ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Н. И. Ахиезер

§ 1. **Чебышевские задачи в классе целых функций экспоненциального типа.** Мы имеем в виду различные задачи, в которых ищется целая функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ (а не многочлен степени $\leqslant n$) из условия, чтобы некоторое выражение наименее уклонялось от нуля на всей числовой оси. Первым изучением и даже постановкой задач этого рода мы обязаны С. Н. Бернштейну.

В достаточно общем виде наша проблема формулируется следующим образом: даны вещественные функции $\Phi(x) > 0$, $s(x)$, $t(x)$ $(-\infty < x < \infty)$; ищется в классе всех целых функций $g(x)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ та, для которой величина

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|t(x) - s(x)g(x)|}{\Phi(x)}$$

имеет наименьшее значение.

Если мы обозначим через C_Φ линейное нормированное пространство всех непрерывных функций $\psi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, для которых

$$\|\psi\|_\Phi \equiv \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|\psi(x)|}{\Phi(x)} < \infty,$$

то в нашей задаче, при $s(x) = 1$, содержится задача о наилучшем приближении элемента пространства C_Φ при помощи целой функции экспоненциального типа.

Полагая $\Phi(x) = 1$ и беря в качестве $t(x)$ многочлен $Q(x)$ степени $m-1$, а вместо $s(x)$ многочлен $P(x)$ степени m, мы придем к следующей задаче: среди всех целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, которые в заданных m точках (корнях многочлена $P(x)$) принимают заданные значения (а именно, те же, что и многочлен $Q(x)$), найти ту, которая наименее уклоняется от нуля на всей числовой оси*.

В этой задаче содержатся аналоги различных классических задач о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля. Она напоминает также известные задачи об ограниченных аналитических функциях в круге, а именно проблему коэффициентов Каратеодори—Фейера и интерполяционную проблему Пика—Неванлинна.

Хорошо известно, что в критериях для многочленов, наименее уклоняющихся от заданной функции, фигурирует число точек уклонения. Это число точек должно быть достаточно большим, а именно не меньше, чем $n+2$, если речь идет об аппроксимации многочленом степени n.

---

* Легко видеть, как изменяется эта формулировка, если многочлен $P(x)$ имеет кратные корни.

Можно ожидать, что при переходе от многочленов к целым фуциям экспоненциального типа критерии для экстремальных функц должны иметь тот же характер, но некоторое усложнение должно во никнуть в связи с тем, что множество точек уклонения перестает бы конечным, а при подсчете «числа» точек уклонения эти точки долж быть учтены все до единой. Оказалось, что для выхода из затрудне нужно определять число точек уклонения по росту вдоль мнимой о целой функции, обращающейся в нуль на некотором множестве точ уклонения и только на нем. Разъясним здесь же, как эти множест определяются.

Пусть $F(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ — некоторая ограниченная вещественн функция, а

$$L = \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x)|$$

— ее уклонение от нуля (или просто уклонение). Если $F(x)$ принима хотя бы по одному разу оба значения $\pm L$, то можно ввести в рассм трение конечные или бесконечные последовательности точек

$$\cdots < x_j < x_{j+1} < x_{j+2} < \cdots,$$

в которых $F(x)$ поочередно принимает значения L и $-L$. Каждую таку последовательность точек назовем чебышевским множеством функции $F(x$ Может случиться, что среди чебышевских множеств функции $F($ имеется такое, которое не является правильной частью какого-нибу другого чебышевского множества этой функции В таком случае назов его максимальным чебышевским множеством, а о функции $F(x)$ буде говорить, что она обладает максимальным чебышевским множество Легко видеть, что всякая вещественная аналитическая на всей вещ ственной оси функция $F(x)$, принимающая оба значения L и $-$ обладает максимальным чебышевским множеством. В качестве приме функции, не имеющей максимального чебышевского множества, укаж функцию

$$F(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Говоря о функциях, имеющих чебышевские множества, мы можем н упоминать об их вещественности.

§ 2. **Аналоги теорем П. Л. Чебышева и Валле-Пуссена.** Будем рас сматривать общую проблему, сформулированную в начале предыдущег параграфа, однако сделаем некоторые дополнительные предположени относительно функций $s(x)$ и $\Phi(x)$, а именно, предположим, что $s(x$ есть целая функция минимального экспоненциального типа, удовлетво ряющая неравенствам:

$$s(x) \geqslant 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ s(x)}{1 + x^2}\, dx < \infty\ ,$$

а $\Phi(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$1 \leqslant \Phi(x) \leqslant |\Phi_\sigma(x)| \qquad (-\infty < x < \infty),$$

где $\Phi_\sigma(z)$ — некоторая σ — мажоранта*. Для того, чтобы $\Phi(x)$ такой мажорантой обладала, необходимо выполнение неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \Phi(x)}{1+x^2}\,dx < \infty.$$

Функцию $s(z)$ мы можем представить в виде

$$s(z) = \theta(z)\,\bar{\theta}(z),$$

где $\theta(z)$ — целая функция минимального экспоненциального типа, не имеющая корней в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Условившись во всем этом, мы можем сформулировать аналог теоремы П. Л. Чебышева.

Теорема 1. *Пусть $t(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ — вещественная непрерывная функция, а $g(x)$ — вещественная целая функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, для которой*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \frac{|t(x) - s(x)\,g(x)|}{\Phi(x)} = E_g < \infty.$$

Далее, пусть функция

$$\frac{t(x) - s(x)\,g(x)}{\Phi(x)}$$

*имеет чебышевское множество***

$$\cdots < \lambda_{j-1} < \lambda_j < \lambda_{j+1} < \cdots \tag{1}$$

и пусть это множество совпадает с совокупностью корней вещественной функции $\Omega(z)$ экспоненциального типа. Если

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y\Phi_\sigma(iy)}{[\theta(iy)]^2\,\Omega(iy)} = 0 \tag{2}$$

и если значения отношения

$$\frac{|t(x)|}{\Phi(x)}$$

в вещественных корнях функции $s(x)$ отличны от E_g, то для всякой функции $G(x)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, отличной от $g(x)$, имеет место неравенство

$$E_G > E_g,$$

то есть уклонение функции $g(x)$ является наименьшим и $g(x)$ есть единственная функция, обладающая этим свойством.

Доказательство. Начнем с представления функции $\Omega(z)$ в виде бесконечного произведения. Если принять, чем общность не нарушается, что все λ_j отличны от нуля, то это представление можно записать в виде

$$\Omega(z) = e^{\alpha z} \prod_j \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) e^{\frac{z}{\lambda_j}},$$

где α — вещественная постоянная, которая может иметь любое значение.

---

* Целая функция $\omega(z)$ экспоненциального типа σ называется σ-мажорантой, если для всякой целой функции $\varphi(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющей неравенству

$$|\varphi(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

имеет место неравенство

$$|\varphi(z)| \leqslant |\omega(z)| \quad (\operatorname{Im} z \geqslant 0),$$

а значит и неравенство

$$|\varphi(z)| \leqslant |\bar{\omega}(z)| \quad (\operatorname{Im} z \leqslant 0).$$

** Не обязательно максимальное.

Покажем прежде всего, что при надлежащем выборе этой постоянной индикаторная диаграмма функции $\Omega(z)$ будет содержать отрезок мнимой оси $[-i\sigma, i\sigma]$. С этой целью заметим, что по свойству σ — мажоранты функция $\Phi_\sigma(z)$ удовлетворяет при любом $y>0$ неравенству

$$|\Phi_\sigma(iy)| \geqslant e^{\sigma y}, \tag{3}$$

так как на вещественной оси

$$|e^{-i\sigma x}| = 1, \quad |\Phi_\sigma(x)| \geqslant 1.$$

Благодаря неравенству (3) из соотношения (2) следует, что

$$\lim_{y\to\infty} \frac{ye^{\sigma y}}{\Omega(iy)[\theta(iy)]^2} = 0,$$

поэтому *

$$h_\Omega\left(\frac{\pi}{2}\right) = \overline{\lim_{y\to\infty}} \frac{\ln|\Omega(iy)|}{y} \geqslant \sigma. \tag{4}$$

В силу вещественности функции $\Omega(z)$ ее индикаторная диаграмма симметрична относительно вещественной оси и, следовательно, содержит благодаря неравенству (4) отрезок длины 2σ, параллельный мнимой оси и симметричный относительно вещественной оси. При изменении вещественного числа α этот отрезок перемещается параллельно вещественной оси, откуда и вытекает справедливость нашего утверждения. Итак, примем, что α выбрано указанным способом. В таком случае мы можем написать неравенство

$$h_\Omega(\vartheta) \geqslant \sigma|\sin\vartheta|.$$

Теперь уже займемся доказательством теоремы, которое будем вести от противного. Поэтому примем, что существует целая функция $G(z) \not\equiv g(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, для которой $E_G \leqslant E_g$. В таком случае разность

$$H(x) = g(x) - G(x)$$

в каждой из точек (I) либо имеет тот же знак, что и $g(x)$, либо имеет корень четной кратности. Поэтому в каждом из интервалов $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ эта разность имеет корень, который мы обозначим μ_j. Если, например,

$$H(\lambda_k) > 0, \quad H(\lambda_{k+1}) = 0, \quad H(\lambda_{k+2}) > 0,$$

то можно положить

$$\mu_k = \lambda_{k+1}, \quad \mu_{k+1} = \lambda_{k+1}.$$

Примем для простоты, что ни одно из чисел μ_j не равняется нулю и построим бесконечное произведение

$$\Omega_1(z) = e^{\beta z}\prod_j \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right) e^{\frac{z}{\mu_j}},$$

---

* Действительно,

$$\frac{1}{y}\ln|\Omega(iy)| = \sigma + \frac{1}{y}\ln y - \frac{2}{y}\ln|\theta(iy)| + \frac{1}{y}\ln\left|\frac{\Omega(iy)[\theta(iy)]^2}{ye^{\sigma y}}\right|,$$

так что для всех достаточно больших y

$$\frac{1}{y}\ln|\Omega(iy)| \geqslant \sigma - \frac{2}{y}\ln|\theta(iy)|.$$

Значит,

$$\overline{\lim_{y\to\infty}} \frac{\ln|\Omega(iy)|}{y} \geqslant \sigma - 2\,\overline{\lim_{y\to\infty}} \frac{\ln|\theta(iy)|}{y} = \sigma.$$

которое, как легко видеть, представляет целую функцию экспоненциального типа. Вещественное число β подберем так, чтобы

$$\psi(z) \equiv \frac{\Omega_1(z)}{\Omega(z)} = \prod_j \frac{1-\frac{z}{\mu_j}}{1-\frac{z}{\lambda_j}}.$$

Такой выбор числа β возможен. Действительно,

$$\psi(z) = e^{(\beta-\alpha)z} \prod_j \frac{1-\frac{z}{\mu_j}}{1-\frac{z}{\lambda_j}} e^{\left(\frac{1}{\mu_j}-\frac{1}{\lambda_j}\right)z},$$

а так как ряд

$$\sum_j \left(\frac{1}{\mu_j}-\frac{1}{\lambda_j}\right)$$

сходится, то

$$\exp\left\{\sum_j \left(\frac{1}{\mu_j}-\frac{1}{\lambda_j}\right) z\right\}$$

можно вынести за знак бесконечного произведения, и остается положить

$$\beta = \alpha - \sum_j \left(\frac{1}{\mu_j}-\frac{1}{\lambda_j}\right).$$

Целая функция $H(z)$ делится на $\Omega_1(z)$. Поэтому отношение

$$\varphi(z) = \frac{H(z)}{\Omega_1(z)}$$

есть снова целая функция и притом экспоненциального типа, как это известно из теории целых функций. Мы докажем, что $\varphi(z) = 0$, а значит, и $H(z) = 0$; тем самым получим противоречие, откуда и будет следовать справедливость доказываемой теоремы.

Доказательство равенства $\varphi(z) = 0$ разобьем на несколько частей.

1°. Прежде всего заметим, что функция $H_1(z) = [\theta(z)]^2 H(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |H_1(x)|}{1+x^2}\, dx < \infty.$$

Действительно, при $-\infty < x < \infty$

$$|H_1(x)| = |s(x)\{g(x) - G(x)\}| \leqslant |t(x) - s(x) g(x)| + \\ + |t(x) - s(x) G(x)| \leqslant 2E_g \Phi(x) \leqslant 2E_g |\Phi_\sigma(x)| \qquad (5)$$

и, значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |H_1(x)|}{1+x^2}\, dx \leqslant \pi \ln^+ (2E_g) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\Phi(x)|}{1+x^2}\, dx,$$

а интеграл правой части конечен.

Отсюда можно заключить*, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln |H_1(re^{i\vartheta})|}{r} = \tau \sin\vartheta \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi),$$

* На основании одной теоремы М. Картрайт.

где $\tau = h_{H_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если r выпускает некоторое множество нулевой плотности. В том же смысле справедливы равенства

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|\theta(re^{i\vartheta})|}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|\theta(re^{-i\vartheta})|}{r} = 0,$$

а значит, и равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|H(re^{i\vartheta})|}{r} = \tau|\sin\vartheta| \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi), \tag{6}$$

так как функция $H(z)$ вещественна. Из (6) между прочим следует, что τ есть тип функции $H(z)$ и, следовательно, $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma$.

2°. Докажем, что каждая из функций $\frac{\psi(z)}{z}$, $\frac{1}{z\psi(z)}$ ограничена в областях

$$|z| \geqslant 1, \quad \left|\pm\frac{\pi}{2} - \arg z\right| < \delta, \tag{7}$$

каково бы ни было положительное число $\delta < \frac{\pi}{2}$.

В самом деле,

$$\psi(z) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(z),$$

где

$$\psi_n(z) = \prod_{k=-n}^{n} \frac{1 - \frac{z}{\mu_k}}{1 - \frac{z}{\lambda_k}}.$$

Из того, как определяются числа μ_k, следует, что после сокращения $\psi_n(z)$ представится как отношение двух многочленов с перемежающимися корнями, поэтому

$$\psi_n(z) = A + \sum_{k=-n}^{n} \frac{B_k}{z - \lambda_k},$$

где отличные от нуля коэффициенты B_k имеют один и тот же знак. Так как $\psi_n(0) = 1$, то

$$\frac{\psi_n(z) - 1}{z} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{B_k}{\lambda_k(z - \lambda_k)}$$

и

$$\psi_n'(0) = -\sum_{k=-n}^{n} \frac{B_k}{\lambda_k^2}.$$

Из этих соотношений следует, что в углах (7)

$$\frac{|\psi_n(z) - 1|}{|z|} \leqslant \frac{1}{\cos\delta} \sum_{k=-n}^{n} \frac{|B_k|}{\lambda_k^2} = \frac{|\psi_n'(0)|}{\cos\delta}$$

и значит,

$$\frac{|\psi(z) - 1|}{z} \leqslant \frac{|\psi'(0)|}{\cos\delta}.$$

Так как $\psi(z)$ и $\frac{1}{\psi(z)}$ равноправны, то в углах (7) справедливо также неравенство

$$\frac{1}{|z|}\left|\frac{1}{\psi(z)}-1\right| \leqslant \frac{|\psi'(0)|}{\cos\delta}.$$

Заметим между прочим, что из доказанного факта следует равенство индикаторов

$$h_{\Omega_1}(\vartheta) = h_{\Omega}(\vartheta).$$

3°. Рассмотрим функцию $\varphi(z)$ на мнимой оси. Так как $\Phi_\sigma(z)$ мажоранта и имеет место неравенство (5), то при $y > 0$

$$|H_1(iy)| \leqslant 2E_g|\Phi_\sigma(iy)|$$

и поэтому

$$|\varphi(iy)| = \frac{|H_1(iy)|}{|\Omega_1(iy)[\theta(iy)]^2|} \leqslant 2L_g\frac{|\Phi_\sigma(iy)|}{|\Omega(iy)\psi(iy)|\cdot|\theta(iy)|^2} =$$

$$= 2E_g\left|\frac{y\Phi_\sigma(iy)}{\Omega(iy)[\theta(iy)]^2}\right|\cdot\frac{1}{|y\psi(iy)|}.$$

В силу доказанного в пункте 2 и условия теоремы правая часть, а значит, и $\varphi(iy)$ стремится к нулю при $y\to\infty$. То же верно и при $y\to-\infty$. Таким образом, функция $\varphi(z)$ на мнимой оси ограничена и поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+|\varphi(iy)|}{1+y^2}\,dy < \infty.$$

Снова используя теорему М. Картрайт, найдем, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|\varphi(re^{i\vartheta})|}{r} = \begin{cases}\tau_1\cos\vartheta & \left(|\vartheta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\\ \tau_2|\cos\vartheta| & \left(|\pi-\vartheta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right),\end{cases} \tag{8}$$

если только r выпускает некоторое множество нулевой плотности. Здесь τ_1, τ_2 — две константы, сумма которых представляет ширину индикаторной диаграммы функции $\varphi(z)$ по вещественной оси, и поэтому эта сумма $\geqslant 0$.

4°. На основании представления

$$\Omega_1(z) = \frac{H(z)}{\varphi(z)},$$

соотношений (6) и (8), а также теоремы В. Бернштейна* получаем равенства

$$h_{\Omega_1}(\vartheta) = \tau\sin\vartheta - \tau_1\cos\vartheta \quad \left(0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$h_{\Omega_1}(\vartheta) = \tau\sin\vartheta + \tau_2\cos\vartheta \quad \left(\frac{\pi}{2}\leqslant\vartheta\leqslant\pi\right). \tag{9}$$

---

* Согласно теореме В. Бернштейна, на любом луче $\arg z = \vartheta$ $(0<|\vartheta|<\pi)$ при произвольных $\delta>0$, $\varepsilon>0$, $0<\gamma<1$ можно найти последовательность интервалов

$$r_n < r < r_n(1+\delta) \quad (r_n\to\infty),$$

в каждом из которых неравенство

$$\ln|\Omega_1(re^{i\vartheta})| > [h_{\Omega_1}(\vartheta)-\varepsilon]\,r$$

выполняется всюду, кроме, быть может, множества меры $\leqslant\gamma\delta r_n$.

Но в пункте 2 мы установили, что

$$h_{\Omega_1}(\vartheta) = h_{\Omega}(\vartheta),$$

а еще ранее, что

$$h_{\Omega}(\vartheta) \geqslant \sigma |\sin\vartheta|.$$

Поэтому из равенств (9) следует, что

$$\tau\sin\vartheta \geqslant \sigma\sin\vartheta + \tau_1\cos\vartheta \quad \left(0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tau\sin\vartheta \geqslant \sigma\sin\vartheta - \tau_2\cos\vartheta \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \pi\right).$$

Так как обе константы τ_1, τ_2 не могут быть отрицательными и $\tau \leqslant \sigma$, то обе они должны равняться нулю.

Итак, установлено, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|\varphi(re^{i\vartheta})|}{r} = 0 \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi),$$

если r выпускает некоторое множество нулевой плотности. Но в таком случае $\varphi(z)$ есть функция минимального экспоненциального типа. Эта функция, как мы видели, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{y\to\infty} \varphi(\pm iy) = 0,$$

поэтому она есть тождественный нуль, и доказательство теоремы закончено.

Совершенно аналогично доказывается следующий аналог теоремы Валле — Пуссена.

Теорема 2. *Пусть функция*

$$\frac{t(x) - s(x)g(x)}{\Phi(x)}$$

на вещественной оси ограничена и на последовательности

$$\cdots < \lambda_{j-1} < \lambda_j < \lambda_{j+1} < \cdots \tag{10}$$

принимает знакопеременные значения

$$\ldots, (-1)^{j-1}M_{j-1}, \quad (-1)^j M_j, \quad (-1)^{j+1} M_{j+1}, \ \ldots \qquad (M_k > 0).$$

Если последовательность (10) *совпадает с совокупностью корней вещественной целой функции* $\Omega(z)$ *экспоненциального типа и*

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y\Phi_\sigma(iy)}{\Omega(iy)[\theta(iy)]^2} = 0,$$

то для всякой целой функции $G(x)$ *экспоненциального типа* $\leqslant \sigma$

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \frac{|t(x) - s(x)G(x)|}{\Phi(x)} \geqslant \inf_k M_k.$$

§ 3. **Простейший пример:** в классе K^σ целых функций $F(x)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих условиям

$$F(iq) = \xi + i\eta, \quad F(-iq) = \xi - i\eta, \tag{1}$$

где число $q > 0$ и вещественные числа ξ, η заданы, найти ту, которая наименее уклоняется от нуля на вещественной оси.

$F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \xi + \frac{\eta}{q} x - (x^2 + q^2) G(x),$$

где $G(x)$ пробегает совокупность всех целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$. Таким образом, желая применить теорему 1 предыдущего параграфа, мы должны положить

$$s(x) = x^2 + q^2, \quad \theta(x) = x + iq, \quad \Phi(x) = 1, \quad \Phi_\sigma(x) = e^{-i\sigma x}$$

Возьмем функцию

$$F_0(x) = \frac{\xi \cos \sigma x}{\operatorname{ch} \sigma q} + \frac{\eta \sin \sigma x}{\operatorname{sh} \sigma q}, \tag{2}$$

которая, очевидно, принадлежит классу K^σ. Ее уклонение от нуля на вещественной оси равно

$$L = \sqrt{\frac{\xi^2}{\operatorname{ch}^2 \sigma q} + \frac{\eta^2}{\operatorname{sh}^2 \sigma q}} \tag{3}$$

и достигается с чередующимися знаками в точках

$$\lambda_k = \gamma + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sigma} \quad (k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

где γ — некоторая вещественная постоянная. Точки уклонения совпадают с корнями функции

$$\cos \sigma (z - \gamma) = \Omega(z).$$

Так как при $y \to \infty$

$$\frac{y \Phi_\sigma(iy)}{\Omega(iy)[\theta(iy)]^2} = -\frac{y e^{\sigma y}}{(y + q)^2 \cos \sigma (iy - \gamma)} \to 0,$$

то, по теореме 1, § 2, функция $F_0(x)$ есть единственная экстремальная функция, а L — ее уклонение.

Полученный результат можно представить в другой форме. Для этого обозначим через R^σ совокупность всех вещественных функций $f(x)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих неравенству

$$-1 \leqslant f(x) \leqslant 1 \quad (-\infty < x < \infty),$$

и поставим следующий вопрос: какова область значений, принимаемых функциями класса R^σ в заданной точке iq $(q > 0)$. Полагая

$$f(iq) = \xi + i\eta, \tag{4}$$

мы видим из предыдущего, что искомая область ограничена эллипсом

$$\frac{\xi^2}{\operatorname{ch}^2 \sigma q} + \frac{\eta^2}{\operatorname{sh}^2 \sigma q} = 1 \tag{5}$$

с полуосями $\operatorname{ch} \sigma q$ и $\operatorname{sh} \sigma q$. Если точка (ξ, η) лежит на эллипсе, то в R^σ существует только одна функция, удовлетворяющая условию (4). Всякой внутренней точке отвечает бесчисленное множество таких функций. Например, проводя (различными способами) через точку (ξ, η) прямую, возьмем точки (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), в которых она встречает эллипс (5), и если точка (ξ, η) делит полученную хорду в отношении λ, то, полагая

$$f(x) = \frac{f_1(x) + \lambda f_2(x)}{1 + \lambda},$$

мы получим функцию класса R^σ, если $f_1(x)$, $f_2(x)$ — те единственные функции класса R^σ, которые отвечают концам хорды.

Рассмотрим предельный случай нашей задачи, для которого $q=0$ Вместо (1), мы будем иметь здесь следующие условия:

$$F(0)=a, \quad F'(0)=b.$$

В этой задаче экстремальная функция имеет вид

$$a\cos\sigma x+\frac{b}{\sigma}\sin\sigma x,$$

а наименьшее уклонение равно

$$\sqrt{a^2+\frac{b^2}{\sigma^2}}.$$

Если $b=0$, то решений будет бесчисленное множество; например, можно взять

$$a\cos\tau x$$

при любом τ, удовлетворяющем неравенству $0\leqslant\tau\leqslant\sigma$.

§ 4. **Интерполяционная вариационная задача в классе целых функций экспоненциального типа.** Об этой задаче уже было сказано в § 1. Теперь мы займемся ее решением. Приведем вначале точную формулировку задачи.

Пусть дана конечная система узловых точек ζ и в каждой из них некоторое интерполяционное условие

$$F(\zeta)=\gamma_0, \quad F'(\zeta)=\gamma_1, \ \ldots, \ F^{(r-1)}(\zeta)=\gamma_{r-1},$$

кратность которого r для каждой узловой точки своя Однако невещественные узлы и соответствующие интерполяционные условия должны быть попарно сопряженными, а при вещественном ζ соответствующие числа γ должны быть вещественными и кратность r должна быть четной Пусть класс всех целых функций $F(z)$ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$, удовлетворяющих всем рассматриваемым условиям, есть K^σ. Задача состоит в том, чтобы в классе K^σ найти ту функцию, для которой уклонение

$$L_F=\sup_{-\infty<x<\infty}|F(x)|$$

имеет наименьшее значение.

Введем в рассмотрение многочлен $P(z)$, старший коэффициент которого равен 1 и корни которого совпадают с правильно (то есть с учетом кратностей) выписанными узлами интерполяции. Этот многочлен, очевидно, удовлетворяет неравенству

$$P(x)\geqslant 0 \quad (-\infty<x<\infty).$$

Пусть $2l+2$ — его степень. Пусть далее $Q(z)$ — многочлен степени $\leqslant 2l+1$, удовлетворяющий всем рассматриваемым интерполяционным условиям. В таком случае класс K^σ совпадает с совокупностью всех функций $F(z)$, имеющих вид

$$F(z)=Q(z)+P(z)G(z),$$

где $G(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\leqslant\sigma$.

Убедимся прежде всего в том, что наша вариационная задача имеет решение. С этой целью возьмем тригонометрическую сумму

$$S(z)=a_0+\sum_{k=1}^{l}\left(a_k\cos\frac{k\tau z}{l+1}+b_k\sin\frac{k\tau z}{l+1}\right)+a_{l+1}\cos\tau z,$$

где число τ, $0<\tau<\sigma$, выбрано так, чтобы из корней многочлена $P(z)$ никакие два не были сравнимы по модулю $\frac{2\pi}{\tau}$. Тогда коэффициенты этой тригонометрической суммы определятся (и даже однозначно), если потребовать, чтобы разность $S(z)-Q(z)$ имела все корни многочлена $P(z)$. Так как уклонение L_S будет конечным, то класс K^σ содержит функции, ограниченные на вещественной оси, и, значит, наша задача имеет смысл.

Искомое наименьшее уклонение L наверно $\leqslant L_S$ и во всяком случае в классе K^σ найдется последовательность $\{F_k(z)\}_1^\infty$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} L_{F_k}=L.$$

Но эта последовательность $\{F_k(z)\}_1^\infty$ представляет компактное множество и поэтому содержит подпоследовательность $\{F_{k_i}(z)\}_{i=1}^\infty$, которая равномерно сходится в каждой конечной части плоскости. Предельная функция, назовем ее $f(z)$, очевидно, и будет экстремальной. Таким образом,

$$L=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|\leqslant\sup_{-\infty<x<\infty}|F(x)|,$$

где $F(z)$ — произвольная функция класса K^σ.

Теперь займемся изучением свойств экстремальной функции $f(z)$. Заметим прежде всего, что $f(z)$ — вещественная функция. Далее, $f(z)$ должна иметь бесчисленное множество корней. В самом деле, в противном случае она представлялась бы в виде

$$M(z)\,e^{\alpha z},$$

где $M(z)$ — вещественный многочлен, а α — вещественная постоянная. Но функция такого вида не может быть ограниченной на вещественной оси.

Возьмем какой-нибудь вещественный многочлен $\gamma(z)$ степени $2l+2$, на который $f(z)$ делится. Мы можем принять, что старший коэффициент этого многочлена равен 1. Затем построим целую функцию

$$\varphi(z)=\frac{P(z)}{\gamma(z)}f(z),$$

которая в корнях многочлена $P(z)$ обращается в 0. Тогда функция

$$f_\delta(z)=f(z)-\delta\varphi(z)=f(z)\left\{1-\delta\frac{P(z)}{\gamma(z)}\right\}\tag{1}$$

будет принадлежать классу K^σ при любом вещественном δ.

Из рассмотрения этой функции вытекает ряд фактов.

1°. Если значения $|Q(z)|$ в вещественных корнях многочлена $P(z)$ отличны от L и, следовательно, $<L$ (условимся называть этот случай нормальным), то число пар комплексно сопряженных корней функции $f(z)$ не может быть больше* l. Действительно, в противном случае мы могли бы

* Так как $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа с конечным числом комплексных корней, то, имея бесконечное число вещественных корней одного знака, она должна иметь бесконечное число вещественных корней и противоположного знака.

взять в качестве $\gamma(z)$ многочлен, положительный на вещественной оси. Но тогда при достаточно малом положительном δ мы имели бы в каждой точке $x \in (-\infty, \infty)$, лежащей вне некоторых ε-окрестностей вещественных корней многочлена $P(z)$, неравенство

$$|f_\delta(x)| \leqslant |f(x)| \{1-\delta\alpha\} \leqslant L(1-\alpha\delta),$$

где α — какое-то положительное число. А так как в вещественных корнях многочлена $P(z)$ по условию $|f(x)| < L$, то в исключенных окрестностях также

$$|f_\delta(x)| < L.$$

Таким образом уклонение целой функции $f_\delta(x)$ оказалось бы меньшим, чем L, что и доказывает наше утверждение.

2°. Экстремальная функция $f(x)$ принимает по крайней мере одно из значений $\pm L$. Действительно, допустим противное и рассмотрим функцию $f_\delta(x)$ при положительном δ. Возьмем столь большой интервал $-N \leqslant x \leqslant N$, чтобы вне его (на оси $-\infty < x < \infty$)

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{P(x)}{\gamma(x)} \leqslant 2. \qquad (2)$$

Тогда при $\delta < \frac{1}{2}$ вне интервала $[-N, N]$ будет иметь место неравенство

$$|f_\delta(x)| \leqslant L\left(1-\frac{1}{2}\delta\right) < L. \qquad (3)$$

Что же касается интервала $[-N, N]$, то по условию в нем

$$|f(x)| \leqslant L-\alpha,$$

где α — некоторое положительное число. Беря δ настолько малым, чтобы

$$\max_{-N \leqslant x \leqslant N} \delta \cdot |\varphi(x)| \leqslant \frac{\alpha}{2},$$

найдем, что в интервале $[-N, N]$ будет выполняться неравенство

$$|f_\delta(x)| \leqslant L - \frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, уклонение функции $f_\delta(x)$ меньше L, и наше утверждение доказано.

3°. Если имеет место нормальный случай, то $f(x)$ принимает оба значения $\pm L$. *Допуская противное, предположим, что* $f(x)$ *принимает только значение* $+L$. Снова возьмем функцию $f_\delta(x)$ с положительным δ, но многочлен $\gamma(x)$ построим специальным образом, а именно: примем в качестве наибольшего корня многочлена $\gamma(x)$ вещественный корень функции $f(x)$, ближайший слева к какой-нибудь из точек оси, где $f(x) = L$. Назовем этот корень μ_{2l+2}. В качестве корня $\mu_{2l+1} \leqslant \mu_{2l+2}$ возьмем ближайший к μ_{2l+2} слева вещественный корень функции $f(x):(x-\mu_{2l+2})$. Если левее точки μ_{2l+1} нет точек, где $f(x) = L$, то остальные корни $\gamma(x)$ выберем совершенно произвольно среди вещественных корней функции $f(x)$, лежащих левее μ_{2l+1}. Если же точка оси, где $f(x) = L$, левее μ_{2l+1} найдется, то ближайший к ней слева вещественный корень функции $f(x)$ примем за μ_{2l}. Подобно предыдущему выберем μ_{2l-1} и т. д.

Предоставим читателю проверку того, что при таком построении многочлена $\gamma(x)$ функция $f_\delta(x)$ будет менее уклоняться от 0, чем $f(x)$, если число $\delta > 0$ достаточно мало.

4°. Таким образом, принимая оба значения $\pm L$, функция $f(x)$ в нормальном случае обладает чебышевскими множествами. В силу своей аналитичности $f(x)$ имеет по крайней мере одно максимальное чебышевское множество. Пусть оно будет

$$\cdots < \lambda_{j-1} < \lambda_j < \lambda_{j+1} < \cdots$$

В каждом интервале $(\lambda_j, \lambda_{j+1})$ выберем по одному корню функции $f(x)$. Сделаем это следующим образом: если $f(x)$ в интервале $(\lambda_j, \lambda_{j+1})$ не принимает значения $f(\lambda_{j+1})$, то возьмем самый правый корень в этом интервале; в противном случае возьмем самый левый корень. Выбранный корень обозначим μ_j. Остальные вещественные корни функции $f(x)$ назовем лишними. В каждом из интервалов $(\lambda_j, \lambda_{j+1})$ будет четное число лишних корней. Нетрудно видеть, что лишние корни входят парами $\{\alpha, \alpha'\}$ таким образом, что

$$\max_{\alpha \leqslant x \leqslant \alpha'} |f(x)| < L.$$

Пусть теперь m (a priori $\leqslant \infty$) — полное число пар лишних корней функции $f(x)$, а n — полное число пар комплексно сопряженных корней. Выше мы видели, что $n \leqslant l$. Теперь мы докажем, что

$$m + n \leqslant l. \tag{4}$$

Допуская противное, возьмем натуральные числа $m_1 \leqslant m$, $n_1 \leqslant n$ так, чтобы

$$m_1 + n_1 = l + 1.$$

Затем выберем m_1 пар лишних корней $\{\alpha_\nu, \alpha'_\nu\}$ и n_1 пар комплексно сопряженных корней $\{\beta_\rho, \bar{\beta}_\rho\}$ и введем многочлен

$$\gamma(x) = \prod_{\nu=1}^{m_1} (x - \alpha_\nu)(x - \alpha'_\nu) \prod_{\rho=1}^{n_1} (x - \beta_\rho)(x - \bar{\beta}_\rho).$$

С помощью этого многочлена построим функцию (1), затем выберем столь большое N, чтобы на оси вне интервала $[-N, N]$ выполнялось (2), а положительное число $\delta < \frac{1}{2}$ еще подлежит некоторому ограничению. Итак, на оси вне интервала $[-N, N]$ выполняется неравенство (3). Переходя к интервалу $[-N, N]$, введем обозначение

$$M = \max_{-N \leqslant x \leqslant N} |\varphi(x)| = \max_{-N \leqslant x \leqslant N} \left| f(x) \frac{P(x)}{\gamma(x)} \right|$$

и заметим, что

$$\max_{\substack{\alpha_\nu \leqslant x \leqslant \alpha'_\nu \\ \nu = 1, 2, \ldots, m_1}} |f(x)| = L - \varepsilon < L.$$

Таким образом, достаточно потребовать, чтобы $\delta < \frac{\varepsilon}{2M}$, и неравенство

$$|f_\delta(x)| < L \tag{5}$$

будет выполняться во всех интервалах $(\alpha_\nu, \alpha'_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m_1)$. На оставшейся части интервала $[-N, N]$ отношение $\frac{P(x)}{\gamma(x)}$ положительно, так что $f(x)$ и $\varphi(x)$ одного знака. Поэтому неравенство (5) будет выполняться всюду в интервале $[-N, N]$, если δ удовлетворяет еще и неравенству $\delta < \frac{L}{M}$

Таким образом, $f_\delta(x)$ будет иметь на всей оси уклонение $<L$, и, с
довательно, наше утверждение, то есть неравенство (4), доказано.

В силу этого неравенства функцию $f(z)$ (предполагая, что $f(0) \neq$
можно представить в виде

$$f(z) = e^{\beta z} R(z) \prod_j \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right) e^{\frac{z}{\mu_j}},$$

где $R(z)$ — многочлен степени $\leqslant 2l$.

Положим

$$\Omega(z) = e^{\alpha z} \prod_j \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) e^{\frac{z}{\lambda_j}},$$

где постоянная α определяется равенством

$$\alpha = \beta + \sum_j \left(\frac{1}{\mu_j} - \frac{1}{\lambda_j}\right).$$

Тогда

$$\frac{f(z)}{\Omega(z)} = R(z) \prod_j \frac{1 - \frac{z}{\mu_j}}{1 - \frac{z}{\lambda_j}},$$

откуда следует, что при $z \to \infty$, $\left|\arg z \pm \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$, $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{f(z)}{\Omega(z)} = O(|z|^{2l+1}).$$

Положим далее

$$p(z) = \frac{L^2 - [f(z)]^2}{\Omega^2(z)}.$$

Это — целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющ
в силу (6) соотношению

$$p(z) = O(|z|^{4l+2}) \quad \left(z \to \infty, \ \left|\arg z \pm \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon\right).$$

На основании теоремы Фрагмена — Линделефа $p(z)$ есть поэтому мно
член степени $\leqslant 4l + 2$.

Введем далее целую функцию экспоненциального типа

$$q(z) = \frac{f'(z)}{\Omega(z)}. \qquad (8)$$

Так как

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \beta + \frac{R'(z)}{R(z)} - z \sum_j \frac{1}{\mu_j(\mu_j - z)},$$

то при $z \to \infty$, $\left|\arg z \pm \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = O(|z|)$$

и, следовательно,

$$q(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{f(z)}{\Omega(z)} = O(|z|^{2l+2}).$$

Применяя снова принцип Фрагмена — Линделефа, заключаем, что $q(z)$ также есть многочлен и притом степени $\leqslant 2l+2$.

Исключая из (7) и (8) функцию $\Omega(z)$, получаем равенство

$$\frac{f'(z)}{\sqrt{L^2-[f(z)]^2}}=\frac{q(z)}{\sqrt{p(z)}},$$

откуда следует, что

$$f(z)=L\sin\left\{\int\frac{q(z)\,dz}{\sqrt{p(z)}}\right\}.$$

Но $f(z)$ — функция экспоненциального типа. Поэтому степень $q(z)$ не должна превышать половины степени $p(z)$ и значит $q(z)$ — многочлен степени $\leqslant 2l+1$.

Корнями многочлена $q(z)$ являются, во-первых, невещественные корни $f'(z)$ (их число четное) и, во-вторых, некоторые корни, лежащие внутри интервалов $(\lambda_j, \lambda_{j+1})$. Так как вогнутость графика $f(x)$ в точках λ_j, λ_{j+1} имеет разные знаки, то этих последних корней должно быть также четное число. Поэтому $q(z)$ — многочлен четной степени $2h \leqslant 2l$, а значит $p(z)$ — многочлен степени $4h$.

Таким образом, в нормальном случае решение задачи получается в виде некоторого выражения с определенным числом параметров, которые должны быть найдены с помощью исходных интерполяционных условий.

Если нормальность a priori не может быть установлена, то для применения изложенного анализа следует заменить $P(z)$ на $P(z)+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, а затем, в результате, устремить параметр ε к нулю.

Займемся обоснованием этого предельного перехода.

Положим, что вещественные корни многочлена $P(z)$ лежат в интервале $(-A, A)$.

Пусть

$$f_0(x)=Q(x)+P(x)g_0(x)$$

есть решение заданной интерполяционной вариационной задачи, а

$$f_\varepsilon(x)=Q(x)+\{P(x)+\varepsilon\}g_\varepsilon(x)$$

решение соответствующей задачи после введения параметра ε. Уклонения обозначим L_0 и L_ε. Таким образом, справедливы следующие неравенства:

$$L_0\leqslant\sup_{-\infty<x<\infty}|Q(x)+P(x)g_\varepsilon(x)|\leqslant\sup_{-\infty<x<\infty}|Q(x)+\{P(x)+\varepsilon\}g_\varepsilon(x)|+$$
$$+\sup_{-\infty<x<\infty}\varepsilon|g_\varepsilon(x)|=L_\varepsilon+\varepsilon\sup_{-\infty<x<\infty}|g_\varepsilon(x)|$$

и

$$L_\varepsilon\leqslant\sup_{-\infty<x<\infty}|Q(x)+\{P(x)+\varepsilon\}g_0(x)|\leqslant L_0+\varepsilon\sup_{-\infty<x<\infty}|g_0(x)|.$$

С другой стороны, при всех $\varepsilon\in[0,1]$ вне интервала $[-A, A]$ на оси

$$\sup|g_\varepsilon(x)|\leqslant L_\varepsilon\sup\frac{1}{P(x)}+\sup\frac{|Q(x)|}{P(x)}\leqslant B,$$

где B — какая-то фиксированная величина.

Поэтому

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|g_\varepsilon(x)|\leqslant k(A,\sigma)\cdot B, \tag{9}$$

где коэффициент $k(A,\sigma)$ зависит только от выписанных аргументов A, σ.

Например, можно положить

$$k(A, \sigma) = e^{A\sigma} + 1.$$

Таким образом, мы имеем неравенства

$$L_0 \leqslant L_\varepsilon + \varepsilon \cdot B \cdot k(A, \sigma),$$
$$L_\varepsilon \leqslant L_0 + \varepsilon \cdot B \cdot k(A, \sigma),$$

из которых находим, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon = L_0.$$

С другой стороны, из неравенства (9) следует компактность семейства функций $\{g_\varepsilon(z)\}$. Поэтому существует последовательность $\{g_{\varepsilon_k}(z)\}$ $(\varepsilon_k \to 0)$, равномерно сходящаяся к некоторому пределу $g(z)$ в каждой конечной части плоскости. Этот предел $g(z)$ есть некоторая целая функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ и в каждом интервале числовой оси

$$|Q(x) + P(x)\, g(x)| = \lim_{k \to \infty} |Q(x) + \{P(x) + \varepsilon_k\}\, g_{\varepsilon_k}(x)| \leqslant \lim_{k \to \infty} L_{\varepsilon_k} = L_0.$$

Следовательно,

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |Q(x) + P(x)\, g(x)| \leqslant L_0.$$

Но знак $<$ здесь невозможен и, значит,

$$f(x) = Q(x) + P(x)\, g(x)$$

есть решение заданной интерполяционной вариационной задачи, которое может совпадать, а может и не совпадать с решением $f_0(x)$. Для нас здесь существенно лишь то, что какое-то решение $f(x)$ может быть получено с помощью предельного перехода из решения $f_\varepsilon(x)$, построенного для нормального случая.

§ 5. **Неравенства Хермандера.** Из целых функций вида

$$L \sin \psi(z),$$

где

$$\psi(x) = \int \frac{q(z)}{\sqrt{p(z)}}\, dz,$$

к которым мы пришли в предыдущем параграфе, простейшей после $L\cos(\sigma z + \alpha)$ является функция $L\cos\sqrt{\sigma^2 z^2 + \alpha^2}$. Положим

$$F_\sigma(z, \alpha) = \cos\sqrt{\sigma^2 z^2 + \alpha^2},$$

где $\sigma > 0$, $\alpha \geqslant 0$, и обозначим через k наименьшее целое число $\geqslant \frac{\alpha}{\pi}$. Корни функции $F_\sigma(z, \alpha)$ даются следующей общей формулой

$$\mu_n = -\mu_{-n} = \frac{\pi}{\sigma}\sqrt{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

При $n = k + 1$, $k + 2$, ... каждый такой корень лежит в интервале, где $F_\sigma(x, \alpha)$ изменяется между -1 и $+1$. Остальные корни функции $F_\sigma(z, \alpha)$, число которых равно $2k$, назовем «свободными». Это будут пары мнимых корней при $n = 1, 2, \ldots, k - 1$ и пара мнимых или вещественных корней (различных или совпадающих) при $n = k$.

Хермандеру принадлежит следующая

Теорема 1. *Пусть $F(z)$ — вещественная целая функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ и*

$$-1 \leqslant F(x) \leqslant 1 \quad (-\infty < x < \infty).$$

Пусть разность

$$F_\sigma(z, \alpha) - F(z) \tag{1}$$

не равна 0 тождественно; тогда она имеет по одному корню в каждом интервале, где $F_\sigma(x, \alpha)$ изменяется между -1 и $+1$, и сверх того самое большее $2k$ корней (свободных).

Доказательство. Зададимся числом ε, $0 < \varepsilon < 1$, и введем целую функцию экспоненциального типа

$$F_\varepsilon(z) = (1-\varepsilon)\frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon z} F(z),$$

которая удовлетворяет неравенству

$$-(1-\varepsilon) \leqslant F_\varepsilon(x) \leqslant 1-\varepsilon \quad (-\infty < x < \infty).$$

По теореме Фрагмена и Линделефа в каждой комплексной точке $z = x + iy$ будет иметь место неравенство

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant (1-\varepsilon)\frac{e^{\varepsilon|y|}}{\varepsilon|z|} e^{\sigma|y|},$$

поэтому при достаточно большом N на прямых $|\operatorname{Im} z| = N$:

$$|F_\varepsilon(z)| < |\cos\sqrt{(\sigma+\varepsilon)^2 z^2 + \alpha^2}|.$$

С другой стороны, на прямых $|\operatorname{Re} z| = \frac{n\pi}{\sigma+\varepsilon}$, где n — целое,

$$\cos\sqrt{(\sigma+\varepsilon)^2 z^2 + \alpha^2} = \pm\frac{1}{2}\{e^{(\sigma+\varepsilon)y} + e^{-(\sigma+\varepsilon)y}\}\cdot\left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

и, следовательно, для всех достаточно больших целых n на рассматриваемых прямых

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant (1-\varepsilon)\frac{e^{(\sigma+\varepsilon)|y|}}{\pi n \varepsilon}(\sigma+\varepsilon) < |\cos\sqrt{(\sigma+\varepsilon)^2 z^2 + \alpha^2}|.$$

На основании теоремы Руше у функций

$$\cos\sqrt{(\sigma+\varepsilon)^2 z^2 + \alpha^2} - F_\varepsilon(z) \tag{2}$$

и

$$\cos\sqrt{(\sigma+\varepsilon)^2 z^2 + \alpha^2}$$

одинаковое число корней в прямоугольнике со сторонами

$$\operatorname{Im} z = \pm N, \quad \operatorname{Re} z = \pm\frac{n\pi}{\sigma+\varepsilon}.$$

Это же справедливо и для сколь угодно широкой полосы со сторонами $\operatorname{Re} z = \pm\frac{n\pi}{\sigma+\varepsilon}$, так как N можно взять сколь угодно большим.

Но разность (2) имеет по одному корню в каждом интервале, где функция

$$\cos\sqrt{(\sigma+\varepsilon)^2 x^2 + \alpha^2}$$

изменяется между -1 и $+1$. Следовательно, разность (2) имеет не более $2k$

свободных корней. При $\varepsilon \to 0$ мы получим в пределе разность (1), кото также имеет по одному корню в каждом интервале, где

$$\cos\sqrt{\sigma^2 x^2 + \alpha^2}$$

изменяется между -1 и $+1$. По теореме Гурвица число остальн (то есть свободных) корней разности (1) также не превосходит $2k$.

Теорема доказана.

С помощью своей теоремы Хермандер доказал следующее пред жение:

Теорема 2. *Пусть $F(z)$ — вещественная целая функция экспоненциа ного типа $\leqslant \sigma$, для которой*

$$-1 \leqslant F(x) \leqslant 1 \quad (-\infty < x < \infty),$$

и пусть при некотором $t \geqslant 0$

$$F(it) = 1.$$

Если $t \leqslant \frac{\pi}{\sigma}$, то при

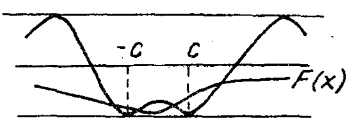
$$-c \leqslant x \leqslant c, \quad c = \sqrt{\frac{\pi^2}{\sigma^2} - t^2}$$

*справедливо неравенство**

$$F(x) \geqslant \cos(\sigma\sqrt{x^2 + t^2}).$$

Доказательство. При $t = \frac{\pi}{\sigma}$ утверждение теоремы тривиальн Пусть $0 < t < \frac{\pi}{\sigma}$. Тогда график функции $\cos(\sigma\sqrt{x^2 + t^2}) = F_\sigma(x, \sigma t)$ име вид, представленный на рисунке. Если допустить, что неравенство не выполняется всюду в интервале $[-c, c]$ (см. рис.), то окажется, ч разность

$$F(z) - F_\sigma(z, \sigma t)$$



имеет по крайней мере два корня в эт интервале. Но разность (5) имеет еще д комплексных корня, а именно $\pm it$. Так образом, разность (5) имеет четыре св бодных корня, что в силу теоремы 1 н возможно, так как в данном случае $k =$

Примем теперь, что $t = 0$. В таком случае при невыполнении в инте вале $\left[-\frac{\pi}{\sigma}, \frac{\pi}{\sigma}\right]$ неравенства

$$F(x) \geqslant \cos\sigma x$$

---

* *С помощью простой сдвижки можно было бы заменить условие* (3) *следующ*

$$F(s + it) = 1,$$

где s — произвольно взятое вещественное число. Поэтому смысл теоремы состоит в с дующем: пусть вещественная функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ ограничена на вещ ственной оси и в некоторой точке, не лежащей на оси, принимает значение, равное ма симуму модуля на оси; если расстояние этой точки до оси не слишком велико, а имен не превосходит числа $\frac{\pi}{\sigma}$, то в каждой точке вещественной оси, лежащей внутри и на границе круга радиуса $\frac{\pi}{\sigma}$ с центром в упомянутой точке, значение функции не м жет быть слишком малым.

ут представиться две возможности: либо разность

$$F(z) - \cos \sigma z \tag{6}$$

ет двойной корень $z = 0$ и еще по одному корню в каждом из полуинтервалов $\left[-\frac{\pi}{\sigma}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{\sigma}\right]$; либо эта разность имеет в точке $z = 0$ корень кратности $\geqslant 3$ и еще корень хотя бы в одном из полуинтервалов $\left[-\frac{\pi}{\sigma}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{\sigma}\right]$. В обоих случаях у разности (6) будут свободные корни, что невозможно, так как при $t = 0$ также и $k = 0$.

Следствие. Пусть $f(z)$ — вещественная целая функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, для которой

$$f(0) = \cos c \quad (0 < c \leqslant \pi) \tag{7}$$

$$-1 \leqslant f(x) \leqslant 1 \quad (-\infty < x < \infty). \tag{8}$$

В таком случае уравнение

$$f(z) = 1$$

не имеет ни одного корня в круге

$$|z| < \frac{c}{\sigma}. \tag{9}$$

Если же

$$|w| \geqslant \frac{c}{\sigma}, \tag{10}$$

то в рассматриваемом классе найдется по крайней мере одна функция $f_w(z)$, для которой

$$f(w) = 1. \tag{11}$$

Доказательство. Вторая часть предложения доказывается очень просто. Действительно, функция

$$f_w(z) = \cos \sqrt{\frac{c^2[(z-s)^2 + t^2]}{s^2 + t^2}},$$

где $s + it = w$, имеет благодаря неравенству (10) тип $\leqslant \sigma$, а соотношения (7), (8) и (11) проверяются непосредственно.

Первую часть предложения докажем на основании теоремы 2. С этой целью допустим, что некоторая функция $f(z)$ удовлетворяет условию (11) в какой-то точке $w = s + it$, лежащей в круге (9). Введем функцию

$$F(z) = f(s + z),$$

которая удовлетворяет условиям теоремы 2, поскольку

$$F(it) = f(s + it) = f(w) = 1.$$

А так как

$$s^2 + t^2 < \frac{c^2}{\sigma^2} \leqslant \frac{\pi^2}{\sigma^2},$$

то по теореме 2

$$F(-s) \geqslant \cos \sigma \sqrt{s^2 + t^2} > \cos c,$$

что противоречит условию, в силу которого

$$F(-s) \equiv f(0) = \cos c.$$

§ 6. **Некоторые частные задачи, решаемые при помощи эллиптических функций.**

А. Определим функцию $w = C(z;\ a,\ k)$ $(a > 0,\ 0 < k < 1)$ следующими формулами

$$z = a\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},\quad w = -\cos\left\{\frac{\pi u}{K} + 2K'\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}\right\}.$$

Можно показать, что $C(z;\ a,\ k)$ есть четная целая трансцендентная функция экспоненциального типа $\sigma = \frac{2K'}{a}$ с маклореновским разложением

$$C(z;\ a,\ k) = 1 - \frac{2(E' - K')^2}{a^2 k'^2} z^2 + \cdots$$

Эта функция находит применение при решении следующей интерполяционной задачи.

Среди всех целых функций $F(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих условиям

$$F(0) = a_0,\ F'(0) = 0,\ F''(0) = a_2,\ F'''(0) = 0,$$

где a_0, a_2 — заданные вещественные числа, найти ту, которая наименее уклоняется от 0 на вещественной оси.

Если выполнено одно из неравенств,

$$\frac{a_2}{a_0} \geqslant 0,\quad \frac{a_2}{a_0} \leqslant -\sigma^2,$$

то экстремальная функция имеет вид

$$M\cos\sqrt{\sigma^2 z^2 + c^2},$$

где M и c, $0 \leqslant c \leqslant \pi$, определяются из условий

$$M\cos c = a_0,\quad -M\sigma^2\frac{\sin c}{c} = a_2,$$

так что для c получается известное уравнение

$$\operatorname{tg} c + \frac{a_2}{a_0\sigma^2}c = 0.$$

Если

$$-\sigma^2 < \frac{a_2}{a_0} \leqslant 0,$$

то имеется очевидная экстремальная функция

$$a_0\cos\tau z, \tag{1}$$

где

$$\tau = \sqrt{-\frac{a_2}{a_0}},$$

тип которой $< \sigma$.

Таким образом, при $a_2 = 0$ имеются две экстремальные функции

$$f_1(z) = -a_0\cos\sqrt{\sigma^2 z^2 + \pi^2},\ f_2(z) = a_0.$$

Оказывается, что при

$$-\sigma^2 < \frac{a_2}{a_0} < 0$$

экстремальная функция также не единственна. А именно, наряду с (1) будет экстремальной функцией, и притом точно типа σ, функция

$$a_0 C(z;\, a,\, k),$$

где k должно быть найдено из уравнения

$$\sigma k' \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} : \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} = \sqrt{-\frac{a_2}{a_0}},$$

после чего a определится по формуле

$$a = \frac{2K'}{\sigma}.$$

B. Функция $w = S(z;\, a,\, k)$ $(a > 0,\ 0 < k \leqslant 1)$ определяется формулами

$$z = a\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{dn} u}, \quad w = \sin\left\{\frac{\pi u}{K} + K'\left[\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)} + \frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}\right]\right\}.$$

Можно показать, что $S(z;\, a,\, k)$ есть нечетная целая трансцендентная функция экспоненциального типа $\sigma = \frac{K'}{a}$ с разложением

$$S(z;\, a,\, k) = (2E' - K')\frac{z}{a} - \frac{\varphi(k)}{3!}\left(\frac{z}{a}\right)^3 + \cdots,$$

где

$$\varphi(k) = 2K' + 2(1-2k^2)(2E'-K') + (2E'-K')^3.$$

С помощью этой функции решается следующая интерполяционная задача.

Среди всех целых функций $F(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих условиям

$$F(0) = 0,\ F'(0) = a_1,\ F''(0) = 0,\ F'''(0) = a_3,$$

где a_1, a_3 — заданные вещественные числа, найти ту, которая наименее уклоняется от 0 на вещественной оси.

Экстремальной функцией здесь является

$$MS(z;\, a,\, k),$$

где параметры M, a, k находятся из уравнений

$$\frac{M(2E'-K')}{a} = a_1, \quad -\frac{M\varphi(k)}{a^3} = a_3, \quad \frac{K'}{a} = \sigma.$$

C. Функция $W = G(z;\, a,\, k)$ $(0 < a < K;\ 0 < k \leqslant 1)$ определяется формулами

$$z = \frac{\operatorname{sn}^2 a \cdot \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{cn}^2 a \cdot \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}, \quad w = \cos\left\{\frac{\pi u}{K} + K'\left[\frac{\mathrm{H}'(a+u)}{\mathrm{H}(a+u)} - \frac{\mathrm{H}'(a-u)}{\mathrm{H}(a-u)}\right]\right\}.$$

Это — целая функция эспоненциального типа

$$\tau = \frac{K' \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a \cdot \operatorname{cn} a}.$$

Она обладает следующим экстремальным свойством:

9*

Обозначим через E точечное множество, образованное интервала[ми]

$$(-\infty, -1], \ [1, \infty).$$

Пусть при некоторых значениях параметров a и k и некоторой вещественной константе M целая функция

$$f(z) = MG(z; a, k)$$

принимает в точках $x_1, x_2 \ (-1 < x_1 < x_2 < 1)$ значения ξ_1, ξ_2. В та[ком] случае для любой целой функции $F(z)$ экспоненциального типа [...], удовлетворяющей условиям

$$F(x_1) = \xi_1, \ F(x_2) = \xi_2,$$

имеет место неравенство

$$\sup_{x \in E} |F(x)| \geqslant |M|,$$

где знак равенства достигается лишь при $F(z) \equiv f(z)$.

Функция $G(z; a, k)$ находит применение при решении следую[щей] задачи, которую можно рассматривать как аналог задачи Е. И. Зол[ота]рева, относящейся к многочленам:

Среди всех целых функций $F(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих условиям

$$F(0) = \cos\alpha, \quad F'(0) = \sin\alpha,$$

где α — заданное вещественное число, найти ту, которая наименее уклоняется от 0 на множестве E.

Мы примем, что

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2},$$

так как при $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha < 0$ достаточно заменить z на $-z$.

Экстремальную функцию обозначим $f(z)$.

I. Если

$$0 < \sigma \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 \leqslant \operatorname{tg}\alpha \leqslant \sigma \operatorname{tg}\sigma \tag{2}$$

или

$$\sigma > \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 \leqslant \operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{\pi^2}{4} \frac{\operatorname{th}\sqrt{\sigma^2 - \frac{\pi^2}{2}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{\pi^2}{2}}}, \tag{3}$$

то

$$f(z) = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{ch}\sigma\sqrt{\lambda}} \cos\sigma\sqrt{(z-1)(z+\lambda)},$$

где параметр λ определяется из уравнения *

$$\frac{\sigma(1-\lambda)}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{th}\sigma\sqrt{\lambda} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{4}$$

---

* Левая часть уравнения (4) в случае (2) изменяется от 0 до $\sigma \operatorname{tg}\sigma$ при убывании λ от 1 до -1, а в случае (3) она изменяется от 0 до

$$\frac{\pi^2}{4} \frac{\operatorname{th}\sqrt{\sigma^2 - \frac{\pi^2}{2}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{\pi^2}{2}}},$$

когда λ убывает от 1 до $1 - \frac{\pi^2}{2\sigma^2}$.

Не мешает заметить, что в силу этого уравнения

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ch}\sigma\sqrt{\lambda}} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh}\sigma\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{2\sqrt{\lambda}}{\sigma(1-\lambda)}.$$

Поэтому при $\sigma=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ функция $f(z)$ превращается в

$$\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2}.$$

II. Если

$$0<\sigma\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha\geqslant\sigma\operatorname{tg}\sigma,$$

то

$$f(z)=\cos\alpha\cdot\cos\sigma z+\sin\alpha\,\frac{\sin\sigma z}{\sigma}.$$

III. Если

$$\sigma>\frac{\pi}{2} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha>\frac{\pi^2}{4}\,\frac{\operatorname{th}\sqrt{\sigma^2-\frac{\pi^2}{2}}}{\sqrt{\sigma^2-\frac{\pi^2}{2}}},$$

то

$$f(z)=MG(z;\,a,\,k),$$

где параметры a, k, M определяются из уравнений

$$MG(0;\,a,\,k)=\cos\alpha,\quad MG_z'(0;\,a,\,k)=\sin\alpha,$$

$$\sigma=\frac{K'\operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}a\cdot\operatorname{cn}a}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ (ЗАМЕЧАНИЯ И ССЫЛКИ)

Работы С. Н. Бернштейна, о которых упомянуто в § 1, относятся к годам 1946—1949. См. Собр. соч. С. Н. Бернштейна, статьи:

[1] *О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси* при помощи целых функций данной степени (том II, стр. 371—396).

[2] Функции конечной степени и функции конечной полустепени (том II, стр. 479—492).

Это направление С. Н. Бернштейна получило некоторое развитие в следующих работах автора:

[3] О целых функциях конечной степени, наименее уклоняющихся от нуля («Матем. сб.,» т. 31 (73), 1952, стр. 415—437).

[4] Об одном семействе целых функций конечной степени и одной чебышевской задаче («Изв. АН СССР, серия матем.» 16, 1952, стр. 459—468).

[5] О наилучшем взвешенном приближении на всей оси посредством целых функций конечной степени (ДАН СССР, 94, 1954, стр. 983—986).

Понятие о чебышевском множестве впервые введено в [3]. То, что в настоящей работе называется максимальным чебышевским множеством, первоначально называлось просто чебышевским множеством.

Теоремы 1 и 2 § 2 настоящей работы являются обобщением соответствующих теорем статьи [3].

Частные задачи § 6 были решены в статьях [2], [3], [4]. Здесь приведены лишь формулировки и окончательные результаты.

Теоремы 1 и 2 § 5, а также следствие представляют, как мне кажется, наиболее интересную часть статьи Хермандера.

[6] Some inequalities for fonctions of exponential type. Math. Scand., 3, 1955, 21—27.

Теорему 1 Хермандер доказывает с помощью полиномов Б. М. Левитана (предельным переходом от тригонометрических сумм).

Приводимое в настоящей работе доказательство использует метод Даффина и Шеффера (для доказательства теоремы С. Н. Бернштейна о производной от функции экспоненциального типа). См.

[7] R. Daffin and A. Schaeffer, Some properties of fonctions of exponent.. type. Bull. American Math. Soc. 44, 1938, 236—240.

Метод этой работы уже однажды был применен автором для доказательства некоторых обобщений теоремы С. Н. Бернштейна. См. [8]. О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа («Изв. АН СССР, серия матем.» 10, 1946, стр. 411—428).

В связи с теоремой 1 Хермандера следует отметить одно обобщение теоремы 1 § 1 настоящей работы, которое получается без всякого труда. Это обобщение гласит:

Пусть выполняются все условия теоремы 1 § 2, кроме условия (2), которое заменяется условием

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^{1-m}\Phi_\sigma(iy)}{[\theta(iy)]^2\,\Omega(iy)} = 0, \tag{2*}$$

где заданное число $m \geqslant 0$, и пусть $G(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, для которой

$$E_G \leqslant E_g.$$

В таком случае

$$\varphi(z) = \frac{g(z) - G(z)}{\Omega_1(z)}$$

есть многочлен степени $< m$ (если $m = 0$, то $\varphi(z) \equiv 0$).

Теорема 1 Хермандера есть тот частный случай этого предложения, когда

$$\Phi_\sigma(z) = e^{-i\sigma z},\ \theta(z) = 1,\ g(z) = F_\sigma(z, \alpha),\ G(z) = F(z)$$

и

$$\Omega(z) = \frac{z\sin\sqrt{\sigma^2 z^2 + \alpha^2}}{\sqrt{\sigma^2 z^2 + \alpha^2}}\,\frac{1}{R(z)},$$

где $R(z)$ — многочлен (его степень $\leqslant 2k$), выбранный так, чтобы корни $\Omega(z)$ образовывали чебышевское множество функции

$$\cos\sqrt{\sigma^2 z^2 + \alpha^2}.$$

Условие (2*) *будет выполнено при любом* $m > 2k + 1$. *Следовательно*, согласно приведенному предложению

$$\varphi(z) = \frac{F_\sigma(z, \alpha) - F(z)}{\Omega_1(z)}$$

есть многочлен степени $\leqslant 2k + 1$. Поэтому разность $F_\sigma(z, \alpha) - F(z)$ имеет, во-первых, по одному корню в каждом интервале, где $F_\sigma(z, \alpha)$ изменяется между -1 и $+1$ (это корни целой функции $\Omega_1(z)$, и, во-вторых, еще корни многочлена $\varphi(z)$ степени $\leqslant 2k + 1$, которые являются свободными корнями. Но число свободных корней всегда четное. Значит их $2k$, а это и составляет содержание теоремы 1 Хермандера.

Вывод, в § 4, уравнения

$$\frac{f'(z)}{\sqrt{L^2 - [f(z)]^2}} = \frac{q(z)}{\sqrt{p(z)}}, \tag{*}$$

которое в родственных рассмотрениях приводится в статье [3], можно считать перенесением на трансцендентный случай построений Е. И. Золотарева, относящихся к многочленам.

Уравнение (*) в связи с другой, но близкой задачей выведено в работе [9] R. Boas and A. Schaeffer. Variational methods in entire fonctions (American Journ. of Mathem., XXIX, 1957, 857—884).

Задача этих авторов формулируется следующим образом:

Пусть линейный функционал ω определяется равенством

$$\omega[F] = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_\nu} c_\nu^{(j)} F^{(j)}(x_\nu),$$

где x_ν и $c_\nu^{(j)}$ — заданные вещественные числа, причем все x_ν различны между собой, а $c_\nu^{(n_\nu)} \neq 0$. Рассматривается совокупность K_ω^σ всех целых функций $F(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\omega[F] = 1.$$

Требуется найти

$$L = \min_{K_\omega^\sigma} \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x)|,$$

а также функции, на которых этот экстремум достигается.

Главная часть результата Боаса и Шеффера состоит в доказательстве существования экстремальной функции и ее представимости в виде

$$f(z) = L \sin \psi(z),$$

где

$$\psi(z) = \int \frac{q(z)}{\sqrt{p(z)}}\, dz,$$

а $q(z)$, $p(z)$ — многочлен степени h и $2h$ соответственно, причем

$$h \leqslant 2 \sum_{\nu=1}^{m} \left[\frac{n_\nu}{2}\right] + 2m - 2.$$

Этот результат можно получить с помощью теоремы § 4 настоящей работы, сопоставляя каждой точке x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) значения экстремальной функции $f(z)$ и ее производных $f^{(j)}(z)$ до порядка $2\left[\frac{n_\nu}{2}\right] + 1$ включительно, а затем рассматривая порождаемую этими данными интерполяционную вариационную задачу.

В статье [9], кроме того, решаются и исследуются до конца некоторые простые частные случаи общей задачи, интересующей авторов.

Для частной интерполяционной задачи

$$F(0) = a_0, \quad F'(0) = a_1, \; \ldots, \; F^{(2m-1)}(0) = a_{2m-1}$$

уравнение (*) получено иным путем в работе Н. Н. Меймана [10]. Решение основных задач теории полиномов и целых функций, наименее уклоняющихся от нуля («Труды Московск. матем. общества», 9, 1960, 507—535).

Теоремы теории целых функций, которыми я пользовался в настоящей статье, читатель сможет найти в монографии Б. Я. Левина [11]. Распределение корней целых функций (М., 1956).

Считаю своим приятным долгом принести благодарность Б. Я. Левину и И. В. Островскому, которые ознакомились с рукописью и по совету которых я внес в нее некоторые изменения.