(z) = F(z + x_0) - \frac{F(x_0) + F(\infty)}{2},$$

принадлежащая тому же типу порядка $1/2$, что и $F(z)$, будет иметь на луче $0 \leqslant x < \infty$ уклонение от нуля, равное

$$L_1 = \frac{F(\infty) - F(x_0)}{2} < L,$$

хотя ее производная F_1' во всех точках этого луча $\geqslant 0$, а в точке $x = 0$ равна 1.

Из доказанного следует, что искомая функция $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z) = -L + \int_0^z \varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(z)$ — целая функция типа $\leqslant \sigma$ порядка $1/2$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$a) \qquad \varphi(x) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant x < \infty)$$

$$b) \qquad \int_0^\infty \varphi(t)\,dt = 2L$$

$$c) \qquad \varphi(0) = 1.$$

Так как $F(z^2)$ есть ограниченная на всей вещественной оси целая функция экспоненциального типа, то

$$\frac{d}{dx} F(x^2) = 2x\varphi(x^2)$$

также ограничена на вещественной оси. Отсюда благодаря свойству a) без большого труда выводится, что

$$\varphi(z) = [A(z)]^2 + z\,[B(z)]^2,$$

где $A(z)$, $B(z)$ — две вещественные целые функции типа $\leqslant \frac{1}{2}\sigma$ порядка $1/2$.

Поэтому наша вариационная задача состоит в следующем: $A(z)$, $B(z)$ пробегают совокупность всех вещественных целых функций типа $\leqslant \frac{1}{2}\sigma$ порядка $1/2$, причем $A(0) = 1$; требуется найти минимум величины

$$L = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{[A(x)]^2 + x\,[B(x)]^2\}\,dx.$$

Сразу видно, что $B(z)\equiv 0$, и значит подлежит минимизации величина

$$L=\frac{1}{2}\int_0^\infty [A(x)]^2\,dx=\int_0^\infty t\,[A(t^2)]^2\,dt$$

при условии

$$A(0)=1.$$

Так как $A(z^2)=g(z)$ есть четная целая функция экспоненциального типа $\leqslant\frac{1}{2}\sigma$, для которой

$$\int_0^\infty t\,|g(t)|^2\,dt<\infty,$$

то в силу одного обобщения теоремы Винера—Палея (см. [2], стр. 7—8) справедливо представление

$$A(z^2)=\int_0^{\frac{1}{2}\sigma} J_0(zu)\,h(u)\sqrt{u}\,du$$

и равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty t\,|A(t^2)|^2\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}\sigma}|h(u)|^2\,du.$$

Таким образом, наша задача состоит в нахождении минимума интеграла

$$L=\int_0^{\frac{1}{2}\sigma}|h(u)|^2\,du$$

при единственном условии

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sigma} h(u)\sqrt{u}\,du=A(0)=1.$$

Без всякого труда находим, что

$$h_{\text{extr}}(u)=\frac{8}{\sigma^2}\sqrt{u}.$$

Поэтому

$$A_{\text{extr}}(z)=\int_0^{\frac{1}{2}\sigma} J_0(u\sqrt{z})\,\frac{8}{\sigma^2}\,u\,du=\frac{8}{\sigma^2}\int_0^{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{z}} J_0(t)\,t\,dt=\frac{4}{\sigma\sqrt{z}}\,J_1\!\left(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{z}\right),$$

$$F_{\text{extr}}(z)=-\frac{8}{\sigma^2}+\frac{32}{\sigma^2}\int_0^{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{z}}[J_1(t)]^2\,\frac{dt}{t},$$

$$L_{\text{extr}}=\frac{8}{\sigma^2}.$$

Мы получили следующий результат: из всех вещественных целых функций $F(z)$ типа $\leqslant\sigma$ порядка $1/2$, производная которых на луче $0\leqslant x<\infty$ неотрицательна и в некоторых точках принимает значение 1, функция

$$F_0(z) = \frac{8}{\sigma^2}\left\{4\int\limits_0^{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{z}} [J_1(t)]^2\frac{dt}{t} - 1\right\}$$

наименее уклоняется от нуля на рассматриваемом луче, а величина ее уклонения равна

$$L_0 = \frac{8}{\sigma^2}.$$

Заметим теперь, что производная экстремальной функции равна

$$F_0'(z) = \left[2\,\frac{J_1\left(\frac{\sigma}{2}\sqrt{z}\right)}{\frac{\sigma}{2}\sqrt{z}}\right]^2,$$

и в силу формулы Пуассона

$$2\,\frac{J_1(t)}{t} = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 (1-u^2)^{1/2}\cos(ut)\,du$$

функция $F_0'(x)$ на луче $0 \leqslant x < \infty$ всюду $\leqslant 1$ и обращается в 1 лишь в точке $x = 0$.

Отсюда наша теорема следует немедленно. Действительно, пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям этой теоремы. Тогда

$$F(z) = \frac{8}{\sigma^2}f(z)$$

есть вещественная функция типа $\leqslant\sigma$ порядка $^1/_2$, для которой на луче $0 \leqslant x < \infty$

$$F'(x) \geqslant 0 \text{ и } |F(x)| \leqslant L_0.$$

В силу только что решенной вариационной задачи ни в одной точке луча $0 \leqslant x < \infty$ производная F' не может быть >1, так как тогда уклонение F превосходило бы L_0. Поэтому на луче $0 \leqslant x < \infty$

$$F'(x) \leqslant 1$$

и, значит,

$$f'(x) \leqslant \frac{\sigma^2}{8}.$$

Обратиться в 1 на луче $0 \leqslant x < \infty$ функция F' может лишь в точке $x = 0$ и лишь при $F(z) \equiv F_0(z)$. Тем самым все утверждения теоремы доказаны.

Заметим, что если в условиях нашей теоремы отбросить требование монотонности на луче $0 \leqslant x < \infty$ и даже вещественности, то, как показал С. Н. Бернштейн [3], справедливы следующие неравенства

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant \frac{k!}{(2k)!}\sigma^{2k} \quad (0 \leqslant x < \infty;\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где знак равенства достигается лишь в точке $x = 0$ и лишь при $f(x) = \pm\cos(\sigma\sqrt{x})$. В частности

$$|f'(x)| \leqslant \frac{\sigma^2}{2}.$$

Требование монотонности функции, как видим, уменьшает величину максимума модуля первой производной в четыре раза.

Заметим также, что наш результат можно рассматривать, как континуальный аналог теоремы Люкача [4], согласно которой для вещественного многочлена $P(x)$ степени n, монотонного в интервале $[-1,1]$, неравенство

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)| \leqslant 1$$

влечет для производной в каждой точке $x \in [-1,1]$ неравенство

$$|P'(x)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{(n+1)^2}{4} & \text{(при нечетном } n\text{)} \\ \dfrac{n(n+2)}{4} & \text{(при четном } n\text{).} \end{cases}$$

Сравнивая с неравенством А. А. Маркова, мы заключаем, что и здесь требование монотонности приводит к уменьшению максимума модуля в четыре раза, но только асимптотически (при $n \to \infty$).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. О верхней границе максимума модуля производной монотонной функции конечной степени. «Докл. АН СССР», **51**, 1946, стр. 567—568.

2. Н. И. Ахиезер. К теории спаренных интегральных уравнений. «Зап. матем. отд. физико-матем. факультета ХГУ и харьковск. матем. об-ва», том XXV, 1957, стр. 5—31.

3. С. Н. Бернштейн. Функции конечной степени и конечной полустепени. «Изв. АН СССР, серия матем.», **13**, 1949, стр. 111—124.

4. F. Lukács, Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome. Math. Zeitschr., **2**, 1918.